УДК 517.949

Ю. В. Теплінський, Н. А. Марчук (Кам'янець-Поділ. пед. ун-т)

ПРО ГЛАДКІСТЬ ІНВАРІАНТНОГО ТОРА ЗЧИСЛЕННОЇ СИСТЕМИ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ З ПАРАМЕТРАМИ

We find sufficient conditions of the differentiability of invariant torus of a countable system of linear difference equations determined on a finite-dimensional torus with respect to an angle variable and to a parameter contained in the output system of equations.

Знайдено достатні умови диференційовності інваріантного тора зчисленної системи лінійних різницевих рівнянь, визначеної на скінченновимірному торі, за кутовою змінною та параметром, який містить вихідна система рівнянь.

Останнім часом опубліковано ряд статей, присвячених дослідженню періодичних (квазіперіодичних) розв'язків та інваріантних многовидів різницевих рівнянь у просторах обмежених числових послідовностей (зчисленних систем різницевих рівнянь) [1 – 6]. Проте важливі питання, пов'язані з гладкістю цих многовидів та залежністю їх від параметрів, залишилися поза увагою авторів. Зауважимо, що вказані питання вивчались досить ретельно для систем диференціальних рівнянь, як скінченних, так і зчисленних [7 – 11]. У цій роботі ми пропонуємо достатні умови гладкості інваріантного тора лінійної зчисленної системи різницевих рівнянь, визначених на m-вимірному торі, та диференційовності його за дійсним параметром.

Розглянемо систему рівнянь

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + a(\varphi_n, \mu), \qquad x_{n+1} = P(\varphi_{n+p}, \mu)x_n + c(\varphi_{n+g+1}, \mu), \tag{1}$$

в якій $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^m) \in R^m$, $x = (x^1, x^2, x^3, \ldots) \in \mathfrak{M}$, де $\mathfrak{M}$ — простір обмежених числових послідовностей з нормою $\|x\| = \sup_i \left\{\left|x^i\right|\right\}$; функції $a(\varphi, \mu) = \{a_1(\varphi, \mu), a_2(\varphi, \mu), \ldots, a_m(\varphi, \mu)\}$, $c(\varphi, \mu) = \{c_1(\varphi, \mu), c_2(\varphi, \mu), c_3(\varphi, \mu), \ldots\}$ і нескінченна матриця $P(\varphi, \mu) = \left[p_{ij}(\varphi, \mu)\right]_{i,j=1}^{\infty}$ — дійсні та періодичні по φ^i, $i = \overline{1, m}$, з періодом 2π; $n \in Z$, Z — множина цілих чисел; p і g — цілочислові параметри; $\mu \in [\mu_1, \mu_2] \subset R^1$ — дійсний параметр.

Інтерпретуючи φ^i, $i = \overline{1, m}$, як кутові координати на торі, вважаємо, що система рівнянь (1) визначена на m-вимірному торі $\mathcal{T}_m$.

Через $\varphi_n(\varphi, \mu)$ позначимо розв'язок першого рівняння (1) такий, що $\varphi_0(\varphi, \mu) = \varphi \in \mathcal{T}_m$ $\forall \mu \in [\mu_1, \mu_2]$.

Надалі вважатимемо, що матриця $P(\varphi, \mu)$ та відображення $\Phi(\varphi, \mu)\colon \varphi \to \varphi + a(\varphi, \mu)$ оборотні на R^m при всіх $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$ і $\|a(\varphi, \mu)\| \le A^0$, $\|c(\varphi, \mu)\| \le C^0$, $\|P(\varphi, \mu)\| = \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} \left|p_{ij}(\varphi, \mu)\right| \le P^0$, $\left\|P^{-1}(\varphi, \mu)\right\| \le P_1$ $\forall \varphi \in \mathcal{T}_m$, $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$, де A^0, P^0, C^0, P_1 — додатні сталі, що не залежать від φ, μ.

Означення. *Інваріантним тором* $\mathcal{T}(p, g, \mu, \varphi)$ *системи рівнянь* (1) *назвемо множину точок* $x \in \mathfrak{M}$:

$$x = u(p, g, \mu, \varphi) = (u_1(p, g, \mu, \varphi), u_2(p, g, \mu, \varphi), \ldots), \qquad \varphi \in \mathcal{T}_m,$$

якщо при будь-яких $\{p, q\} \subset Z$, $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$, $\varphi \in \mathcal{T}_m$ *функція* $u(p, g, \mu, \varphi)$ — 2π*-періодична відносно* φ^i, $i = \overline{1, m}$, *обмежена за нормою* $\|\cdot\|$ *і задовольняє рівність*

$$u\big(p, g, \mu, \varphi_{n+1}(\varphi, \mu)\big) =$$
$$= P\big(\varphi_{n+p}(\varphi, \mu), \mu\big)u(p, g, \mu, \varphi_n(\varphi, \mu)) + c\big(\varphi_{n+g+1}(\varphi, \mu), \mu\big).$$

Твердження 1. *Нехай матрицант* $\Omega_l^n(p, \varphi, \mu)$ *рівняння*

$$x_{n+1} = P\big(\varphi_{n+p}(\varphi, \mu), \mu\big)x_n \tag{2}$$

задовольняє нерівність

$$\left\|\Omega_l^n(0, \varphi, \mu)\right\| \le M\lambda^{l-n}, \quad l > n, \tag{3}$$

де $M > 0$ *і* $0 < \lambda < 1$ — *сталі, які не залежать від* φ, μ.

