УДК 517.5

Вит. В. Волчков (Донец. ун-т)

АНАЛОГ МОДЕЛИ ПУАНКАРЕ ДЛЯ КВАТЕРНИОННОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

We construct an analog of the Poincaré model for quaternion hyperbolic space.

Побудовано аналог моделі Пуанкаре для кватерніонного гіперболічного простору.

Введение. Пусть M — риманово многообразие с внутренней метрикой d, $I(M)$ — группа изометрий M. Пространство (M, d) называется двухточечно-однородным [1, с. 175], если для любых пар точек $x, y \in M$, $z, w \in M$, удовлетворяющих условию $d(x, y) = d(z, w)$, существует изометрия $\Phi \in I(M)$ такая, что $\Phi(z) = x$, $\Phi(w) = y$. Двухточечно-однородные пространства в компактном случае полностью классифицированы Вангом [2], в некомпактном — Титсом [3]. Из классификации Титса следует (см., например, [1, с. 203]), что некомпактные двухточечно-однородные пространства — это в точности евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, гиперболические пространства $H^n(\mathbb{R})$, $H^n(\mathbb{C})$, $H^n(\mathbb{Q})$ и гиперболическая плоскость Кэли $H^{16}(\mathrm{Cay})$.

В ряде разделов современной математики важное значение имеют различные реализации указанных пространств. Например, хорошо известна ограниченная модель Пуанкаре вещественного гиперболического пространства $H^n(\mathbb{R})$ размерности n (см., например, [4, с. 90]), т. е. реализация $H^n(\mathbb{R})$ в виде открытого единичного шара B^n пространства $\mathbb{R}^n$ с центром в нуле и римановой метрикой $ds^2 = |dx|^2 / \left(1-|x|^2\right)^2$. Аналогично, комплексное гиперболическое пространство $H^n(\mathbb{C})$ вещественной размерности $2n$ является эрмитовым симметрическим пространством некомпактного типа и может быть реализовано в виде единичного шара комплексного евклидова пространства $\mathbb{C}^n$ с метрикой Бергмана

$$ds^2 = \frac{|dz|^2}{1-|z|^2} + \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\bar{z}_i z_k\, dz_i\, d\bar{z}_k}{\left(1-|z|^2\right)^2} \tag{1}$$

(см. [5], а также [6, с. 380]).

Эти реализации имеют важное значение во многих приложениях, в частности, в различных задачах интегральной геометрии на указанных пространствах [1]. В связи с этим большой интерес представляет построение удобных моделей для других двухточечно-однородных пространств.

В данной работе построен аналог Пуанкаре для кватернионного гиперболического пространства $H^n(\mathbb{Q})$ вещественной размерности $4n$. Полученная реализация и методика, предложенная в работах [7 – 11], дают возможность исследовать различные проблемы о шаровых и сферических средних на пространстве $H^n(\mathbb{Q})$. Перечислим основные из этих проблем (см. обзоры [12 – 14] с обширной библиографией, а также [7 – 11]): описание функций с нулевыми шаровыми средними; получение локальных теорем о двух радиусах, а также теорем единственности для функций, периодических в среднем; построение явной конструкции обращения преобразования Помпейю и т. д.

1. Формулировка основного результата. Пусть $n \geq 2$, Q^n — n-мерное левое кватернионное евклидово пространство (см., например, [15, с. 42]) со скалярным произведением $\langle a, b \rangle = \sum_{k=1}^{n} a_k \bar{b}_k$, где $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Q}^n$ и $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{Q}^n$. Положим $a_k = \alpha_k + \alpha_{n+k} j$, $b_k = \beta_k + \beta_{n+k} j$, где $\alpha_k, \alpha_{n+k},$

β_k, $\beta_{n+k}\in\mathbb{C}$, $1\le k\le n$, и отождествим $\mathbb{Q}^n$ с $2n$-мерным комплексным евклидовым пространством $\mathbb{C}^{2n}$ с помощью соответствия $(a_1,\ldots,a_n)\to(\alpha_1,\ldots,\alpha_{2n})$. При этом $\langle a,b\rangle=\langle a,b\rangle_{\mathbb{C}}-(a,b)_{\mathbb{C}}j$, где

$$\langle a,b\rangle_{\mathbb{C}}=\sum_{k=1}^{2n}\alpha_k\overline{\beta}_k,\qquad (a,b)_{\mathbb{C}}=\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\beta_{n+k}-\alpha_{n+k}\beta_k).$$

Представление полной линейной группы $GL(n,\mathbb{Q})$ в $GL(2n,\mathbb{C})$ задается отображением

$$A+Bj\to\begin{pmatrix}A & B\\ -\overline{B} & \overline{A}\end{pmatrix},\tag{2}$$

где A и B — комплексные матрицы порядка n [16, с. 131].

