УДК 519.217.1

**У. А. Розиков** (Ин-т математики АН Республики Узбекистан, Ташкент)

# СЛУЧАЙНЫЕ БЛУЖДАНИЯ В СЛУЧАЙНЫХ СРЕДАХ НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ

We describe sufficient conditions of the transience for random walks with bounded jumps in random media on the Cayley tree.

Описано достатні умови неповоротності для випадкових блукань з обмеженими стрибками у випадкових середовищах на дереві Келі.

**1. Введение.** Бесконечное дерево $\mathcal{T}^k$, у которого каждая вершина имеет в точности $k+1$ соседей, называется деревом Кэли порядка $k \geq 1$. Дерево Кэли является связным графом и не содержит замкнутых контуров. Пусть $V$ и $L$ — множества вершин и ребер соответственно дерева $\mathcal{T}^k$.

Если $x, y \in V$ являются концевыми вершинами некоторого ребра $l \in L$, то они называются соседними и обозначаются через $\langle x, y \rangle$.

Расстояние $d(x, y)$, $x, y \in V$, на дереве Кэли вводится по формуле $d(x, y) = \min\{d \mid \exists x = x_0, x_1, \ldots, x_{d-1}, x_d = y$ такое, что $\langle x_0, x_1 \rangle, \ldots, \langle x_{d-1}, x_d \rangle$ — ближайшие соседи$\}$. Последовательность $\pi(x, y) = \{x = x_0, x_1, \ldots, x_d = y\}$, реализующая указанный минимум, называется путем из $x$ в $y$.

**Предложение 1** [1]. *Существует взаимно однозначное соответствие между множеством вершин $V$ дерева Кэли порядка $k \geq 1$ и группой $G_k$-свободного произведения $k+1$ циклических групп второго порядка с образующими $a_1$, $a_2, \ldots, a_{k+1}$ соответственно.*

Определим на $G_k$ структуру графа следующим образом: вершины, соответствующие словам, $x, y \in G_k$ назовем ближайшими соседями и соединим ребром, если либо $x = ya_i$, либо $y = xa_j$ для некоторого $i$ или $j$. Нетрудно убедиться, что так определенный граф образует дерево Кэли порядка $k$.

Пусть $\Gamma_x$ — фиксированная, конечная, связная компонента дерева $\mathcal{T}^k$, содержащая $x$, т. е. для любых $u, v \in \Gamma_x$ существует $\pi(u, v) \subsetneq \Gamma_x$, $x \in \Gamma_x$ и $|\Gamma_x| < \infty$.

Настоящая работа посвящена изучению случайных блужданий в случайных средах, когда размеры скачков блуждающей частицы ограничены, точнее, если $x(t) \in \Gamma_{x(t)}$, то $x(t+1) \in \Gamma_{x(t)}$.

Такая модель рассматривалась при $k = 1$, т. е. на $\mathbb{Z}$. Э. Кей [2] привел для этого случая критерий возвратности. В статье [3] для таких случайных блужданий на $\mathbb{Z}$ в случайных средах получены асимптотические оценки с вероятностью 1.

Данная работа состоит из семи пунктов. В п. 2 приводится постановка задачи. Пункт 3 является подготовительным, в котором мы определим некоторые отображения группы $G_k$ на $\mathbb{Z}$, с помощью которых в п. 4 изучаются предельные поведения траекторий случайного блуждания в периодической случайной среде на дереве Кэли.

В пп. 5 – 7 рассматриваются случайные блуждания со скачками только на соседние вершины в случайной среде, т. е. в этом случае $\Gamma_x = \{xy : y = e, a_1, \ldots, a_{k+1}\}$, где $e$ — единичный элемент группы $G_k$.

В п. 5 описываются вероятности выхода и математическое ожидание момента остановки. Пункт 6 также является подготовительным, в котором оцениваются вероятности выхода. В п. 7 изучается предельное поведение траектории случайного блуждания, но без условия периодичности случайной среды.