Тоді рівняння (2) *має функцію Гріна – Самойленка задачі про інваріантний тор (ФГС) вигляду*

$$G_0(l, p, \mu, \varphi) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } l \le 0; \\ -\Omega_l^0(p, \varphi, \mu), & \text{якщо } l > 0, \end{cases}$$

а інваріантний тор $\mathcal{T}(p, g, \mu, \varphi)$ *системи рівнянь* (1) *визначається функцією*

$$u(p, g, \mu, \varphi) = -\sum_{l=1}^{\infty} \Omega_l^0(p, \varphi, \mu)c\big(\varphi_{l+g}(\varphi, \mu), \mu\big).$$

Цей тор вкритий сім'єю траєкторій системи рівнянь (1), *визначених рівністю*

$$x_n = -\sum_{l=n+1}^{\infty} \Omega_l^n(p, \varphi, \mu)c\big(\varphi_{l+g}(\varphi, \mu), \mu\big).$$

Доведення цього твердження традиційне, і ми його тут не наводимо. Зауважимо лише, що тор $\mathcal{T}(p, g, \mu, \varphi)$ вважають гладким відносно φ, якщо цю властивість має породжуюча його функція $u(p, g, \mu, \varphi)$.

Через $C^1(\varphi)$ $\big(C^1(\mu)\big)$ та $C_*^1(\varphi)$ $\big(C_*^1(\mu)\big)$ позначимо множини вектор-функцій і матриць, координати та елементи яких відповідно неперервно диференційовні по φ^i, $i = \overline{1, m}$ (по $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$). Аналогічно, через $C^1(\varphi, \mu)$ та $C_*^1(\varphi, \mu)$ позначимо множини вектор-функцій і матриць, координати та елементи яких відповідно неперервно диференційовні по φ^i та μ, $i = \overline{1, m}$, $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$.

Будемо вважати, що матриця диференціюється поелементно, а вектор-функція — покоординатно.

Введемо ще одну норму матриці: $\|P(\varphi)\|_\varphi = \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} \max_\varphi |p_{ij}(\varphi)|$ і сформулюємо наступне допоміжне твердження.

Лема 1. *Нехай при всіх* $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$, $\varphi \in \mathcal{T}_m$ *справджуються умови:*

1) *має місце нерівність* (3), *в якій норму* $\|\cdot\|$ *замінено нормою* $\|\cdot\|_\varphi$;

2) *елементи матриці* $P^{-1}(\varphi, \mu)$ *неперервні по* φ *і* $\left\|P^{-1}(\varphi, \mu)\right\|_\varphi \le P_1$;

3) $a(\varphi, \mu) \in C^1(\varphi)$, $P(\varphi, \mu) \in C_*^1(\varphi)$, *причому* $\left\|\partial P(\varphi, \mu)/\partial\varphi^i\right\|_\varphi \le P^*$, $\left\|\partial a(\varphi, \mu)/\partial\varphi^i\right\| \le A^*$, *де* P^*, A^* — *додатні сталі, що не залежать від* $i = \overline{1, m}$ *та* φ.

Тоді при $p \ge 0$, $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$ *ФГС рівняння* (2) *належить* $C_*^1(\varphi)$.

Доведення. Спочатку методом повної математичної індукції покажемо, що при всіх $n \geq 0$ $\varphi_n(\varphi, \mu) \in C^1(\varphi)$, причому $\left\| \partial\varphi_n(\varphi, \mu) / \partial\varphi^i \right\| \leq N_n^*$, де N_n^* — додатна стала, залежна від n. Дійсно, при $n = 0$ твердження правильне, причому $N_0^* = 1$. Припустимо, що воно справджується при $n \leq k \in Z$. Маємо $\varphi_{k+1}(\varphi, \mu) = \varphi_k(\varphi, \mu) + a(\varphi_k(\varphi, \mu), \mu)$, звідки

$$\frac{\partial\varphi_{k+1}(\varphi, \mu)}{\partial\varphi^i} = \frac{\partial\varphi_k(\varphi, \mu)}{\partial\varphi^i} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial a(\varphi_k(\varphi, \mu), \mu)}{\partial\varphi_k^j(\varphi, \mu)} \frac{\partial\varphi_k^j(\varphi, \mu)}{\partial\varphi^i}.$$

Із останньої рівності випливає оцінка $\left\| \partial\varphi_{k+1}(\varphi, \mu) / \partial\varphi^i \right\| \leq N_k^* + mA^* N_k^* = N_{k+1}^*$.

Очевидно, що при $l \leq 0$ твердження леми 1 вірне, бо $G_0(l, p, \mu, \varphi) = 0$. Отже, нехай $l > 0$.