Изометрии пространства $\mathbb{Q}^n$ относительно скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$ образуют компактную симплектическую группу $\mathrm{Sp}(n)$, действующую транзитивно на стандартной единичной сфере S^{4n-1}. При отождествлении $\mathbb{Q}^n$ с $\mathbb{C}^{2n}$ группа $\mathrm{Sp}(n)$ является подгруппой унитарной группы $U(2n)$ и состоит из унитарных операторов, сохраняющих кососимметрическую форму $(a,b)_{\mathbb{C}}$ в $\mathbb{C}^{2n}$.

Пусть $\mathrm{Sp}(n,1)$ — группа всех невырожденных кватернионных матриц $(n+1)$-го порядка, сохраняющих эрмитову форму $a_1\overline{b_1}+\ldots+a_n\overline{b}_n-a_{n+1}\overline{b}_{n+1}$, a, $b\in\mathbb{Q}^{n+1}$. Максимальная компактная подгруппа группы $\mathrm{Sp}(n,1)$ изоморфна произведению $\mathrm{Sp}(n)\times\mathrm{Sp}(1)$ и образована блочно-диагональными матрицами вида $\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}$, где $A\in\mathrm{Sp}(n)$, $a\in\mathbb{Q}^1$, $|a|=1$ [17, с. 313]. Кватернионное гиперболическое пространство $H^n(\mathbb{Q})$ вещественной размерности $4n$ определяется равенством $H^n(\mathbb{Q})=\mathrm{Sp}(n,1)/\mathrm{Sp}(n)\times\mathrm{Sp}(1)$ и является римановым глобально симметрическим пространством ранга 1 некомпактного типа (см. [4], гл. 8).

Пусть $B^{4n}=\{a\in\mathbb{Q}^n:|a|<1\}=\{z\in\mathbb{C}^{2n}:|z|<1\}$. Положим $q_{ik}(a)=\left((1-|a|^2)\delta_{ik}+\overline{a}_i a_k\right)/\left(1-|a|^2\right)^2$, $1\le i,k\le n$, где δ_{ik} — символ Кронекера. При гомоморфизме (2) матрица $\|q_{ik}\|_{i,k=1}^{n}$ переходит в матрицу $\|g_{lm}\|_{l,m=1}^{2n}$, где

$$\begin{aligned}
g_{ik}(z)&=\left(\delta_{ik}\left(1-|z|^2\right)+\overline{z}_i z_k+z_{n+i}\overline{z}_{n+k}\right)/\left(1-|z|^2\right)^2,\\
g_{i,n+k}(z)&=\left(\overline{z}_i z_{n+k}-z_{n+i}\overline{z}_k\right)/\left(1-|z|^2\right)^2,\\
g_{n+i,k}(z)&=\left(\overline{z}_{n+i}z_k-z_i\overline{z}_{n+k}\right)/\left(1-|z|^2\right)^2,\\
g_{n+i,n+k}(z)&=\left(\delta_{ik}\left(1-|z|^2\right)+z_i\overline{z}_k+\overline{z}_{n+i}z_{n+k}\right)/\left(1-|z|^2\right)^2,\qquad 1\le i,\quad k\le n.
\end{aligned}\tag{3}$$

Для любого $w=(w_1,\ldots,w_{2n})\in\mathbb{C}^{2n}$ имеет место равенство

$$\sum_{l,m=1}^{2n}g_{lm}w_l\overline{w}_m=\frac{|w|^2}{1-|z|^2}+\frac{|\langle z,w\rangle|^2}{\left(1-|z|^2\right)^2},\tag{4}$$

т. е. матрица $\|g_{lm}\|_{l,m=1}^{2n}$ индуцирует на B^{4n} структуру риманова многообразия.