**2. Постановка задачи.** Рассмотрим правое представление $G_k$ дерева Кэли $\mathcal{T}^k$ порядка $k \geq 1$ [1]. Пусть $\Gamma$ — фиксированная, конечная, связная компонента дерева Кэли и $e \in \Gamma$.

Рассмотрим на $G_k$ следующие преобразования: для $x \in G_k$ положим

$$T_x(y) = xy \quad \text{для любого} \quad y \in G_k. \tag{1}$$

Эти преобразования являются левыми сдвигами на $G_k$.

Пусть $\Gamma_x = T_x(\Gamma) = \{T_x(y), y \in \Gamma\}$, — сдвиг $\Gamma$ на $x \in G_k$. Обозначим через $\mathbf{H}$ множество векторов $\mathbf{p} = (p_u, u \in \Gamma) \in R^{|\Gamma|}$ таких, что для всех $u \in \Gamma$

$$p_u \geq 0, \qquad \sum_{u \in \Gamma} p_u = 1, \qquad p_v \geq \varepsilon_0, \qquad v \in \partial\Gamma \bigcup \partial e, \tag{2}$$

где $\partial\Gamma = \{x \in \Gamma : \exists y \in \nabla \setminus \Gamma, \langle y, x \rangle\}$ и $\varepsilon_0 > 0$ — достаточно малое число.

Обозначим через $\mathbf{B}$ множество борелевых подмножеств $\mathbf{H}$.

Пусть на $\mathbf{H}$ задано некоторое распределение вероятностей $\mu$.

Пространством случайных сред $(\Omega, F_\Omega, P)$ назовем прямое произведение $(\Omega, F_\Omega, P) = \prod_{x \in G_k} (\mathbf{H}, \mathbf{B}, \mu)$, а элемент множества $\Omega$ — средой $A$. Таким образом, $A = \{\mathbf{p}(x), x \in G_k\}$ — совокупность $\mathbf{H}$-значных векторов.

В силу задания пространства сред совокупность $\{\mathbf{p}(x, A)\}$ является множеством независимых одинаково распределенных случайных векторов.

Зафиксируем произвольную среду $A$. Пусть $T = \{0, 1, \dots\}$ — временное пространство, $G_k$ — фазовое пространство. Обозначим через $X = G_k^T$ пространство траекторий блужданий. Пусть $F_X$ — $\sigma$-алгебра, порожденная цилиндрическими подмножествами $X$. Элемент пространства $X$ будем обозначать символом $x(\cdot)$.

**Определение 1.** *Случайным блужданием в среде $A$ называется однородная по времени цепь Маркова с пространством состояний $G_k$, временным пространством $T$, начальным состоянием $e$ и матрицей переходных вероятностей $M = \{m_{xy}, x, y \in G_k\}$, элементы которой определяются по формуле*

$$m_{xy} = \begin{cases} p_y(x), & \text{если } y \in \Gamma_x; \\ 0 & \text{— в остальных случаях.} \end{cases}$$

Таким образом, каждый вектор $\mathbf{p}(x)$ определяет вероятности перехода блуждающей частицы из точки $x$ фазового пространства.

Обозначим через $P_A$ вероятностную меру на измеримом пространстве $(X, F_X)$, соответствующую случайному блужданию в среде $A$.

Введем следующие обозначения: $\Omega_1 = \Omega \times X$, $F = F_\Omega \otimes F_X$. На полученном измеримом пространстве зададим вероятностную меру $\mathbb{P}$ следующим образом: для любых $B_1 = F_\Omega$, $B_2 = F_X$

$$\mathbb{P}(B_1 \times B_2) = \int_{B_1} P_A(B_2)\, dP(A). \tag{3}$$

**Определение 2.** *Вероятностное пространство $(\Omega_1, F, \mathbb{P})$ будем называть основным, а случайным блужданием в случайной среде назовем заданный на основном вероятностном пространстве процесс*

$$x(t, \omega) = x(t), \qquad \omega = (A, x(\cdot)) \in \Omega_1, \qquad t \in T.$$

Из формулы (3) видно, что условное распределение случайного блуждания в случайной среде относительно фиксированной среды $A$ есть распределение $P_A$ случайного блуждания в среде $A$ $P$-п. н.