Умова (3) вказує на те, що рівняння (2) має лише один обмежений на множині Z розв'язок. Це дає можливість виписати рівність

$$\overline{\Omega} = \sum_{k=1}^{\infty} \Omega_k^0(p, \varphi, \mu)\overline{P}G_{k-1}(l, p, \mu, \overline{\varphi}),$$

в якій через $\overline{\Omega}$ та $\overline{P}$ позначено різниці $\Omega_l^0(p, \varphi, \mu) - \Omega_l^0(p, \overline{\varphi}, \mu)$ та $P\big(\varphi_{k+p-1}(\varphi, \mu), \mu\big) - P\big(\varphi_{k+p-1}(\overline{\varphi}, \mu), \mu\big)$ відповідно, причому

$$G_{k-1}(l, p, \mu, \overline{\varphi}) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } l \leq k-1; \\ -\Omega_l^{k-1}(p, \overline{\varphi}, \mu), & \text{якщо } l > k-1. \end{cases}$$

Тоді

$$\overline{\Omega} = -\sum_{k=1}^{l} \Omega_k^0(p, \varphi, \mu)\overline{P}\Omega_l^{k-1}(p, \overline{\varphi}, \mu).$$

Вважаючи, що φ і $\overline{\varphi}$ відрізняються лише i-ми координатами, поділимо останню рівність на $\varphi^i - \overline{\varphi}^i$. Одержимо

$$\frac{\overline{\Omega}}{\varphi^i - \overline{\varphi}^i} = -\sum_{k=1}^{l} \Omega_k^0(p, \varphi, \mu)\frac{\overline{P}}{\varphi^i - \overline{\varphi}^i}\,\Omega_l^{k-1}(p, \overline{\varphi}, \mu). \tag{4}$$

Покладемо $\Omega_s^\gamma(p, \varphi, \mu) = \left[\omega_{sij}^\gamma(\varphi)\right]_{i,j=1}^{\infty}$ та випишемо елемент матриці, що стоїть в рівності (4) під знаком суми, який належить r-му стовпцю і s-му рядку:

$$W_{sr}(k) = \sum_{q=1}^{\infty} \omega_{ksq}^0(\varphi) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{p_{qj}\big(\varphi_{k+p-1}(\varphi, \mu), \mu\big) - p_{qj}\big(\varphi_{k+p-1}(\overline{\varphi}, \mu), \mu\big)}{\varphi^i - \overline{\varphi}^i}\,\omega_{ljr}^{k-1}(\overline{\varphi}).$$

Ряд

$$S = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial p_{qj}\big(\varphi_{k+p-1}(\varphi, \mu), \mu\big)}{\partial\varphi^i}\,\omega_{ljr}^{k-1}(\varphi)$$

збігається рівномірно відносно φ. Дійсно, оскільки $k + p - 1 \geq 0$, то

$$\frac{\partial p_{qj}\big(\varphi_{k+p-1}(\varphi,\mu),\mu\big)}{\partial\varphi^i} = \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial p_{qj}\big(\varphi_{k+p-1}(\varphi,\mu),\mu\big)}{\partial\varphi^s_{k+p-1}(\varphi,\mu)} \frac{\partial\varphi^s_{k+p-1}(\varphi,\mu)}{\partial\varphi^i},$$

звідки

$$|S| \le \sum_{j=1}^{\infty} MN^*_{k+p-1} \sum_{s=1}^{m} \left| \frac{\partial p_{qj}\big(\varphi_{k+p-1}(\varphi,\mu),\mu\big)}{\partial\varphi^s_{k+p-1}(\varphi,\mu)} \right| \le mMP^* N^*_{k+p-1}.$$

Тоді ряд $W_{sr}(k) = \sum_{q=1}^{\infty} \omega^0_{ksq}(\varphi)S$ збігається рівномірно відносно φ:

$$|W_{sr}(k)| \le \sum_{q=1}^{\infty} \left|\omega^0_{ksq}(\varphi)\right| |S| \le mM^2P^*N^*_{k+p-1}\lambda^k.$$

Останнє означає, що в (4) можна поелементно перейти до границі при $\overline{\varphi}^i \to \varphi^i$ і одержати рівності

$$\frac{\partial\Omega^0_l(p,\varphi,\mu)}{\partial\varphi^i} = \lim_{\overline{\varphi}^i\to\varphi^i} \frac{\overline{\Omega}}{\varphi^i - \overline{\varphi}^i} =$$

$$= -\sum_{k=1}^{l} \Omega^0_k(p,\varphi,\mu) \frac{\partial P\big(\varphi_{k+p-1}(\varphi,\mu),\mu\big)}{\partial\varphi^i} \Omega^{k-1}_l(p,\varphi,\mu),$$

які завершують доведення леми 1.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови леми* 1, $\lambda(1+mA^*) < 1$, $c(\varphi,\mu) \in C^1(\varphi)$, *причому для всіх* $\mu \in [\mu_1,\mu_2]$, $\varphi \in \mathcal{T}_m$, $i = \overline{1,m}$, *мають місце нерівності*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \max_{\varphi} \left|c_j(\varphi,\mu)\right| \le C^*, \qquad \left\|\frac{\partial c(\varphi,\mu)}{\partial\varphi^i}\right\| \le C_*,$$

де C^* *та* C_* — *додатні сталі, що не залежать від* φ.

