УДК 570.53

Р. Ф. Шамоян (Брянск. пед. ун-т, Россия)

ОБОБЩЕННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ХАРДИ И ОПЕРАТОРЫ ТЕПЛИЦА В ПРОСТРАНСТВАХ ТИПА BMOA*

We study the effect of the generalized Hardy transformation in BMOA classes in a half-disk and present a criterion of boundedness of the Toeplitz operators acting in the BMOA-type space in the unit disk.

Вивчено дію узагальненого зображення Харді у класах BMOA в полікрузі та наведено критерій обмеженості операторів Тепліца, що діють у просторі типу BMOA в одиничному крузі.

Введение. Возрастающее значение пространств BMO или их аналитических подпространств в единичном круге (определения см. ниже) в теории пространств Харди и ее различных приложениях известно [1, 2]. В последнее время появились работы [3 – 8], в которых вводятся тем или иным способом и изучаются многомерные аналоги этих классов в единичном шаре $\mathbb{B}^n$ или в поликруге $\mathbb{D}^n$ комплексного пространства $\mathbb{C}^n$. Целью данной работы является изучение действия обобщенного преобразования Харди в поликруге и операторов Теплица в единичном круге в пространствах типа BMOA. Введем необходимые нам в дальнейшем обозначения: $\mathbb{D}^n = \left\{z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n,\ \left|z_j\right| < 1,\ j = 1, \ldots, n\right\}$ — единичный поликруг n-мерного комплексного пространства $\mathbb{C}^n$; $\mathbb{T}^n = \{z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n,\ \left|z_j\right| = 1,\ j = 1, \ldots, n\}$ — его остов; $H\left(\mathbb{D}^n\right)$ — множество всех голоморфных в $\mathbb{D}^n$ функций;

$$|z-\xi|^{\gamma} = \prod_{k=1}^{n} |z_k - \xi_k|^{\gamma}, \quad \gamma \in R, \quad \xi, z \in \mathbb{C}^n, \quad z_k \neq \xi_k, \quad k = 1, \ldots, n,$$

$m_{2n}(w)$ — $2n$-мерная мера Лебега на $\mathbb{D}^n$, $dm_n(\xi)$ — n-мерная мера Лебега на $\mathbb{T}^n$;

$$Z_+^n = Z_+ \times \ldots \times Z_+, \quad Z_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad \tilde{Z}_+^n = \left\{(k_1, \ldots, k_n),\ k_j \neq 0,\ j = 1, \ldots, n\right\};$$

$$rz = (r_1 z_1, \ldots, r_n z_n), \quad z \in \mathbb{C}^n, \quad r \in I^n, \quad I = [0, 1];$$

$$M_p^p(f, r) = \int_{\mathbb{T}^n} |f(r\xi)|^p \, dm_n(\xi), \quad 0 < p < \infty.$$

Каждой функции f, $f \in H\left(\mathbb{D}^n\right)$, $f(z) = \sum_{|k| \geq 0} a_k z^k$ сопоставим две функции: $\left(\mathfrak{D}^m f\right)(z)$ и $\left(D^m f\right)(z)$ — операторы дробного дифференцирования,

$$(\mathfrak{D} f)(z) = \frac{\partial^n (z_1 \ldots z_n f(z))}{\partial z_1 \ldots \partial z_n}, \quad \mathfrak{D}^m f = \mathfrak{D}^{m-1}(\mathfrak{D} f), \quad m \in \mathbb{N},$$

$$\left(D^m f\right)(z) = \sum_{|k| \geq 0} \frac{\Gamma(m+k+1)}{\Gamma(m+1)\Gamma(k+1)} a_k z^k, \quad m \geq 1,$$

$$\Gamma(m+k+1) = \prod_{j=1}^{n} \Gamma(k_j + m + 1).$$

Легко видеть, что $\left(\mathbb{D}^m f\right)(z)$ и $\left(\mathfrak{D}^m f\right)(z) \in H\left(\mathbb{D}^n\right)$, если $f \in H\left(\mathbb{D}^n\right)$.

---

* Выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 01-01-00992).

Пусть, далее, $A_\alpha^p(\mathbb{D}^n)$, $0 < p < \infty$, $-1 < \alpha < \infty$, и $H^p(\mathbb{D}^n)$, $0 < p < \infty$, — пространства Бергмана – Джрбашяна и Харди соответственно в поликруге $\mathbb{D}^n$ [2]. В дальнейшем нам понадобится также оператор $\mathcal{D}^{-1}: H(\mathbb{D}^n) \to H(\mathbb{D}^n)$, $(\mathcal{D}^{-1} f)(z) = \sum_{k_1, \ldots, k_n \geq 0} c_{k_1, \ldots, k_n} z_1^{k_1} \ldots z_n^{k_n}$, где $c_{k_1, \ldots, k_n} = a_{k_1, \ldots, k_n} (k_1 \ldots k_n)^{-1}$ при $k \in \tilde{Z}_+^n$ и $c_{k_1, \ldots, k_n} = 0$ при $k \notin \tilde{Z}_+^n$ для $f(z) = \sum_{|k| \geq 0} a_k z^k$. Введем классы BMOA в поликруге $\mathbb{D}^n$:

$$\mathrm{BMOA}_s(\mathbb{D}^n) = \left\{ f \in H^s(\mathbb{D}^n) : \| f \|_{\mathrm{BMOA}_s} = \right.$$

$$\left. = \sup_{z \in \mathbb{D}^n} \left(\int_{\mathbb{T}^n} | f(\xi) - f(z) |^s \prod_{k=1}^n \frac{(1 - |z_k|^2)}{|1 - \xi_k \bar{z}_k|^2} \, dm_n(\xi) \right)^{1/s} < \infty, \ 1 \leq s < \infty \right\}.$$

При $n = 1$ $\| f \|_{\mathrm{BMOA}}$ — известная норма BMOA (норма Гарсиа) [1, 5]. В первой части работы в терминах функции g, $g(z) \in H(\mathbb{D}^n)$, $g(z) = \sum_{k_1, \ldots, k_n \geq 0} c_k z^k$, мы описываем последовательности $\{(c_k)_{k \in Z_+^n}\}$ такие, что для любой функции f, $f \in A_\alpha^p(\mathbb{D}^n)$ или $f \in H^p(\mathbb{D}^n)$ функция

$$(T_g f)(z) = F(z) = \sum_{k_1, \ldots, k_n \geq 1} b_k z^k,$$

$$b_{k_1, \ldots, k_n} = \frac{\left(\widehat{(f * g) \cdot G} \right)(k_1, \ldots, k_n)}{k_1 \ldots k_n}, \quad k_j \geq 1, \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$G(z) = \sum_{k_1, \ldots, k_n \geq 0} z_1^{k_1} \ldots z_n^{k_n}, \quad z_k \in \mathbb{D}, \quad k = 1, \ldots, n,$$