Говорят, что случайное блуждание в случайной среде имеет какое-либо свойство, характерное для марковских цепей (например, возвратность), если для почти каждой среды $A$ (относительно $P$) это свойство имеет место для случайного блуждания в среде $A$.

В данной работе для описанного выше случайного блуждания в случайной среде изучаются предельные поведения траекторий.

**3. Определения некоторых отображений $G_k$ на $\mathbb{Z}$.** Зафиксируем пару чисел $i \neq j$ $(i, j = \overline{1,\ k+1})$. Пусть отображение $\pi_{ij}: \{a_1, \ldots, a_{k+1}\} \to \{e, a_i, a_j\}$ определено следующим образом:

$$\pi_{ij}(a_m) = \begin{cases} a_m, & \text{если } m = i, j; \\ e & \text{если } m \neq i, j, \end{cases}$$

где $e$ — единичный элемент группы $G_k$.

Обозначим через $G_{ij}$ свободное произведение циклических групп $\{e, a_i\}$ и $\{e, a_j\}$. Ясно, что $G_{ij}$ является групповым представлением $\mathcal{T}^1 = \mathbb{Z}$ с образующими $a_i, a_j$; $i \neq j$ $(i, j = \overline{1,\ k+1})$.

Для $i \neq j$ $(i, j = \overline{1,\ k+1})$ отображение $f_{ij}: G_k \to G_{ij}$ определим следующим образом:

$$f_{ij}(x) = f_{ij}(a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_m}) = \pi_{ij}(a_{j_1}) \pi_{ij}(a_{j_2}) \ldots \pi_{ij}(a_{j_m}),$$

где $m = |x| \geq 0$ и называется длиной слова $x \in G_k$.

Обозначим $H_{ij} = \{x \in G_k : f_{ij}(x) = e\}$.

Очевидны следующие свойства функций $f_{ij}$.

***Предложение 2.*** *Для произвольных* $i \neq j$ $(i, j = \overline{1,\ k+1})$:

a) $f_{ij}(x)$ *является гомоморфизмом;*

b) *если* $x, y \in G_k$ *— соседние вершины, то* $f_{ij}(x)$ *и* $f_{ij}(y)$ *либо являются соседними, либо* $f_{ij}(x) = f_{ij}(y)$;

c) $H_{ij}$ *является нормальным делителем группы* $G_k$;

d) $|f_{ij}(x)| \leq |x|$ *для любого* $x \in G_k$.

Пусть $g_{ij}: G_{ij} \to \mathbb{Z}$ определено следующим образом:

$$g_{ij}(y) = \begin{cases} |y|, & \text{если } y = a_i a_j a_i a_j \ldots; \\ -|y|, & \text{если } y = a_j a_i a_j a_i \ldots; \\ 0, & \text{если } y = e. \end{cases}$$

Обозначим $\varphi_{ij}(x) = g_{ij}(f_{ij}(x))$.

Легко доказать следующие свойства функций $\varphi_{ij}$.

***Предложение 3.*** *Для произвольных* $i \neq j$ $(i, j = \overline{1,\ k+1})$:

1) *любая связная компонента* $G \subset G_k$ *при отображении* $\varphi_{ij}$ *переводится в связную компоненту* $\mathbb{Z}$, *т.е. некоторый путь на* $\mathbb{Z}$;

2) $d(x, y) \geq d(\varphi_{ij}(x), \varphi_{ij}(y))$ *для любых* $x, y \in G_k$;

3) $|\varphi_{ij}(x)| \leq |x|$ *для любого* $x \in G_k$.

**4. Предельное поведение траекторий случайного блуждания в периодической случайной среде.** Пусть $a_i, a_j \in \Gamma$. (Если не существует такой пары

$i, j$, то случайное блуждание будет возвратным, поскольку тогда $\Gamma$ содержит только одну точку, соседнюю с $e$.)