Тоді при будь-яких $p \ge 0$, $g \ge 0$, $\mu \in [\mu_1,\mu_2]$ *функція* $u(p,g,\mu,\varphi) \in C^1(\varphi)$.

Доведення. Випишемо спочатку ланцюжок нерівностей, які справджуються при всіх цілих $n \ge 0$:

$$\left\|\frac{\partial\varphi_n(\varphi,\mu)}{\partial\varphi^i}\right\| \le \left\|\frac{\partial\varphi_{n-1}(\varphi,\mu)}{\partial\varphi^i}\right\| + \sum_{j=1}^{m} \left\|\frac{\partial a\big(\varphi_{n-1}(\varphi,\mu),\mu\big)}{\partial\varphi^j_{n-1}(\varphi,\mu)}\right\| \left\|\frac{\partial\varphi^j_{n-1}(\varphi,\mu)}{\partial\varphi^i}\right\| \le$$

$$\le \left\|\frac{\partial\varphi_{n-1}(\varphi,\mu)}{\partial\varphi^i}\right\|(1+mA^*) \le \left\|\frac{\partial\varphi_{n-1}(\varphi,\mu)}{\partial\varphi^i}\right\|(1+mA^*)^2 \le \ldots$$

$$\ldots \le \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi^i}\right\|(1+mA^*)^n = (1+mA^*)^n.$$

Вираз для s-ї координати функції $u(p,g,\mu,\varphi)$ має вигляд

$$u_s = -\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \omega^0_{lsj}(\varphi) c_j\big(\varphi_{l+g}(\varphi,\mu),\mu\big).$$

Покажемо, що справджується рівність

$$\frac{\partial u_s}{\partial \varphi^i} = -\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \varphi^i}\Big(\omega_{lsj}^0(\varphi)c_j\big(\varphi_{l+g}(\varphi,\mu),\mu\big)\Big), \qquad i = \overline{1,m}. \tag{5}$$

Оскільки

$$\frac{\partial}{\partial \varphi^i}\Big(\omega_{lsj}^0(\varphi)c_j\big(\varphi_{l+g}(\varphi,\mu),\mu\big)\Big) = \frac{\partial \omega_{lsj}^0(\varphi)}{\partial \varphi^i} c_j\big(\varphi_{l+g}(\varphi,\mu),\mu\big) +$$

$$+ \omega_{lsj}^0(\varphi) \sum_{r=1}^{m} \frac{\partial c_j\big(\varphi_{l+g}(\varphi,\mu),\mu\big)}{\partial \varphi_{l+g}^r(\varphi,\mu)} \frac{\partial \varphi_{l+g}^r(\varphi,\mu)}{\partial \varphi^i},$$

то

$$I(l,\varphi,s) = \sum_{j=1}^{\infty} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi^i}\Big(\omega_{lsj}^0(\varphi)c_j\big(\varphi_{l+g}(\varphi,\mu),\mu\big)\Big) \right| \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \left| c_j\big(\varphi_{l+g}(\varphi,\mu),\mu\big) \right| \sum_{k=1}^{l} M^2 m P^* (1+mA^*)^{k+p-1} \lambda^{k+l-(k-1)} + \right.$$

$$\left. + \left|\omega_{lsj}^0(\varphi)\right| m C_* (1+mA^*)^{l+g} \right\} \le C^* M^2 m P^* \sum_{k=1}^{l} \lambda^{l+1}(1+mA^*)^{k+p-1} +$$

$$+ MmC_* \lambda^l (1+mA^*)^{l+g},$$

що означає рівномірну відносно φ і $s = 1, 2, 3, \ldots$ збіжність внутрішнього ряду в (5). Покажемо тепер, що і зовнішній ряд у цьому виразі збігається рівномірно по φ і $s = 1, 2, 3, \ldots$, чого досить для виконання рівності (5).

Дійсно,

$$\sum_{l=1}^{\infty} I(l,\varphi,s) \le K_1 \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{l} \lambda^{l+1}(1+mA^*)^k + K_2 \sum_{l=1}^{\infty} \big(\lambda(1+mA^*)\big)^l,$$

де

$$K_1 = C^* P^* M^2 m (1+mA^*)^{p-1}, \qquad K_2 = MmC_*(1+mA^*)^g.$$

І, нарешті, рівності

$$\sum_{l=1}^{\infty} \big(\lambda(1+mA^*)\big)^l = \frac{\lambda(1+mA^*)}{1-\lambda(1+mA^*)},$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{l} \lambda^{l+1}(1+mA^*)^k = (1+mA^*)\lambda^2 \sum_{l=0}^{\infty} \lambda^l \sum_{k=0}^{\infty} \big(\lambda(1+mA^*)\big)^k =$$

$$= (1+mA^*) \frac{\lambda^2}{(1-\lambda)\big(1-\lambda(1+mA^*)\big)}$$

гарантують рівномірну відносно φ і $s = 1, 2, 3, \ldots$ збіжність ряду $\sum_{l=1}^{\infty} I(l,\varphi,s)$. Останнє доводить рівність (5), а разом з тим і теорему, оскільки належність $u(p,g,\mu,\varphi) \in C^1(\varphi)$ тепер стає очевидною.