принадлежит BMOA_s, где $\hat{f}(k)$, $k \in Z_+^n$, — коэффициент Тейлора функции f, $f \in H(\mathbb{D}^n)$;

$$(f * g)(r^2 \xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T^n} f(rt) g(r \bar{t} \xi) \, dm_n(\xi), \quad r \in I^n, \quad \xi \in T^n.$$

Легко видеть, что при $n = 1$

$$b_k = \frac{\sum_{m=0}^k a_m c_m}{k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Отметим также, что при $n = 1$, $c_k = 1$ задача об инвариантности различных функциональных пространств относительно преобразования T (преобразования Харди) известна [9, 10].

Теорема 1. *Пусть*

$$-1 < \alpha < \infty, \quad 0 < p < 1, \quad g \in H(\mathbb{D}^n), \quad g(z) = \sum_{|k| \geq 0} c_k z^k.$$

Тогда:

1) *оператор* T_g *действует ограниченно из* $H^p(\mathbb{D}^n)$ *в* $BMOA_s(\mathbb{D}^n)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\sup_{w\in\mathbb{D}^n}\left\|\int_{\mathbb{T}^n}\left(\frac{\mathbb{D}^m g_w(r\xi)}{1-r\xi}\right)D^{-1}\left(\frac{1}{1-r\bar{\xi}t}\right)dm_n(\xi)\right\|_{\mathrm{BMOA}_s(\mathbb{D}^n)}(1-|w|)^{m+1-1/p}<\infty \quad (1)$$

при

$$m>\frac{1}{p}-1,\quad m\in\mathbb{N};\quad g_w(z)=g(wz),\quad wz=(w_1z_1,\ldots,w_nz_n);$$

2) *оператор* T_g *действует ограниченно из* $A^p_\alpha(\mathbb{D}^n)$ *в* $BMOA_s(\mathbb{D}^n)$, $0<p\le 1$, *тогда и только тогда, когда*

$$\sup_{w\in\mathbb{D}^n}\left\|\int_{\mathbb{T}^n}\left(\frac{\mathbb{D}^m g_w(r\xi)}{1-r\xi}\right)D^{-1}\left(\frac{1}{1-r\bar{\xi}t}\right)dm_n(\xi)\right\|_{\mathrm{BMOA}_s(\mathbb{D}^n)}(1-|w|)^{m+1-(\alpha+2)/p}<\infty, \quad (2)$$

где $m>(\alpha+2)/p-1$, $m\in\mathbb{N}$.

Введем далее пространства типа BMOA в единичном круге $\mathbb{D}$:

$$\mathbb{D}=\{z:|z|<1\};$$

$$\mathrm{BMOA}_{s,q}(\mathbb{D})=\Bigg\{f\in H^s(\mathbb{D}):\|f\|_{\mathrm{BMOA}_{s,q}}=$$

$$=\sup_{z\in\mathbb{D}}\left(\int_T\frac{|f(\xi)-f(z)|^s}{|1-\xi\bar{z}|^q}\,dm(\xi)\left(1-|z|^2\right)\right)^{1/s},\quad 0<q<\infty,\quad 1<s<\infty\Bigg\};$$

$$\mathrm{BMOA}^p_s(\mathbb{D})=\Bigg\{f\in H^s(\mathbb{D}):\|f\|_{\mathrm{BMOA}^p_s}=$$

$$=\sup_{z\in\mathbb{D}}\left(\int_T\frac{|f(\xi)-f(z)|^s}{|1-\xi\bar{z}|^2}\,dm(\xi)\left(1-|z|^2\right)^p\right)^{1/s},\quad 0<p<\infty,\quad 1<s<\infty\Bigg\}.$$

Легко видеть, что величины, определяющие „норму" в этих пространствах, при частных значениях параметров совпадают с известной нормой Гарсиа в BMOA [5].

Следующий результат касается ограниченности известных операторов Теплица $T_{\bar{\varphi}}$ [2, 11]:

$$\left(T_{\bar{\varphi}}f\right)(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_T\frac{\overline{\varphi(t)}\,f(t)}{1-z\bar{t}}\,dm(t),\quad \varphi\in H^1(T),$$

действующих из „аналитических" классов Бесова $B^l_s(\mathbb{D})$ [11] в пространства $\mathrm{BMOA}_{s,q}(\mathbb{D})$ и $\mathrm{BMOA}^p_s(\mathbb{D})$. Операторы Теплица исследовались в работах многих авторов [2, 11]. В пространствах BMOA операторы Теплица и Ганкеля изучались в [12 – 14].

Напомним, что [11]

$$B^l_s(\mathbb{D})=\Bigg\{f\in H(\mathbb{D}):\|f\|^s_{B^l_s(\mathbb{D})}=$$

$$=\int_0^1\int_T(1-r)^{(k-l)s-1}\left|D^k f(r\xi)\right|^s r\,dr\,dm(\xi),\ k\in\mathbb{N},k>l>0,\ s\in(0,\infty)\Bigg\}.$$

Теорема 2. 1. *Пусть* $0 < s < 1$, $2 - s < q < 1 + s$. *Тогда оператор Теплица* $T_{\overline{\varphi}}$ *является ограниченным оператором из* $B_s^{(q-1)/s}(\mathbb{D})$ *в* $BMOA_{s,q}(\mathbb{D})$ *тогда и только тогда, когда* $\varphi \in H^\infty(\mathbb{D})$.

2. *Пусть* $0 < s < 1/2$, $1 - s < q < 1 + s$. *Тогда оператор Теплица* $T_{\overline{\varphi}}$ *является ограниченным оператором из* $B_s^{(2-q)/s}(\mathbb{D})$ *в* $BMOA_s^q(\mathbb{D})$ *тогда и только тогда, когда* $\varphi \in H^\infty(\mathbb{D})$.

1. Вспомогательные утверждения. Для доказательства основных результатов работы нам понадобятся несколько лемм.