В силу п. 2 предложения 3 существуют натуральные числа $a$ и $b$ такие, что

$$\varphi_{ij}(\Gamma) = \{-a, -a+1, \dots, b\}.$$

Наложим на случайную среду следующее условие.

*Условие* I. Пусть для любого $x \in G_k$ среда $A = \{\mathbf{p}(x)\}$ удовлетворяет равенству $\mathbf{p}(x) = \mathbf{p}(yx)$ для любого $x \in H_{ij}$.

Заметим, что это условие является условием периодичности относительно нормального делителя $H_{ij}$.

В силу предложения 3 при условии I функция $\varphi_{ij}$ индуцирует случайное блуждание $\{\tilde{x}(t), t \in T\}$ с пространством состояний $\mathbb{Z}$, начальным состоянием 0 и матрицей переходных вероятностей $\tilde{M} = \{\tilde{m}_{xy}, x, y \in \mathbb{Z}\}$, элементы которой определяются по формуле

$$\tilde{m}_{xy} = \begin{cases} \tilde{p}_{y-x}(x), & \text{если } y - x = -a, -a+1, \dots, b; \\ 0 & \text{— в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $\tilde{p}_z(x) = \sum_{y \in \Gamma_x : \varphi_{ij}(y) = z} p_y(x)$, $x \in \mathbb{Z}$, $z = -a, -a+1, \dots, b$.

Заметим, что такое случайное блуждание в случайной среде уже рассматривалось в работах [2–4] и была доказана следующая теорема.

**Теорема 1** [2, 4]. *Справедливы следующие импликации*:

1) $\lambda_b > 0 \Rightarrow \mathbb{P}\{\lim\limits_{t \to \infty} \tilde{x}(t) = +\infty\} = 1$;

2) $\lambda_b = 0 \Rightarrow \mathbb{P}\{\varliminf\limits_{t \to \infty} \tilde{x}(t) = -\infty, \varlimsup\limits_{t \to \infty} \tilde{x}(t) = +\infty\} = 1$;

3) $\lambda_b < 0 \Rightarrow \mathbb{P}\{\lim\limits_{t \to \infty} \tilde{x}(t) = -\infty\} = 1$,

где $\lambda_b$ — показатель Ляпунова.

Применяя теорему 1 для рассматриваемого случайного блуждания, докажем следующую теорему.

**Теорема 2.** *Если существуют такие* $i, j$ $(i, j = \overline{1, k+1}$, $i \neq j)$, *для которых выполняется условие* I, *то*:

1) $\lambda_b \neq 0 \Rightarrow \mathbb{P}\{\lim\limits_{t \to \infty} |x(t)| = +\infty\} = 1$;

2) $\lambda_b = 0 \Rightarrow \mathbb{P}\{\lim\limits_{t \to \infty} \sup |x(t)| = +\infty\} = 1$.

***Доказательство.*** В силу предложения 2

$$|\tilde{x}(t)| \leq |x(t)| \quad \text{для любого} \quad t \in T. \tag{4}$$

В силу теоремы 1 из (4) получаем утверждения 1 и 2. Теорема доказана.

**5. Вероятности выхода случайного блуждания со скачками только на соседние вершины.** В пп. 5–7 в случае $\Gamma = \{e, a_1, \dots, a_{k+1}\}$ другими методами [3, 5] докажем аналог теоремы 2 без условия периодичности случайной среды.

В случае $\Gamma = \{e, a_1, \dots, a_{k+1}\}$ матрица переходных вероятностей имеет вид $M = \{m_{xy}, x, y \in G_k\}$, где

$$m_{xy} = \begin{cases} p_i(x) = p_{xa_i}(x), & \text{если } y = xa_i; \\ 0 & \text{— в остальных случаях.} \end{cases}$$

Обозначим

$$W_m = \{x \in G_k : |x| = m\},$$

$$V_m = \{x \in G_k : |x| \le m\}.$$

Рассмотрим случайное блуждание в среде $A = \{\mathbf{p}(x) \in R^{|\Gamma| = k+2}, x \in G_k\}$.