Сформулюємо аналог теореми 1 для випадку, коли функція $a(\varphi,\mu)$ не залежить від φ, враховуючи, що в цьому разі відображення $\Phi(\varphi, \mu)$ оборотне на R^m і обернене відображення $\Phi^{-1}(\varphi, \mu)$ диференційовне по φ^i, $i = \overline{1, m}$.

***Наслідок* 1.** *Нехай для всіх* $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$, $\varphi \in \mathcal{T}_m$ *виконуються умови* 1, 2 *леми* 1, $P(\varphi, \mu) \in C_*^1(\varphi)$, $c(\varphi, \mu) \in C^1(\varphi)$, $a(\varphi, \mu) = \omega(\mu)$ *і справджуються оцінки*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \max_{\varphi} \left| c_j(\varphi, \mu) \right| \le C^*, \quad \left\| \frac{\partial c(\varphi, \mu)}{\partial \varphi^i} \right\| \le C_*, \quad \left\| \frac{\partial P(\varphi, \mu)}{\partial \varphi^i} \right\|_{\varphi} \le P^*,$$

де P^*, C^*, C_* — *додатні сталі, що не залежать від* φ *та* $i = \overline{1, m}$.

Тоді при будь-яких $\{p, g\} \subset Z$, $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$ *функція* $u(p, g, \mu, \varphi) \in C^1(\varphi)$.

Доведення проводиться аналогічно доведенню леми 1 та теореми 1 з урахуванням того, що при всіх $n \in Z$ та $i = \overline{1, m}$

$$\frac{\partial \varphi_n(\varphi, \mu)}{\partial \varphi^i} = \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi^i}, \quad \left\| \frac{\partial \varphi_n(\varphi, \mu)}{\partial \varphi^i} \right\| = 1.$$

Тоді

$$\frac{\partial p_{qj}\left(\varphi_{k+p-1}(\varphi, \mu), \mu\right)}{\partial \varphi^i} = \frac{\partial p_{qj}\left(\varphi_{k+p-1}(\varphi, \mu), \mu\right)}{\partial \varphi^i_{k+p-1}(\varphi, \mu)},$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi^i}\left(\omega^0_{lsj}(\varphi) c_j\left(\varphi_{l+g}(\varphi, \mu), \mu\right)\right) = \frac{\partial \omega^0_{lsj}(\varphi)}{\partial \varphi^i} c_j\left(\varphi_{l+g}(\varphi, \mu), \mu\right) +$$

$$+ \omega^0_{lsj}(\varphi) \frac{\partial c_j\left(\varphi_{l+g}(\varphi, \mu), \mu\right)}{\partial \varphi^i_{l+g}(\varphi, \mu)},$$

$$|S| \le MP^*, \quad |W_{sr}(k)| \le M^2 \lambda^k P^*, \quad I(l, \varphi, s) \le C^* \sum_{k=1}^{l} M^2 \lambda^{l+1} P^* + MC_* \lambda^l$$

і ряд $\sum_{l=1}^{\infty} I(l, \varphi, s)$ збігається рівномірно відносно φ та s.

***Зауваження* 1.** Теорему 1 можна поширити на випадок, коли p і g — довільні цілі числа. Тоді потрібно вимагати диференційовності по φ^i, $i = \overline{1, m}$, відображення $\Phi^{-1}(\varphi, \mu)$. Враховуючи вигляд ФГС рівняння (2), можна обгрунтувати її гладкість, виходячи з подання

$$\Omega_l^0(p, \varphi, \mu) = \prod_{i=p}^{l+p-1} P^{-1}(\varphi_i(\varphi, \mu), \mu), \quad l > 0.$$

В цьому разі слід вимагати диференційовності по φ^i, $i = \overline{1, m}$, матриці $P^{-1}(\varphi, \mu)$.

Займемось тепер дослідженням гладкості інваріантного тора системи рівнянь (1) за параметром μ.

Лема 2. *Нехай при всіх* $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$, $\varphi \in \mathcal{T}_m$ *справджуються умови:*

1) *має місце нерівність* (3), *в якій норму* $\|\cdot\|$ *замінено нормою* $\|\cdot\|_{\varphi\mu}$;

2) *елементи матриці* $P^{-1}(\varphi, \mu)$ *неперервні за сукупністю змінних* φ, μ *і* $\left\| P^{-1}(\varphi, \mu) \right\|_{\varphi\mu} \le P_1$;

3) $a(\varphi, \mu) \in C^1(\varphi, \mu)$, $P(\varphi, \mu) \in C^1_*(\varphi, \mu)$, *причому*

$$\max\left\{\left\|\frac{\partial P(\varphi, \mu)}{\partial \mu}\right\|_{\varphi\mu}, \left\|\frac{\partial P(\varphi, \mu)}{\partial \varphi^i}\right\|_{\varphi\mu}\right\} \leq P^*,$$

$$\max\left\{\left\|\frac{\partial a(\varphi, \mu)}{\partial \varphi^i}\right\|, \left\|\frac{\partial a(\varphi, \mu)}{\partial \mu}\right\|\right\} \leq A^*,$$

де P^*, A^* — *додатні сталі, що не залежать від* $i = \overline{1, m}$ *та* φ, μ.