Лемма 1. 1. *Пусть* $\alpha > 1$. *Тогда*

$$\int_{T^n} \frac{dm_n(\xi)}{|1 - r\xi|^\alpha} \le \frac{c_\alpha}{(1-r)^{\alpha-1}}$$

и

$$\int_{T^n} \frac{dm_n(\xi)}{|1 - r\xi|^\alpha} \ge \frac{c'_\alpha}{(1-r)^{\alpha-1}}, \quad r \in I^n.$$

2. $\int_{T^n} (1-\rho r)^{-\lambda}(1-\rho)^\beta \, d\rho_1 \ldots d\rho_n = C_{\lambda,\beta}(1-r)^{-\lambda+\beta+1}$, $\beta > -1$, $\lambda > \beta + 1$.

При $n = 1$ эти оценки известны [5].

Общий случай легко сводится к одномерному. Здесь и в дальнейшем через $c, c_1, c_2, c_\lambda, c(p), c(q, \alpha)$ и т. д. мы обозначаем различные положительные константы, зависящие от параметров $\lambda, p, q, \alpha, \ldots$.

Следующая лемма содержит аналоги известной формулы Литтлвуда – Пэли для поликруга $\mathbb{D}^n$.

Лемма 2. 1. *Пусть* $f, g \in H(\mathbb{D}^n)$, $r \in I^n$, $m \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T^n} f(rt) g(r\bar{t}) \, dm_n(t) =$$

$$= \left(\frac{2^{m-1}}{r^2(m-1)!\pi}\right)^n \int_0^r \ldots \int_0^r \int_{T^n} f(R\xi) \overline{\mathfrak{D}^m g(R\xi)} \left(\prod_{k=1}^n \log \frac{r}{R_k}\right) R \, dR \, dm_n(\xi).$$

2. *Пусть* $f, g \in H(\mathbb{D}^n)$, $r \in I$, $m \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$\int_{T^n} f(rt) \overline{g(rt)} \, dm_n(t) =$$

$$= \left(\frac{2^{m-1}}{r^2(m-1)!\pi}\right)^n \int_0^r \ldots \int_0^r \int_{T^n} f(R\xi) \overline{\mathfrak{D}^m g(R\xi)} \left(\prod_{k=1}^n \log \frac{r}{R_k}\right) R \, dR \, dm_n(\xi).$$

Доказательство см. в [8, 16].

Лемма 3. *Если* $F \in H(\mathbb{D}^n)$, $0 < p \le 1$, $-1 < \beta < \infty$, $w, w_1 \in \mathbb{D}^n$, $0 \le q$, $q_1 < < \infty$, *то верна оценка*

$$\left(\int_{\mathbb{D}^n} \frac{|F(z)|(1-|z|)^\beta}{|1 - zw_1|^{q_1} |1 - zw|^q} \, dm_{2n}(z)\right)^p \le C_{p,q,\beta,q_1} \int_{\mathbb{D}^n} \frac{|F(z)|^p (1-|z|)^{(\beta+2)p-2} dm_{2n}(z)}{|1 - zw_1|^{pq_1} |1 - zw|^{qp}}.$$

Доказательство следует из результатов работы [17].

Лемма 4. *Справедливы следующие оценки:*

1) $\int\limits_D \frac{\left(1-|\zeta|^2\right)^s}{\left|1-\bar{\zeta}z\right|^r\left|1-\bar{\zeta}w\right|^v}\,dm_2(\zeta) \le \frac{c_1}{|1-\bar{z}w|^{r+v-s-2}}$, $z, w \in D$, *при* $s > -1$, $r,\ v \ge 0,\ r+v-s > 2,\ r-s < 2,\ v-s < 2$;

2) $\int\limits_T \frac{dm_1(\zeta)}{|1-\zeta z|^s|1-\zeta w|^{q-s}} \le \frac{c_2}{|1-\bar{z}w|^{q-1}}$, $z, w \in D$, *при* $1 < q < 1+s$, $0 < s < 1$;

3) $\int\limits_D \frac{\left(1-|\zeta|^2\right)^s}{\left|1-\bar{\zeta}z\right|^r\left|1-\bar{\zeta}w\right|^v}\,dm_2(\zeta) \le \frac{c_3}{\left(1-|z|^2\right)^{r-s-2}|1-\bar{z}w|^v}$, $z, w \in D$, *при* $s > -1$, $r, v \ge 0$, $r+v-s > 2$, $v-s < 2 < r-s$;

4) $\int\limits_T \frac{dm_1(\zeta)}{|1-\zeta z|^s|1-\zeta w|^{q-s}} \le c_4\,\frac{(1-|w|)^{s+1-q}}{|1-z\bar{w}|^s}$, $z, w \in D$, *при* $1+2s < q < \infty$, $0 < s < 1$.

Доказательство. 1 см. в [5].

2. В силу известного неравенства $\|f\|_{H^s(D)} \le c_5\|f'\|_{A^s_{s-1}(D)}$, $s \in (0, 1]$, $f' \in A^s_{s-1}(D)$ (см. [16]) имеем

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|f_{z,w}(e^{it})\right|^s dt = \left\|f_{z,w}(\mathrm{Re}^{it})\right\|_{H^s} \le c_6\left\|f'_{z,w}(\mathrm{Re}^{it})\right\|_{A^s_{s-1}(D)},\quad 0<s<1,$$

где

$$f_{z,w}(\mathrm{Re}^{it}) = \frac{(1-\bar{z}w)^{(q-1)/s}}{\left(1-Rze^{it}\right)\left(1-Rwe^{it}\right)^{(q-s)/s}},$$

$$A^s_{s-1}(D) = \left\{f \in H(D)\colon \|f\|^s_{A^s_{s-1}} = \int\limits_D |f(z)|^s(1-|z|)^{s-1}\,dm_2(z) < \infty,\ s\in(0,\infty)\right\}.$$

Поэтому достаточно показать, что $\left\|f'_{z,w}(\mathrm{Re}^{it})\right\|_{A^s_{s-1}} < \infty$, $z, w \in D$. Имеем

$$\left\|f'_{z,w}(\mathrm{Re}^{it})\right\|_{A^s_{s-1}(D)} \le c_1'\left(|1-\bar{z}w|^{q-1}\int\limits_D \frac{(1-R)^{s-1}\,dm(t)\,R\,dR}{\left|1-\mathrm{Re}^{it}z\right|^{2s}\left|1-\mathrm{Re}^{it}w\right|^{q-s}}\right)^{1/s} +$$

$$+\ c_2'\left(|1-\bar{z}w|^{q-1}\int\limits_D \frac{(1-R)^{s-1}\,dm(t)\,R\,dR}{\left|1-\mathrm{Re}^{it}z\right|^{s}\left|1-\mathrm{Re}^{it}w\right|^{q}}\right)^{1/s} \le$$

$$\le c_3'\left(\frac{|1-\bar{z}w|^{q-1}}{|1-\bar{z}w|^{q-1}}\right)^{1/s} < \infty,$$

где в предпоследнем неравенстве мы воспользовались оценкой из п. 1.