Расстояние между двумя точками $z, w \in B^{4n}$ в метрике (3) вычисляется по формуле (см. п. 2)

$$d(z, w) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{|1-\langle w, z\rangle| + \sqrt{|w-z|^2 + |\langle w, z\rangle|^2 - |z|^2|w|^2}}{|1-\langle w, z\rangle| - \sqrt{|w-z|^2 + |\langle w, z\rangle|^2 - |z|^2|w|^2}}\right).$$

Риманова мера на B^{4n} имеет вид (см. п. 2) $d\mu(z) = dm(z) / \left(1-|z|^2\right)^{2n+2}$, где dm — мера Лебега в $\mathbb{C}^{2n}$.

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Кватернионное гиперболическое пространство* $H^n(\mathbb{Q})$ *изометрично шару* B^{4n} *с метрикой* (3).

Построенная реализация пространства $H^n(\mathbb{Q})$ является аналогом модели Пуанкаре для вещественного гиперболического пространства $H^n(\mathbb{R})$ [4]. Аналогичный результат для комплексного гиперболического пространства $H^n(\mathbb{C})$ содержится в [5] (см. также [11]).

2. Вспомогательные утверждения. Всюду в дальнейшем через M обозначено многообразие с метрикой (3), заданной на шаре B^{4n}.

Лемма 1. *Группа* $\mathrm{Sp}(n)$ *является подгруппой группы* $I(M)$.

Доказательство. Пусть $\gamma(t) = (z_1(t), \ldots, z_{2n}(t))$, $0 \le t \le 1$, — произвольная кусочно-гладкая кривая в M, $\gamma'(t) = (z_1'(t), \ldots, z_{2n}'(t))$. Из (4) следует, что длина $\|\gamma\|$ кривой γ вычисляется по формуле

$$\|\gamma\| = \int_0^1 \left(\frac{|\gamma'(t)|^2}{1-|\gamma(t)|^2} + \frac{|\langle \gamma(t), \gamma'(t)\rangle|^2}{\left(1-|\gamma(t)|^2\right)^2}\right) dt. \tag{5}$$

Для любого $\tau \in \mathrm{Sp}(n)$ положим $\gamma_\tau(t) = \tau(\gamma(t))$, $0 \le t \le 1$. Поскольку $\gamma_\tau'(t) = \tau(\gamma'(t))$, из (5) имеем $\|\gamma_\tau\| = \|\gamma\|$. Поэтому для любых $z, w \in B^{4n}$ $d(\tau z, \tau w) = d(z, w)$, откуда следует утверждение леммы 1.

Лемма 2. *Риманова мера на* M *имеет вид*

$$d\mu(z) = \frac{dm(z)}{\left(1-|z|^2\right)^{2n+2}},$$

где dm — *мера Лебега в* $\mathbb{C}^{2n}$.

Доказательство. Пусть $z_k = x_k + iy_k$, $x_k, y_k \in \mathbb{R}^1$, $1 \le k \le 2n$. При отождествлении $\mathbb{C}^{2n}$ с $\mathbb{R}^{4n}$ с помощью соответствия $(z_1, \ldots, z_{2n}) \to (x_1, \ldots, x_{2n}, y_1, \ldots, y_{2n})$ представление группы $\mathrm{GL}(2n, \mathbb{C})$ в $\mathrm{GL}(4n, \mathbb{R})$ задается отображением $A + iB \to C$, где $C = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$, A и B — вещественные матрицы порядка $2n$. Поскольку $\det C = |\det(A+iB)|^2$ [18, с. 18], риманова мера на M имеет вид $d\mu(z) = g(z)\,dm(z)$, где $g(z)$ — определитель матрицы $\|g_{lm}\|_{l,m=1}^{2n}$ [1, с. 102]. Из инвариантности μ относительно $I(M)$ и леммы 1 следует, что g — радиальная (т. е. зависящая только от $|z|$) функция в шаре B^{4n}. Отсюда

$$g(z) = g((|z|, 0, \ldots, 0)) = \frac{1}{\left(1-|z|^2\right)^{2n+2}} \tag{6}$$

и лемма 2 доказана.

Пусть L — оператор Лапласа – Бельтрами на M [1, с. 277].