Тоді при всіх $p \geq 0$, $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$ *ФГС рівняння* (2) *належить* $C^1_*(\varphi, \mu)$.

Доведення. Покажемо, що при всіх $n \geq 0$ $\varphi_n(\varphi, \mu) \in C^1(\varphi, \mu)$, причому $\|\partial\varphi_n(\varphi, \mu) / \partial\mu\| \leq N_n$, де N_n — додатна стала, залежна від n. Дійсно, при $n = 0$ твердження правильне, причому $N_0 = 0$. Припустимо, що воно справджується при всіх $n \leq k \in Z$. Тоді з рівності

$$\frac{\partial \varphi_{k+1}(\varphi, \mu)}{\partial \mu} = \frac{\partial \varphi_k(\varphi, \mu)}{\partial \mu} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial a(\varphi_k(\varphi, \mu), \mu)}{\partial \varphi_k^j(\varphi, \mu)} \frac{\partial \varphi_k^j(\varphi, \mu)}{\partial \mu} + \left.\frac{\partial a(\varphi, \mu)}{\partial \mu}\right|_{\varphi = \varphi_k(\varphi, \mu)}$$

одержуємо оцінку

$$\left\|\frac{\partial \varphi_{k+1}(\varphi, \mu)}{\partial \mu}\right\| \leq N_k + mA^* N_k + A^* = N_{k+1}.$$

Нехай $l > 0$, оскільки в противному разі твердження леми очевидне. За аналогією з доведенням леми 1 виписуємо рівність

$$\tilde{\Omega} = -\sum_{k=1}^{\infty} \Omega_k^0(p, \varphi, \mu) \tilde{P} \Omega_l^{k-1}(p, \varphi, \overline{\mu}), \tag{6}$$

де через $\tilde{\Omega}$ та $\tilde{P}$ позначено різниці $\Omega_l^0(p, \varphi, \mu) - \Omega_l^0(p, \varphi, \overline{\mu})$ та $P\big(\varphi_{k+p-1}(\varphi, \mu), \mu\big) - P\big(\varphi_{k+p-1}(\varphi, \overline{\mu}), \overline{\mu}\big)$ відповідно, $\{\mu, \overline{\mu}\} \subset [\mu_1, \mu_2]$.

Поділивши рівність (6) на $\mu - \overline{\mu}$, одержимо

$$\frac{\tilde{\Omega}}{\mu - \overline{\mu}} = -\sum_{k=1}^{l} \Omega_k^0(p, \varphi, \mu) \frac{\tilde{P}}{\mu - \overline{\mu}} \Omega_l^{k-1}(p, \varphi, \overline{\mu}). \tag{7}$$

Ряд

$$S_1 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial p_{qj}\big(\varphi_{k+p-1}(\varphi, \mu), \mu\big)}{\partial \mu} \omega_{ljr}^{k-1}(\varphi)$$

збігається рівномірно відносно μ. Дійсно,

$$|S_1| \leq \sum_{j=1}^{\infty} M\left\{\sum_{s=1}^{m} N_{k+p-1}\left|\frac{\partial p_{qj}\big(\varphi_{k+p-1}(\varphi, \mu), \mu\big)}{\partial \varphi_{k+p-1}^s(\varphi, \mu)}\right| + \right.$$

$$\left. + \left|\frac{\partial p_{qj}(\varphi, \mu)}{\partial \mu}\right|_{\varphi = \varphi_{k+p-1}(\varphi, \mu)}\right|\right\} \leq mMP^* N_{k+p-1} + MP^*.$$

Тоді ряд $\sum_{q=1}^{\infty} \omega_{ksq}^0(\varphi) S_1$ збігається рівномірно відносно μ:

$$\sum_{q=1}^{\infty} \left| \omega_{ksq}^{0}(\varphi) S_1 \right| \leq \left(mMP^* N_{k+p-1} + MP^* \right) M\lambda^k,$$

що дозволяє в (7) поелементно перейти до границі при $\overline{\mu} \to \mu$ і виписати рівність

$$\frac{\partial \Omega_l^0(p,\varphi,\mu)}{\partial \mu} = -\sum_{k=1}^{l} \Omega_k^0(p,\varphi,\mu) \frac{\partial P\left(\varphi_{k+p-1}(\varphi,\mu),\mu\right)}{\partial \mu} \Omega_l^{k-1}(p,\varphi,\mu).$$

Лему 2 доведено.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови леми* 2, $\lambda(1+mA^*) < 1$, $c(\varphi,\mu) \in C^1(\varphi,\mu)$, *причому для всіх* $\mu \in [\mu_1,\mu_2]$, $\varphi \in \mathcal{T}_m$, $i = \overline{1,m}$, *мають місце нерівності*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \max_{\varphi,\mu} \left| c_j(\varphi,\mu) \right| \leq C^*, \qquad \max\left\{ \left\| \frac{\partial c(\varphi,\mu)}{\partial \varphi^i} \right\|, \left\| \frac{\partial c(\varphi,\mu)}{\partial \mu} \right\| \right\} \leq C_*,$$

де C^* *та* C_* — *додатні сталі, що не залежать від* φ, μ, i.