3. См. [5].

4. Имеем

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|g_{z,w}(e^{it})\right|^s dt = \left\|g_{z,w}(\mathrm{Re}^{it})\right\|_{H^s} \le c_4'\left\|g'_{z,w}(\mathrm{Re}^{it})\right\|_{A^s_{s-1}(D)},\quad s\in(0,1),$$

где

$$g_{z,w}(\mathrm{Re}^{it}) = \frac{|1-z\overline{w}|}{(1-|w|)^{1+(1-q)/s}\left|1-z\mathrm{Re}^{it}\right|\left|1-w\mathrm{Re}^{it}\right|^{(q-s)/s}}, \quad s\in(0,1).$$

Покажем, что $\left\|g'_{z,w}(\mathrm{Re}^{it})\right\|_{A^s_{s-1}(D)}<\infty$. Легко видеть, что

$$\left\|g'_{z,w}(\mathrm{Re}^{it})\right\|_{A^s_{s-1}(D)} \le c'_5\left(\frac{|1-\bar{z}w|^s}{(1-|w|)^{s+1-q}}\int_D\frac{(1-R)^{s-1}\,dm(t)\,R\,dR}{\left|1-\mathrm{Re}^{it}z\right|^{2s}\left|1-\mathrm{Re}^{it}w\right|^{q-s}}\right)^{1/s} +$$

$$+ c'_6\left(\frac{|1-\bar{z}w|^s}{(1-|w|)^{s+1-q}}\int_D\frac{(1-R)^{s-1}\,dm(t)\,R\,dR}{\left|1-\mathrm{Re}^{it}z\right|^{s}\left|1-\mathrm{Re}^{it}w\right|^{q}}\right)^{1/s}.$$

Далее, используя оценку из п. 3 и неравенство $|1-\bar{z}w|^{-2s}\le(1-|w|)^{-s}|1-z\overline{w}|^{-s}$, $s>0$, окончательно выводим

$$\left\|g'_{z,w}(\mathrm{Re}^{it})\right\|_{A^s_{s-1}(D)} \le c'_7\left(\frac{|1-\bar{z}w|^s(1-|w|)^{2s+1-q}}{(1-|w|)^{s+1-q}|1-\bar{z}w|^{2s}}\right)^{1/s} +$$

$$+ c'_8\left(\frac{|1-\bar{z}w|^s(1-|w|)^{s+1-q}}{(1-|w|)^{s+1-q}|1-\bar{z}w|^{s}}\right)^{1/s} < \infty.$$

Лемма 4 доказана.

2. Доказательства теорем. ***Доказательство теоремы* 1.** Докажем сначала, что условие (1) является достаточным для ограниченности оператора T_g, действующего из $H^p(\mathbb{D}^n)$ в $\mathrm{BMOA}_s(\mathbb{D})^n$, $0<p<1$, $1\le s<\infty$.

Имеем

$$h(z) = (T_g f)(z) = \int_{T^n}\left[\left(\int_{T^n} g(\xi r\overline{\varphi})\,f(\varphi)\,dm_n(\varphi)\right)\frac{1}{1-r\xi}\right]\left(\sum_{k_1,\ldots,k_n\ge0}c_k\left(r\overline{\xi}t\right)^k\right)dm_n(\xi),$$

$$\left(r\overline{\xi}t\right)^k = \prod_{j=1}^n\left(r\overline{\xi}_jt_j\right)^k, \quad z=(z_1,\ldots,z_n), \quad z_j=r_j^2t_j, \quad t_j\in T, \quad r_j\in I, \quad j=1,\ldots,n;$$

$$c_{k_1,\ldots,k_n} = 0, \quad k\notin\tilde{Z}^n_+; \qquad c_{k_1k_n} = \frac{1}{k_1\ldots k_n}, \quad k\in\tilde{Z}^n_+.$$

Покажем справедливость неравенства

$$\sup_{w\in\mathbb{D}^n}\left(\int_{T^n}|h(t)-h(w)|^s\frac{\left(1-|w|^2\right)}{|1-\overline{w}t|^2}\,dm_n(t)\right)^{1/s} < \infty, \quad 1\le s<\infty.$$

Используя лемму 2, выводим $\left(t\in T^n,\ t=\left(e^{i\bar{t}_1},\ldots,e^{i\bar{t}_n}\right),\ R\in I\right)$

$$h_{R^2}(t) = h\left(R^2e^{i\bar{t}_1},\ldots,R^2e^{i\bar{t}_n}\right) =$$

$$= \int_{T^n}\left[\int_{T^n}g_\xi(R\overline{\varphi})\,f(R\varphi)\,dm_n(\varphi)\frac{1}{1-\xi R^2}\right]\Phi\left(\overline{\xi}t\right)dm_n(\xi) =$$

$$= \int\limits_{T^n} \left[c(m,n) R^{-2mn} \int\limits_0^R \ldots \int\limits_0^R \int\limits_{T^n} D^m g_\xi\left(\bar{\tilde{w}}\right) f\left(\bar{\tilde{w}}\right) \times \right.$$

$$\left. \times \prod_{l=1}^n \left(R^2 - \tilde{R}_l^2\right)^{m-1} \tilde{R}\, d\tilde{R}\, dm_n(\tilde{\tau}) \frac{1}{1-R^2\xi} \right] \Phi\left(\bar{\xi} t\right) dm_n(\xi), \qquad (3)$$

$$\Phi\left(\bar{\xi}\right) = \sum_{k_1,\ldots,k_n \ge 0} c_k \left(\bar{\xi} t\right)^k, \quad \tilde{w} \in \mathbb{D}^n, \quad \tilde{w} = (\tilde{w}_1, \ldots, \tilde{w}_n), \quad \tilde{w}_j = \tilde{R}_j \tilde{\tau}_j, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Аналогично получаем $\left(w = \tau\rho^2\right)$