Обозначим через $\beta_u(x)$ вероятность $P_A$ того, что случайная точка, выйдя из $x \in V_m$, покидает $V_m$ через границу $u \in W_m$.

Заметим, что $\beta_u(x)$ является решением системы уравнений

$$\beta_u(x) = \sum_{j=1}^{k+1} p_j(x)\beta_u(xa_j), \quad x \in V_m, \tag{5}$$

с граничными условиями

$$\beta_u(u) = 1, \quad \beta_u(v) = 0, \quad v \in W_m \setminus \{u\}. \tag{6}$$

Пусть $u = a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_m}$, $x = a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_s} \in W_s$, $s = \overline{0, m}$. Ясно, что существует такое $m_1 \in \{0, 1, \ldots, s\}$, что $a_{i_n} = a_{j_n}$ при $n = \overline{1, m_1}$ и $a_{i_{m_1+1}} \ne a_{j_{m_1+1}}$.

**Теорема 3.** *Если* $x = a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_s}$ *и* $u = a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_m}$, *то*

$$\beta_u(a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_s}) = B^{(0)} \prod_{n=1}^{s} A^{(n)}_{i_1 \ldots i_n} +$$

$$+ \left( \prod_{n=m_1+1}^{s} A^{(n)}_{j_1 \ldots j_n} \right) \left( \sum_{i=2}^{m_1} B^{(i-1)}_{j_1 \ldots j_{i-1}} \prod_{n=i}^{m_1} A^{(n)}_{j_1 \ldots j_n} + B^{(m_1)}_{i_1 \ldots i_{m_1}} \right), \tag{7}$$

*где*

$$\begin{cases} A^{(n)}_{i_1 \ldots i_n} = \dfrac{p_{i_n}(a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_n})}{1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i_n}}^{k+1} p_j(a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_n}) A^{(n+1)}_{i_1 \ldots i_n j}}, & n = \overline{1, m-2}, \\ A^{(m-1)}_{i_1 \ldots i_{m-2} j} = p_j(a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_{m-2}} a_j), & j = \overline{1, k+1}, \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} B^{(n)}_{i_1 \ldots i_n} = \dfrac{p_{i_{n+1}}(a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_n}) B^{(n+1)}_{i_1 \ldots i_{n+1}}}{1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i_n}}^{k+1} p_j(a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_n}) A^{(n+1)}_{i_1 \ldots i_n j}}, & n = \overline{1, m-2}, \\ B^{(m-1)}_{i_1 \ldots i_{m-1}} = p_{i_m}(a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_{m-1}}), \end{cases} \tag{9}$$

$$B^{(0)} = \frac{\sum_{i=1}^{k+1} p_i(e) B^{(1)}_i}{1 - \sum_{i=1}^{k+1} p_i(e) A^{(1)}_i}.$$

***Доказательство.*** Используя (6), из (5) при $m_1 < m - 1$ получаем

$$\beta_u(a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_{m-1}}) = p_{j_m}(a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_m}) \beta_u(a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_{m-2}}) =$$

$$= A^{(m-1)}_{j_1 \ldots j_{m-1}} \beta_u(a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_{m-2}}) \tag{10}$$

и при $m_1 = m - 1$

$$\beta_u(a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_{m-1}}) = p_{j_m}(a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_m}) \beta_u(a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_{m-2}}) + p_{j_m}(a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_{m-1}}) =$$

$$= A^{(m-1)}_{j_1 \ldots j_{m-1}} \beta_u(a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_{m-2}}) + B^{(m-1)}_{j_1 \ldots j_{m-1}}. \tag{11}$$

Продолжая по индукции вниз, получаем: при $m_1 \geq r > 0$

$$\beta_u(a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_r}) = A^{(r)}_{i_1\ldots i_r}\,\beta_u(a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_{r-1}}) + B^{(r)}_{i_1\ldots i_r} \tag{12}$$