Лемма 3. *Для любой* $f \in C^2(B^{4n})$ *имеет место равенство*

$$(Lf)(z) = 4\left(1-|z|^2\right)\left(\sum_{i,k=1}^{n}\left(\left(\delta_{ik} - z_i\bar{z}_k - \bar{z}_{n+i}z_{n+k}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial \bar{z}_k}(z) + \right.\right.$$

$$+ \left(\bar{z}_i z_{n+k} - z_{n+i}\bar{z}_k\right)\frac{\partial^2 f}{\partial z_{n+i}\partial \bar{z}_k}(z) + \left(\bar{z}_{n+i}z_k - z_i\bar{z}_{n+k}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial \bar{z}_{n+k}}(z) +$$

$$\left.\left. + \left(\delta_{ik} - \bar{z}_i z_k - z_{n+i}\bar{z}_{n+k}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial z_{n+i}\partial \bar{z}_{n+k}}(z)\right) + \sum_{i=1}^{2n}\left(z_i\frac{\partial f}{\partial z_i}(z) + \bar{z}_i\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i}(z)\right)\right).$$

В частности, если f *имеет вид* $f(z) = h(|z|)$, *то*

$$(Lf)(z) = \left(1-|z|^2\right)^2 h''(|z|) + \frac{1-|z|^2}{|z|}\left(4n-1+|z|^2\right)h'(|z|). \tag{7}$$

Доказательство. Пусть $\left\| g_{lm} \right\|_{l,m=1}^{2n}$ — матрица, обратная к $\left\| g_{lm} \right\|_{l,m=1}^{2n}$. Тогда

$$\begin{aligned}
g^{ik}(z) &= \left(\delta_{ik} - \bar{z}_i z_k - z_{n+i}\bar{z}_{n+k}\right)\left(1-|z|^2\right),\\
g^{i,n+k}(z) &= \left(z_{n+i}\bar{z}_k - \bar{z}_i z_{n+k}\right)\left(1-|z|^2\right),\\
g^{n+i,k}(z) &= \left(z_i\bar{z}_{n+k} - \bar{z}_{n+i}z_k\right)\left(1-|z|^2\right),\\
g^{n+i,n+k}(z) &= \left(\delta_{ik} - z_i\bar{z}_k - \bar{z}_{n+i}z_{n+k}\right)\left(1-|z|^2\right), \qquad 1 \le i, \quad k \le n.
\end{aligned} \tag{8}$$

Далее, оператор L имеет вид

$$L = \frac{2}{g}\sum_{m=1}^{2n}\left(\frac{\partial}{\partial z_m}\left(\sum_{l=1}^{2n} g^{lm} g \frac{\partial}{\partial \bar{z}_l}\right) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}_m}\left(\sum_{l=1}^{2n} \overline{g^{lm}}\, g \frac{\partial}{\partial z_l}\right)\right),$$

где, как обычно,

$$\frac{\partial}{\partial z_m} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_m} - i\frac{\partial}{\partial y_m}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_m} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_m} + i\frac{\partial}{\partial y_m}\right).$$

Отсюда и из (6), (8) получаем утверждение леммы 3.

Пусть $\overline{B^{4n}}$ — замыкание шара B^{4n}. Зафиксируем $a \in B^{4n}$. Следуя [18], положим $s_a = \left(1-|a|^2\right)^{1/2}$, $P_a(z) = \langle z, a\rangle a / |a|^2$ при $a \ne 0$ $(P_0 = 0)$, $Q_a(z) = z - P_a(z)$, $\varphi_a(z) = (1-\langle z, a\rangle)^{-1}(a - P_a(z) - s_a Q_a(z))$, $z \in \overline{B^{4n}}$.

Лемма 4. *При любом* $a \in B^{4n}$ *отображение* φ_a *имеет следующие свойства*:

1) $\varphi_a(0) = 0$, $\varphi_a(a) = 0$;

2) $1 - \langle \varphi_a(z), \varphi_a(w)\rangle = (1-\langle z, a\rangle)^{-1}(1-\langle z, w\rangle)(1-\langle a, w\rangle)^{-1}\left(1-|a|^2\right)$, $z, w \in \overline{B^{4n}}$;

3) φ_a *является инволюцией, т. е.* $\varphi_a(\varphi_a(z)) = z$, $z \in \overline{B^{4n}}$.