$$h_{R^2}(w) = h\left(R^2 w\right) = h\left(R^2 \rho_1^2 e^{i\tau_1}, \ldots, R^2 \rho_n^2 e^{i\tau_n}\right) =$$

$$= \int\limits_{T^n} \left[\left(\int\limits_{T^n} g_{\xi\rho}(R\bar{\varphi}) f(R\varphi)\, dm_n(\varphi) \right) \frac{1}{1-R^2\xi\rho} \right] \Phi\left(\rho \bar{\xi} \tau\right) dm_n(\xi) =$$

$$= \int\limits_{T^n} \left[c(m,n) R^{-2mn} \int\limits_0^R \ldots \int\limits_0^R \int\limits_{T^n} D^m g_{\xi\rho}(\tilde{w}) f\left(\bar{\tilde{w}}\right) \times \right.$$

$$\left. \times \prod_{l=1}^n \left(R^2 - \tilde{R}_l^2\right)^{m-1} \tilde{R}_1 \ldots \tilde{R}_n\, d\tilde{R}_1 \ldots d\tilde{R}_n\, dm_n(\tilde{\tau}) \frac{1}{1-R^2\xi\rho} \right] \Phi\left(\rho \bar{\xi} \tau\right) dm_n(\xi), \qquad (4)$$

$$\tau = e\left(e^{i\tau_1}, \ldots, e^{i\tau_n}\right).$$

Следовательно, применяя в (3) и (4) теорему Фубини, имеем $\left(w = \tau\rho^2\right)$

$$\left| h_{R^2}(t) - h_{R^2}(w) \right| = \left| c(m,n) R^{-2mn} \int\limits_0^R \ldots \int\limits_0^R \int\limits_{T^n} \left(f\left(\bar{\tilde{w}}\right) \prod_{l=1}^n \left(R^2 - \tilde{R}_l^2\right)^{m-1} \tilde{R} \right) \times \right.$$

$$\left. \times \left(\int\limits_{T^n} \left[D^m g_\xi(\tilde{w}) \frac{1}{1-R^2\xi} \Phi\left(\bar{\xi} t\right) - D^m g_{\xi\rho}(\tilde{w}) \frac{1}{1-R^2\xi\rho} \Phi\left(\rho\bar{\xi}\tau\right) \right] dm_n(\xi) \right) d\tilde{R}\, dm_n(\tilde{\tau}) \right| \le$$

$$\le c_1(m,n) R^{-2mn} \int\limits_{\mathbb{D}^n} \left| f\left(\bar{\tilde{w}}\right) \right| \prod_{l=1}^n \left(1 - \tilde{R}_l\right)^{m-1} \tilde{R} \times$$

$$\times \left| \int\limits_{T^n} \frac{D^m g(\xi\tilde{w})}{1-R^2\xi} \Phi\left(\bar{\xi} t\right) dm_n(\xi) - \int\limits_{T^n} D^m g(\xi\rho\tilde{w}) \frac{1}{1-R^2\xi\rho} \Phi\left(\rho\bar{\xi}\tau\right) dm_n(\xi) \right| d\tilde{R}\, dm_n(\tilde{\tau}).$$

Переходя к пределу при $R \to 1$ в полученном неравенстве и используя неравенство Минковского, получаем

$$\left(\int\limits_{T^n} |h(t) - h(w)|^s \frac{\left(1 - |w|^2\right)}{|1 - \bar{w} t|^2} dm_n(t) \right)^{1/s} \le c_1(m,n) \int\limits_{\mathbb{D}^n} \left| f\left(\bar{\tilde{w}}\right) \right| \prod_{l=1}^n \left(1 - \tilde{R}_l\right)^{m-1} \tilde{R} \times$$

$$\times \left(\int\limits_{T^n} \left| \int\limits_{T^n} \frac{D^m g(\xi\tilde{w})}{1-\xi} \Phi\left(\bar{\xi} t\right) dm_n(\xi) - \int\limits_{T^n} D^m g(\xi\rho\tilde{w}) \frac{1}{1-\xi\rho} \Phi\left(\rho\bar{\xi}\tau\right) dm_n(\xi) \right|^s \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\left(1-\rho^4\right)}{\left|1 - \rho^2 t \bar{\tau}\right|^2} dm_n(t) \right)^{1/s} d\tilde{R}\, dm_n(\tilde{\tau}), \quad w = \tau\rho^2, \quad \tilde{w} = \tilde{R}\tilde{\tau}.$$

Использовав неравенства $1-\rho^4 \le 2(1-\rho^2)$, $\left|1-\rho^2 t\bar{\tau}\right|^2 \ge |1-\rho t\bar{\tau}|^2$, распишем полученное в скобках выражение:

$$I = \int_{T^n}\left|\int_{T^n}\frac{D^m g(\xi\tilde{w})}{1-\xi}D^{-1}\left(\frac{1}{1-\bar{\xi}t}\right)dm_n(\xi)-\int_{T^n}\frac{D^m g(\xi\rho\tilde{w})}{1-\xi\rho}D^{-1}\left(\frac{1}{1-\rho\bar{\xi}\tau}\right)dm_n(\xi)\right|^s \times$$
$$\times\frac{(1-\rho^2)}{|1-\rho\bar{t}\tau|^2}\,dm_n(t).$$

Нетрудно видеть, что $\sup\limits_{w\in\mathbb{D}^n}(I(w,\tilde{w}))^{1/s}$ — норма BMOA_s для функции

$$(G_{\tilde{w}})(\tilde{\tilde{w}}) = \int_{T^n}\frac{D^m g_{\tilde{w}}\left(|\tilde{\tilde{w}}|\xi\right)}{1-|\tilde{\tilde{w}}|\xi}D^{-1}\left(\frac{1}{1-\bar{\xi}\tilde{\tilde{w}}}\right)dm_n(\xi), \quad \tilde{\tilde{w}}=\tau\rho.$$