Тоді при будь-яких $p \geq 0$, $g \geq 0$, $\mu \in [\mu_1,\mu_2]$ *функція* $u(p,g,\mu,\varphi) \in C^1(\varphi,\mu)$.

Доведення. Легко переконатися, що при всіх $n \geq 0$ має місце оцінка

$$\left\| \frac{\partial \varphi_n(\varphi,\mu)}{\partial \mu} \right\| \leq \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \right\| (1+mA^*)^n + A^* \sum_{j=0}^{n-1} (1+mA^*)^j \leq \frac{(1+mA^*)^n}{m}.$$

За аналогією з доведенням теореми 1 покажемо, що справджується рівність

$$\frac{\partial u_s}{\partial \mu} = -\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\omega_{lsj}^0(\varphi) c_j\left(\varphi_{l+g}(\varphi,\mu),\mu\right) \right). \tag{8}$$

Оскільки

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \left(\omega_{lsj}^0(\varphi) c_j\left(\varphi_{l+g}(\varphi,\mu),\mu\right) \right) = \frac{\partial \omega_{lsj}^0(\varphi)}{\partial \mu} c_j\left(\varphi_{l+g}(\varphi,\mu),\mu\right) +$$

$$+ \omega_{lsj}^0(\varphi) \left\{ \sum_{r=1}^{m} \frac{\partial c_j\left(\varphi_{l+g}(\varphi,\mu),\mu\right)}{\partial \varphi_{l+g}^r(\varphi,\mu)} \frac{\partial \varphi_{l+g}^r(\varphi,\mu)}{\partial \mu} + \left. \frac{\partial c_j(\varphi,\mu)}{\partial \mu} \right|_{\varphi = \varphi_{l+g}(\varphi,\mu)} \right\},$$

то

$$I_1(l,\varphi,s) = \sum_{j=1}^{\infty} \left| \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\omega_{lsj}^0(\varphi) c_j\left(\varphi_{l+g}(\varphi,\mu),\mu\right) \right) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \left| c_j\left(\varphi_{l+g}(\varphi,\mu),\mu\right) \right| \sum_{k=1}^{l} M^2 \lambda^{l+1} \left(\sum_{\nu=1}^{m} P^* \left| \frac{\partial \varphi_{k+p-1}^{\nu}(\varphi,\mu)}{\partial \mu} \right| + P^* \right) + \right.$$

$$\left. + \left| \omega_{lsj}^0(\varphi) \right| \left(mC_* \frac{(1+mA^*)^{l+g}}{m} + C_* \right) \right\} \leq$$

$$\leq C^* M^2 P^* \sum_{k=1}^{l} \lambda^{l+1} \left[1 + (1+mA^*)^{k+p-1} \right] + MC_* \lambda^l \left[1 + (1+mA^*)^{l+g} \right],$$

що означає рівномірну відносно μ і $s = 1, 2, 3, \ldots$ збіжність внутрішнього ряду в (8). Покажемо тепер, що і зовнішній ряд у цьому виразі збігається рівномірно по μ і $s = 1, 2, 3, \ldots$.

Дійсно,

$$\sum_{j=1}^{\infty} I_1(l, \varphi, s) \le C^* M^2 P^* \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{l} \lambda^{l+1} + (1+mA^*)^{p-1} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{l} \lambda^{l+1} \times \right.$$

$$\left. \times (1+mA^*)^k \right\} + C_* M \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} \lambda^l + (1+mA^*)^g \sum_{l=1}^{\infty} \left(\lambda(1+mA^*)\right)^l \right\} \le$$

$$\le C^* M^2 P^* \left\{ S^* + \frac{\lambda^2 (1+mA^*)^p}{(1-\lambda)\left[1-\lambda(1+mA^*)\right]} \right\} + \lambda C_* M \left\{ \frac{1}{1-\lambda} + \frac{(1+mA^*)^{g+1}}{1-\lambda(1+mA^*)} \right\},$$

де через S^* позначено суму збіжного ряду $\sum_{l=1}^{\infty} l\lambda^{l+1}$. Звідси випливає, що рівність (8), а з нею і теорему 2, доведено.

Наслідок 2. *Нехай функція* $a(\varphi, \mu)$ *не залежить від* μ, *тобто* $a(\varphi, \mu) = a(\varphi)$, *і для всіх* $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$, $\varphi \in \mathcal{T}_m$ *виконуються умови*:

1) *має місце нерівність* (3), *в якій норму* $\|\cdot\|$ *замінено нормою* $\|\cdot\|_\mu$;

2) *елементи матриці* $P^{-1}(\varphi, \mu)$ *неперервні по* μ *і* $\left\|P^{-1}(\varphi, \mu)\right\|_\mu \le P_1$;

3) $P(\varphi, \mu) \in C_*^1(\mu)$, $c(\varphi, \mu) \in C^1(\mu)$, *причому*

$$\left\| \frac{\partial P(\varphi, \mu)}{\partial \mu} \right\|_\mu \le P^*, \quad \left\| \frac{\partial c(\varphi, \mu)}{\partial \mu} \right\| \le C_*, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \max_{\mu} \left| c_j(\varphi, \mu) \right| \le C^*,$$

де P^*, C^*, C_* — *додатні сталі, що не залежать від* φ, μ.