Доказательство леммы 4 аналогично доказательству теоремы 2.2.2 из [18].

Лемма 5. *Пусть* a, $b \in B^{4n}$, $c = \varphi_a(b)$. *Тогда отображение* $\psi = \varphi_c \circ \varphi_a \circ \varphi_b$ *является сужением на* $\overline{B^{4n}}$ *элемента ортогональной группы* $O(4n)$.

Доказательство. Из свойства 2 леммы 4 находим

$$\langle \psi(z), \psi(w) \rangle = (1-\langle b, a\rangle)^{-1}\langle z, w\rangle(1-\langle b, a\rangle), \qquad z, w \in \overline{B^{4n}}.$$

Отсюда для достаточно малых по модулю $z, w \in B^{4n}$ имеем $\psi(z+w) = \psi(z) + \psi(w)$. Аналогично, при $z \in \overline{B^{4n}}$ и $\lambda \in [-1, 1]$ получаем $\psi(\lambda z) = \lambda\psi(z)$. Кроме того, $|\psi(z)| = |z|$, $z \in \overline{B^{4n}}$. Положим $\psi_1(0) = 0$, $\psi_1(z) = |z|\psi(z/|z|)$, $z \in \mathbb{C}^{2n} \setminus \{0\}$. Тогда $\psi_1 \in O(4n)$ и совпадает с отображением ψ в шаре $\overline{B^{4n}}$. Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *При любом* $a \in B^{4n}$ *инволюция* φ_a *принадлежит* $I(M)$.

Доказательство. Пусть $z \in B^{4n}$, $f \in C^2(B^{4n})$. Прямой подсчет и лемма 3 показывают, что

$$(Lf)(z) = \Delta(f \circ \varphi_z)(0), \tag{9}$$

где Δ — оператор Лапласа в $\mathbb{C}^{2n}$. Поскольку Δ коммутирует с группой $O(4n)$, из (9) и лемм 4, 5 следует, что L инвариантен относительно φ_a. Отсюда и из ([1], гл. 2, § 2, предложение 2.4) получаем утверждение леммы 6.

Лемма 7. *Расстояние между двумя точками* $z, w \in B^{4n}$ *в метрике* (3) *вычисляется по формуле*

$$d(z, w) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{|1-\langle w, z\rangle| + \sqrt{|w-z|^2 + |\langle w, z\rangle|^2 - |z|^2|w|^2}}{|1-\langle w, z\rangle| - \sqrt{|w-z|^2 + |\langle w, z\rangle|^2 - |z|^2|w|^2}}\right).$$

Доказательство. Пусть $z = (\rho, 0, \ldots, 0)$, где $0 < \rho < 1$, $\gamma(t)$, $0 \le t \le 1$ — произвольная кусочно-гладкая кривая, соединяющая точки 0 и z в B^{4n}. Из (5) имеем

$$\|\gamma\| \ge \int_0^1 \left(\frac{|\gamma'(t)|^2}{1-|\gamma(t)|^2} + \frac{|\langle \gamma(t), \gamma'(t)\rangle_{\mathbb{C}}|^2}{\left(1-|\gamma(t)|^2\right)^2}\right)dt \ge d_1(0, z),$$

где $d_1(0, z)$ — расстояние между 0 и z в метрике Бергмана (1) на комплексном гиперболическом пространстве $H^{2n}(\mathbb{C})$. Отсюда [11] $\|\gamma\| \ge \ln(1+|z|/(1-|z|))/2$, причем для отрезка, соединяющего 0 и z, достигается равенство. Таким образом,

$$d(0, z) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+|z|}{1-|z|}. \tag{10}$$

Далее, из леммы 1 следует, что (10) выполнено для любого $z \in B^{4n}$. Теперь из леммы 6 находим

$$d(z, w) = d(0, \varphi_z(w)) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+|\varphi_z(w)|}{1-|\varphi_z(w)|}. \tag{11}$$

Учитывая свойство 2 леммы 4, получаем требуемое утверждение.