Следовательно, окончательно получаем

$$\|h\|_{\mathrm{BMOA}_s(\mathbb{D}^n)} \le c\int_{\mathbb{D}^n}|f(\tilde{w})|\prod_{l=1}^n(1-|\tilde{w}_l|)^{1/p-2}\sup_{\tilde{w}\in\mathbb{D}^n}\|G_{\tilde{w}}\|_{\mathrm{BMOA}_s(\mathbb{D}^n)}\times$$
$$\times\prod_{l=1}^n(1-|\tilde{w}_l|)^{m+1-1/p}|\tilde{w}|d|\tilde{w}|dm_n(\tilde{\tau}) \le c_1\int_{\mathbb{D}^n}|f(\tilde{w})|(1-|\tilde{w}|)^{1/p-2}\,dm_{2n}(\tilde{w}).$$

Остается отметить, что

$$\int_{\mathbb{D}^n}|f(\tilde{w})|(1-|\tilde{w}|)^{1/p-2}\,dm_{2n}(\tilde{w}) \le c_2\|f\|_{H^p(\mathbb{D}^n)}, \quad 0<p<1.$$

Доказательство необходимости условия (1) следует из теоремы о замкнутом графике. Действительно, так как оператор T_g ограниченный, то

$$\left\|(T_g f)(z)\right\|_{\mathrm{BMOA}_s(\mathbb{D}^n)} \le c\|f\|_{H^p(\mathbb{D}^n)}, \quad 0<p<1, \quad 1\le s<\infty,$$

для любой функции $f\in H^p(\mathbb{D}^n)$. Пусть

$$f_w(z) = \frac{1}{(1-wz)^{m+1}}, \quad w\in\mathbb{D}^n.$$

Легко видеть, что из леммы 1 следует

$$\|f_w\|_{H^p} = \sup_{r\in I^n}\left(\int_{T^n}\frac{1}{|1-wz|^{(m+1)p}}\,dm_n(\xi)\right)^{1/p} \le \left(\sup_{r\in I^n}\frac{1}{(1-|w|r)^{(m+1)p-1}}\right)^{1/p}\tilde{c}_1 \le$$
$$\le \tilde{c}_2(1-|w|)^{1/p-m-1}, \quad m>\frac{1}{p}-1, \quad m\in\mathbb{N}, \quad z=r\xi.$$

Следовательно, учитывая, что

$$\left\|(T_g f_w)(z)\right\|_{\mathrm{BMOA}_s(\mathbb{D}^n)} =$$
$$= \left\|\int_{T^n}\left[\left(\int_{T^n}g(\xi r\bar{\varphi})(f_w)(\varphi)\,dm_n(\varphi)\right)\frac{1}{1-r\xi}\right]\left(\sum_{k_1,\ldots,k_n\ge0}c_k\left(r\bar{\xi}t\right)^k\right)dm_n(\xi)\right\|_{\mathrm{BMOA}_s(\mathbb{D}^n)} =$$
$$= \left\|\int_{T^n}\frac{D^m g_w(r\xi)}{1-r\xi}D^{-1}\left(\frac{1}{1-r\bar{\xi}t}\right)dm_n(\xi)\right\|_{\mathrm{BMOA}_s(\mathbb{D}^n)}, \quad z=r^2t.$$

Окончательно получаем

$$\sup_{w\in\mathbb{D}^n}\left\|\int_{T^n}\frac{D^m g_w(r\xi)}{1-r\xi}D^{-1}\left(\frac{1}{1-r\bar{\xi}t}\right)dm_n(\xi)\right\|_{\mathrm{BMOA}_s(\mathbb{D}^n)}(1-|w|)^{m+1-1/p}<\infty.$$

Следовательно, условие (1) выполнено.

Доказательство второй части теоремы 1 проводится аналогично. При доказательстве необходимости условия (2) необходимо учесть, что из оценок леммы 1 следует

$$\|f_w(z)\|_{A^p_\alpha(\mathbb{D}^n)}=\left(\int_{I^n}\int_{T^n}\frac{(1-|z|)^\alpha}{(1-wz)^{(m+1)p}}|z|\,d|z|\,dm_n(\xi)\right)^{1/p}\le$$

$$\le c\left(\int_{I^n}\frac{(1-|z|)^\alpha}{(1-|w||z|)^{(m+1)p-1}}d|z|\right)^{1/p}\le c_1(1-|w|)^{(\alpha+2)/p-m-1},$$

$$m>\frac{\alpha+2}{p}-1,\quad m\in\mathbb{N}.$$

При доказательстве достаточности необходимо вместо оценки

$$\int_{\mathbb{D}^n}|f(w)|(1-|w|)^{1/p-2}dm_{2n}(w)\le c_2\|f\|_{H^p},\quad 0<p<1,\quad f\in H^p(\mathbb{D}^n),$$

использовать неравенство

$$\int_{\mathbb{D}^n}|f(w)|(1-|w|)^{(\alpha+2)/p-2}dm_{2n}(w)\le c_3\|f\|_{A^p_\alpha},$$

$$0<p\le 1,\quad -1<\alpha<\infty,\quad f\in A^p_\alpha(\mathbb{D}^n),$$

которое содержится в лемме 3 при $q=q_1=0$, $\beta=(\alpha+2)/p-2$.

Доказательство теоремы 2. Докажем достаточность условия $\varphi\in H^\infty(\mathbb{D})$.

Пусть $0<R<1$. Тогда нетрудно показать, что

$$\lim_{R\to1}\left(\int_T|F(R\xi)-F(Rw)|^s\frac{(1-|w|^2)}{|1-\bar{w}\xi|^q}dm(\xi)\right)^{1/s}=$$

$$=\left(\int_T|F(\xi)-F(w)|^s\frac{(1-|w|^2)}{|1-\bar{w}\xi|^q}dm(\xi)\right)^{1/s},\quad F\in\mathrm{BMOA}_{s,q}(\mathbb{D}).$$

Поэтому в силу равенств

$$(Tf_R)(w)=F_R(w)=F(Rw)=\frac{1}{2\pi i}\int_T\frac{\overline{\varphi(t)}f(t)}{1-\bar{t}Rw}dm(t),\quad R\in I,\quad w\in\mathbb{D},$$