Тоді при будь-яких $\{p, g\} \subset Z$, $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$ *функція* $u(p, g, \mu, \varphi) \in C^1(\mu)$.

Доведення проводиться аналогічно доведенню леми 2 та теореми 2 з урахуванням того, що при всіх $n \in Z$ $\partial\varphi_n(\varphi) / \partial\mu = 0$. Тоді

$$|S_1| \le MP^*, \quad \sum_{q=1}^{\infty} \left| \omega_{ksq}^0(\varphi) S_1 \right| \le M^2 P^* \lambda^k,$$

$$I_1(l, \varphi, s) \le C^* M^2 P^* l \lambda^{l+1} + MC_* \lambda^l, \quad \sum_{l=1}^{\infty} I_1(l, \varphi, s) \le C^* N^2 P^* S^* + \frac{NC_*\lambda}{1-\alpha}.$$

Наслідок 3. *Нехай функція* $a(\varphi, \mu) = \omega$, *де* ω — *сталий вектор, і при всіх* $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$, $\varphi \in \mathcal{T}_m$ $P(\varphi, \mu) \in C_*^1(\varphi, \mu)$, $c(\varphi, \mu) \in C^1(\varphi, \mu)$, *елементи матриці* $P^{-1}(\varphi, \mu)$ *неперервні за сукупністю змінних* φ, μ, *причому* $\left\|P^{-1}(\varphi, \mu)\right\|_{\varphi\mu} \le P_1$,

$$\max \left\{ \left\| \frac{\partial P(\varphi, \mu)}{\partial \mu} \right\|_\mu, \left\| \frac{\partial P(\varphi, \mu)}{\partial \varphi^i} \right\|_\varphi, \left\| \frac{\partial c(\varphi, \mu)}{\partial \mu} \right\|, \left\| \frac{\partial c(\varphi, \mu)}{\partial \varphi^i} \right\| \right\} \le C$$

і $\sum_{j=1}^{\infty} \max_{\varphi, \mu} \left| c_j(\varphi, \mu) \right| \le C^*$, *де* C^*, C — *додатні сталі, що не залежать від* φ, μ *та* $i = \overline{1, m}$.

Тоді при будь-яких $\{p, g\} \subset Z$, $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$ *функція* $u(p, g, \mu, \varphi) \in \in C^1(\varphi, \mu)$.

Зауваження 2. Одержані вище результати є новими і для скінченновимірних систем різницевих рівнянь. Використовуючи їх, можна досліджувати питання належності функції $u(p, g, \mu, \varphi)$ простору $C^l(\varphi, \mu)$ при $l \geq 2$.

1. *Самойленко А. М., Теплинский Ю. В.* О приводимости счетных систем линейных разностных уравнений // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 11. – С. 1533 – 1541.
2. *Теплинский Ю. В., Самойленко М. В.* О периодических решениях счетных систем линейных и квазилинейных разностных уравнений с периодическими коэффициентами // Там же. – 1996. – **48**, № 8. – С. 1144 – 1152.
3. *Самойленко А. М., Мартынюк Д. И., Перестюк Н. А.* Приводимость нелинейных почтипериодических систем разностных уравнений, заданных на бесконечномерном торе // Там же. – 1994. – **46**, № 9. – С. 1216 – 1223.
4. *Самойленко А. М., Теплинский Ю. В.* Инвариантные торы линейных счетных систем дискретных уравнений, заданных на бесконечномерном торе // Там же. – 1998. – **50**, № 2. – С. 244 – 251.
5. *Мартинюк Д. І., Верьовкіна Г. В.* Інваріантні множини зліченних систем різницевих рівнянь // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. фіз-мат. наук. – 1997. – Вип. 1. – С. 117 – 127.
6. *Верьовкіна Г. В.* Про введення локальних координат для зліченної дискретної системи в околі інваріантного тора // Там же. – Вип. 4. – С. 23 – 29.
7. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Исследования дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. – Киев: Наук. думка, 1990. – 272 с.
8. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Мартынюк Д. И.* Системы эволюционных уравнений с периодическими коэффициентами. – Киев: Наук. думка, 1984. – 214 с.
9. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. – М.: Наука, 1987. – 302 с.
10. *Самойленко А. М., Теплинский Ю. В.* Счетные системы дифференциальных уравнений. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1993. – 308 с.
11. *Самойленко А. М., Теплинский Ю. В.* О гладкости инвариантного тора счетного линейного расширения динамической системы на *m*-мерном торе // Дифференц. уравнения. – 1994. – **30**, № 5. – С. 781 – 790.

Одержано 15.06.2000,
після доопрацювання — 09.10.2000