3. Доказательство теоремы 1. Сначала докажем, что многообразие M является некомпактным двухточечно-однородным пространством. Пусть $x, y, z, w \in M$ и $d(x, y) = d(z, w)$. Согласно лемме 6 $d(0, \varphi_x(y)) = d(0, \varphi_z(w))$. Отсюда и из (11) имеем $|\varphi_x(y)| = |\varphi_z(w)|$. Поэтому $\varphi_x(y) = \tau\varphi_z(w)$ для некоторого $\tau \in \mathrm{Sp}(n)$. Положим $\Phi = \varphi_x \circ \tau \circ \varphi_z$. Из лемм 1, 6 и 4 получаем $\Phi \in I(M)$, $\Phi(z) = x$, $\Phi(w) = y$. Отсюда и из (11) следует, что M — некомпактное двухточечно-однородное пространство. Согласно классификации некомпактных двухточечно-однородных пространств [1, с. 203] это означает, что M изометрично одному из пространств: $\mathbb{R}^m$, $H^m(\mathbb{R})$, $H^m(\mathbb{C})$, $H^m(\mathbb{Q})$, $H^{16}(\mathrm{Cay})$. Из (7) и (10) находим, что радиальная часть L_0 оператора Лапласа – Бельтрами L [1, с. 350] имеет вид

$$L_0 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + ((4n-1)\operatorname{cth} r + 3\operatorname{th} r)\frac{\partial}{\partial r}.$$

Отсюда и из [19, с. 609] получаем, что M является кватернионным гиперболическим пространством вещественной размерности $4n$. Теорема 1 доказана.

Автор благодарит профессора В. В. Волчкова за многочисленные полезные обсуждения.

1. *Хелгасон С.* Группы и геометрический анализ. – М.: Мир, 1987. – 735 с.
2. *Wang H. C.* Two point homogeneous spaces // Ann. Math. – 1952. – **55**. – P. 177–191.
3. *Tits J.* Sur certains classes d'espaces homogenes de groupes de Lie // Acad. Roy. Belg. Cl. Sci. Mem. Coll. – 1955. – **29**, № 3. – P. 157–183.
4. *Вольф Дж.* Пространства постоянной кривизны. – М.: Наука, 1982. – 480 с.
5. *Krantz S.* Function theory of several complex variables. – New York etc.: J. Woley and Sons, 1982. – 437 p.
6. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. – М.: Наука, 1985. – Ч. 2. – 464 с.
7. *Волчков В. В.* Окончательный вариант локальной теоремы о двух радиусах // Мат. сб. – 1995. – **186**, № 6. – С. 15–34.
8. *Волчков В. В.* Новые теоремы о двух радиусах в теории гармонических функций // Изв. РАН. Сер. мат. – 1994. – **58**, № 1. – С. 182–194.
9. *Волчков В. В.* Об одной проблеме Зальцмана и ее обобщениях // Мат. заметки. – 1993. – **53**, № 2. – С. 30–36.
10. *Волчков Вит. В.* Теоремы о шаровых средних на комплексных гиперболических пространствах // Доп. НАН України. – 2000. – № 4. – С. 7–10.
11. *Harchaoui M.* Inversion de la transformation de Pompeiu locale dans les espaces hyperboliques reel et complete (Cas de deux boules) // J. Anal. Math. – 1995. – **67**. – P. 1–37.
12. *Беренстейн К. А., Струппа Д.* Комплексный анализ и уравнения в свертках // Итоги науки и техники. Совр. пробл. математики. Фундам. направления. – 1989. – **54**. – С. 5–111.
13. *Zalcman L.* A bibliographic survey of the Pompeiu problem // Approxim. Solutions of Partial Different. Equats. / Ed. B. Fuglede et. al. – 1992. – P. 185–194.
14. *Netuka I., Vesely J.* Mean value property and harmonic functions // Classical and Modern Potential Theory and Applications. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1994. – P. 359–398.
15. *Фоменко А. Т.* Симплектическая геометрия. Методы и приложения. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. – 413 с.
16. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. – М.: Наука, 1979. – 759 с.
17. *Желобенко Д. П., Штерн А. И.* Представления групп Ли. – М.: Наука, 1983. – 360 с.
18. *Рудин У.* Теория функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$. – М.: Мир, 1984. – 455 с.
19. *Berenstein C. A., Zalcman L.* Pompeiu's problem on symmetric spaces // Comment. math. helv. – 1980. – **55**. – P. 593–621.

Получено 20.06.2000