выводим

$$I=\left(\int_T|F(\xi)-F(w)|^s\frac{(1-|w|)}{|1-\bar{w}\xi|^q}dm(\xi)\right)^{1/s}=$$

$$= \lim_{R\to 1}\left(\int_T |F_R(\xi)-F_R(w)|^s \frac{(1-|w|)}{|1-\overline{w}\xi|^q}\,dm(\xi)\right)^{1/s} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\lim_{R\to 1}\left(\int_T\left|\int_T \frac{\overline{\varphi(t)}\,f(t)}{1-\bar{t}R\xi}\,dm(t)-\int_T \frac{\overline{\varphi(t)}\,f(t)}{1-\bar{t}Rw}\,dm(t)\right|^s \frac{(1-|w|)}{|1-\overline{w}\xi|^q}\,dm(\xi)\right)^{1/s} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\int_T\left|\lim_{R\to 1}\int_T \frac{\overline{\varphi(t)}\,f(t)\,\bar{t}R(\xi-w)}{(1-\bar{t}R\xi)(1-\bar{t}Rw)}\,dm(t)\right|^s \frac{(1-|w|)}{|1-\overline{w}\xi|^q}\,dm(\xi)\right)^{1/s} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\int_T\left|\lim_{R\to 1}\int_T \frac{\overline{\varphi(Rt)\,Rt}\,f(Rt)\,dt}{\left(1-tR\overline{\xi}\right)(1-tR\overline{w})}\right|^s \frac{(1-|w|)\,d\xi}{|1-\overline{w}\xi|^{q-s}}\right)^{1/s}.$$

Используя лемму 2, получаем

$$I \le \frac{c(k)}{2\pi}\left(\int_T\left(\int_{\mathbb{D}} \frac{\left|D^k f(z)\right|(1-|z|)^{k-1}|\varphi(z)|\,dm_2(z)}{\left|1-z\overline{\xi}\right||1-\overline{w}z|}\right)^s \frac{(1-|w|)\,dm(\xi)}{|1-\overline{w}\xi|^{q-s}}\right)^{1/s}.$$

Далее, используя оценку из леммы 3, находим

$$I \le c_1\|\varphi\|_\infty\left(\int_T\int_{\mathbb{D}} \frac{\left|D^k f(z)\right|^s(1-|z|)^{ks+s-2}}{\left|1-z\overline{\xi}\right|^s|1-\overline{w}z|^s}\,\frac{(1-|w|)\,dm(\xi)\,dm_2(z)}{\left|1-\overline{w}\xi\right|^{q-s}}\right)^{1/s}, \quad w\in\mathbb{D},$$

где

$$\|\varphi\|_\infty = \sup_{z\in\mathbb{D}}|\varphi(z)|.$$

Применяя теорему Фубини и лемму 4, имеем

$$I \le c_2\left(\int_{\mathbb{D}}\left|D^k f(z)\right|^s \frac{(1-|z|)^{ks+s-2}}{|1-\overline{w}z|^{q-1+s}}\left(1-|w|^2\right)dm_2(z)\right)^{1/s}.$$

Следовательно,

$$\|F\|_{\mathrm{BMOA}_{s,q}} = \sup_{z\in\mathbb{D}}\left(\int_T |F(\xi)-F(w)|^s \frac{\left(1-|w|^2\right)}{|1-\overline{w}\xi|^q}\,dm(\xi)\right)^{1/s} \le$$

$$\le c_3\left(\int_{\mathbb{D}}\left|D^k f(z)\right|^s(1-|z|)^{sk-q}\,dm_2(z)\right)^{1/s} = c_3\|f\|_{B_s^{(q-1)/s}}.$$

В силу очевидных соотношений имеем

$$\frac{1-|w|^2}{|1-z\overline{w}|^{s+q-1}} \le 2(1-|z||w|)^{2-s-q} \le 2(1-|z|)^{2-s-q}, \quad s+q>2.$$

Докажем теперь, что условие $\varphi\in H^\infty(\mathbb{D})$ является необходимым.

Рассмотрим функцию

$$f_z(z) = \frac{(1-r)^\gamma}{1-rz}, \quad r\in\left(\frac{1}{2},1\right), \quad \gamma>\frac{s+q-2}{s}.$$

Использовав лемму 1, легко установить, что

$$\| f_z(z)\|_{B_s^{(q-1)/s}} \le c_4\left(\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-r)^{\gamma s}(1-|z|)^{sk-q}}{(1-rz)^{(k+1)/s}}\, dm_2(z)\right)^{1/s} \le c_5(1-r)^{(2-q-s)/s+\gamma},$$

$$\gamma > \frac{s+q-2}{s}.$$

Далее имеем

$$T_{\overline{\varphi}}(f_r)(z) = \frac{\varphi(r)\, f_r(z)\, r}{2\pi}.$$

Поэтому

$$\left\| T_{\overline{\varphi}}(f_r)(z)\right\|_{\mathrm{BMOA}_{s,q}} = \frac{|\varphi(r)|\, r}{2\pi}\| f_r(z)\|_{\mathrm{BMOA}_{s,q}} \le$$

$$\le c_6 \| f_r(z)\|_{B_s^{(q-1)/s}} \le c_7(1-r)^{(\gamma s+2-q-s)/s}.$$

Оценим теперь величину $\| f_r(z)\|_{\mathrm{BMOA}_{s,q}}$.

Используя лемму 1, имеем

$$\| f_r(z)\|_{\mathrm{BMOA}_{s,q}} = (1-r)^{\gamma}\sup_{z\in\mathbb{D}}\left(\int_T \left|\frac{1}{1-rz}-\frac{1}{1-r\xi}\right|^s \frac{\left(1-|z|^2\right)}{|1-\bar z\xi|^q}\, dm(\xi)\right)^{1/s} =$$

$$= r(1-r)^{\gamma}\left(\sup_{z\in\mathbb{D}}\int_T \frac{dm(\xi)}{|1-r\xi|^s|1-\xi\bar z|^{q-s}}\frac{1-|z|^2}{|1-rz|^s}\right)^{1/s} \ge$$

$$\ge \frac{1}{2}(1-r)^{\gamma}\sup_{z=r}\left(\int_T \frac{dm(\xi)}{|1-r\xi|^s|1-\xi\bar z|^{q-s}}\frac{1-|z|^2}{|1-rz|^s}\right)^{1/s} =$$

$$= \frac{1}{2}(1-r)^{\gamma}\left(\int_T \frac{dm(\xi)}{|1-r\xi|^q}\frac{\left(1-r^2\right)}{\left(1-r^2\right)^s}\right)^{1/s} \ge c(1-r)^{\gamma+(2-s-q)/s}, \quad q>1.$$

Следовательно, $|\varphi(r)|\le c,\ r\in I$.

Остается заметить, что для установления включения $\varphi\in H^\infty(\mathbb{D})$ достаточно рассмотреть функцию $f_r\left(e^{i\theta}z\right) = (1-r)^{\gamma}\left(1-re^{i\theta}z\right)^{-1}$ и повторить проведенные рассуждения. Первая часть теоремы 2 доказана.

Докажем сначала достаточность включения $\varphi\in H^\infty(\mathbb{D})$. Повторяя рассуждения первой части теоремы 2, выводим неравенство

$$I \le c\left(\int_T\int_{\mathbb{D}} \frac{\left|D^k f(z)\right|^s}{|1-\overline{w}z|^s}\frac{(1-|z|)^{ks+s-2}}{\left|1-z\overline{\xi}\right|^s}\frac{\left(1-|w|^2\right)^q}{|1-\overline{w}\xi|^{2-s}}\, dm(\xi)\, dm_2(z)\right)^{1/s}.$$

Далее из леммы 4 следует оценка

$$\int_T \frac{dm(\xi)}{|1-z\xi|^s|1-\overline{w}\xi|^{2-s}} \le c_1\frac{(1-|w|)^{-1+s}}{|1-\bar z w|^s}, \quad s\in\left(0,\frac{1}{2}\right), \quad z,w\in\mathbb{D}.$$

Следовательно,

$$I \le c_2\left(\int_{\mathbb{D}} \frac{\left|D^k f(z)\right|^s(1-|z|)^{sk+s-2}\left(1-|w|^2\right)^{q-1+s}}{|1-\overline{w}z|^{2s}}\, dm_2(z)\right)^{1/s}.$$

Далее, очевидно, что

$$\frac{\left(1-|w|^2\right)^{q-1+s}}{|1-\overline{w}z|^{2s}} \leq \frac{2(1-|w||z|)^{q-1+s}}{(1-|w||z|)^{2s}} \leq 2(1-|z|)^{q-1-s}$$

при $1-s<q<1+s$.

Поэтому окончательно получаем

$$\left\|T_{\overline{\varphi}}(f)\right\|_{\mathrm{BMOA}_s^q(\mathbb{D})} = c_3\left(\int_{\mathbb{D}}\left|D^k f(z)\right|^s (1-|z|)^{ks+q-3}\, dm_2(z)\right)^{1/s} = c_3\|f\|_{B_s^{(2-q)/s}}.$$

Необходимость условия $\varphi\in H^\infty(\mathbb{D})$ можно доказать так же, как и в первой части теоремы 2. Здесь необходимо воспользоваться неравенствами

$$\|f_r(z)\|_{\mathrm{BMOA}_s^q(\mathbb{D})} \geq c_4(1-r)^{\gamma+(q-1-s)/s}, \quad \gamma > \frac{s+1-q}{s},$$

$$\|f_r(z)\|_{B_s^{(2-q)/s}(\mathbb{D})} \leq c_5(1-r)^{\gamma+(q-1-s)/s}, \quad \gamma<1+s,$$

где

$$f_r(z) = \frac{(1-r)^\gamma}{1-rz}, \quad \gamma > \frac{s+1-q}{s} > 0.$$

Первое из них доказывается так же, как и в первой части доказательства теоремы, второе следует из леммы 1. Теорема 2 доказана.

1. *Гарнет Дж.* Ограниченные аналитические функции. – М.: Мир, 1984.
2. *Шведенко С. В.* Классы Харди и связанные с ними пространства аналитических функций в единичном круге, поликруге и шаре // Итоги науки и техники. Сер. мат. анализ. – 1985. – **23**. – С. 3 – 123.
3. *Fefferman R.* Bounded mean oscillation on the polydisk // Ann. Math. – 1979. – **110**, № 2. – P. 395 – 406.
4. *Axler Sh., Shapiro J.* Putnam's theorems, Alexander's spectral area estimate and VMO // Math. Ann. – 1985. – **271**. – P. 161 – 183.
5. *Ortega J., Fabrega J.* Pointwise multipliers and corona type decomposition in BMOA // Ann. Inst. Fourier. – 1996. – **46**. – P. 111 – 137.
6. *Jevtic M.* On the Carleson measure characterization of BMOA functions on the unit ball // Proc. AMS. – 1992. – **114**, № 2. – P. 379 – 385.
7. *Zhu K.* Multipliers of BMO in the Bergman metric with application to Toeplitz operators // J. Funct. Anal. – 1989. – **87**. – P. 31 – 50.
8. *Shamoyan R. F.* Multipliers of power series, Teoplitz operators and space embeddings // Izv. Nat. Acad. Nauk Armenii. – 1999. – **34**, № 4. – P. 43 – 59.
9. *Голубов Б. И.* Ограниченность оператора Харди и Харди – Литтлвуда в пространствах $\mathrm{Re}H^1$ и BMO // Мат. сб. – 1997. – **188**, № 7. – С. 93 – 106.
10. *Голубов Б. И.* О преобразованиях Харди и Беллмана пространств H' и BMO // Тез. докл. 8-й Сарат. зимн. мат. шк. – 1996. – С. 36 – 37.
11. *Пеллер В. В., Хрущев С. В.* Операторы Ганкеля, наилучшие приближения и стационарные гауссовские процессы // Успехи мат. наук. – 1982. – **37**, № 1. – С. 53 – 124.
12. *Шамоян Ф. А.* Теплицевы операторы в некоторых пространствах голоморфных функций и новая характеристика классов BMOA // Изв. АН АрмССР. – 1987. – № 2. – С. 122 – 132.
13. *Aleksandrov A. B., Peller V. V.* Hankel operators and similarity to a contraction // Int. Math. Res. Notices. – 1996. – № 6. – P. 264 – 275.
14. *Janson S., Petre J., Semmes S.* On the action of Hankel and Toeplitz operators on some function spaces // Duke Math. J. – 1984. – **51**, № 4. – P. 937 – 957.
15. *Shields A. L., Williams D.* Bounded projections, duality and multipliers in spaces of analytic functions // Trans. Amer. Math. Soc. – 1971. – **162**. – P. 287 – 302.
16. *Alexandrov A. B.* Essays on non locally convex Hardy classses. Complex anal. and spectral theory // Lect. Notes. Math. – 1981. – **864**. – P. 1 – 90.
17. *Шамоян Ф. А.* Диагональное отображение и вопросы представления в анизотропных пространствах голоморфных в полидиске функций // Сиб. мат. журн. – 1990. – **31**, № 2. – С. 199 – 215.

Получено 03.11.99