и при $s \geq r > m_1$

$$\beta_u(a_{j_1}a_{j_2}\ldots a_{j_r}) = A^{(r)}_{j_1\ldots j_r}\,\beta_u(a_{j_1}a_{j_2}\ldots a_{j_{r-1}}). \tag{13}$$

Итерируя (12) и (13), получаем (7) при $B^{(0)} = \beta_u(e)$, где $\beta_u(e)$ находится из системы уравнений

$$\begin{cases} \beta_u(e) = \sum_{i=1}^{k+1} p_i(e)\beta_u(a_i), \\ \beta_u(a_i) = A_i^{(1)}\beta_u(e) + B_i^{(1)}, \end{cases}$$

откуда

$$\beta_u(e) = \frac{\sum_{i=1}^{k+1} p_i(e)B_i^{(1)}}{1 - \sum_{i=1}^{k+1} p_i(e)A_i^{(1)}}.$$

Теорема доказана.

Пусть $\mathbf{E}(y)$ — математическое ожидание момента остановки $\tau(y) = \min\{l \geq 0 : yx(l) \in W_m\}$.

Заметим, что $\mathbf{E}(y)$ удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{E}(y) = 1 + \sum_{i=1}^{k+1} p_i(y)\mathbf{E}(ya_i) \tag{14}$$

с граничными условиями

$$\mathbf{E}(u) = 0, \quad u \in W_m. \tag{15}$$

**Теорема 4.** *Для любого* $s = \overline{1, m}$

$$\mathbf{E}(a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_s}) = \mathbf{E}(e)\prod_{n=1}^{s} A^{(n)}_{i_1\ldots i_n} + \sum_{j=2}^{s} C^{(j-1)}_{i_1\ldots i_{j-1}} \prod_{n=j}^{s} A^{(n)}_{i_1\ldots i_n} + C^{(s)}_{i_1\ldots i_s}, \tag{16}$$

где $A^{(n)}_{i_1\ldots i_n}$ определяется по формуле (8),

$$C^{(n)}_{i_1\ldots i_n} = \frac{1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i_n}}^{k+1} p_j(a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_n})C^{(n+1)}_{i_1\ldots i_n j}}{1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i_n}}^{k+1} p_j(a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_n})A^{(n+1)}_{i_1\ldots i_n j}}, \quad n = \overline{1, m-2},$$

$$C^{(m-1)}_{i_1\ldots i_{m-2} j} = 1, \quad j_{m-1} = \overline{1, k+1},$$

$$\mathbf{E}(e) = \frac{1 + \sum_{i=1}^{k+1} p_i(e)C_i^{(1)}}{1 - \sum_{i=1}^{k+1} p_i(e)A_i^{(1)}}.$$

***Доказательство*** аналогично доказательству теоремы 3.

**6. Оценки вероятности выхода.** Для $x \in G_k$ обозначим

$$\nu(x) = \begin{cases} i_n, & \text{если } x = a_{i_1}\ldots a_{i_n}; \\ \nu(e), & \text{если } x = e, \end{cases}$$

где $\nu(e)$ — произвольное число из $\{1, 2, \ldots, k+1\}$.

Пусть совокупность случайных величин $\{ \xi_x^{(i)}, x \in G_k \}$, $i = \overline{1, k+1}$, построена по $A$ следующим образом:

$$\xi_x^{(i)} = \frac{p_{\nu(x)}(x)}{p_i(x)}, \quad i = \overline{1, k+1}.$$

Из определения $\nu(x)$ ясно, что $\xi_e^{(i)} \in \{ p_j(e)/p_i(e), \ j = \overline{1, k+1} \}$.

Рассмотрим $r(e) = 1$, $r(xa_j) = \xi_x^{(i)} r(x)$, $j = \overline{1, k+1}$, $x \in G_k$. Эта случайная функция играет важную роль при исследовании асимптотических свойств случайного блуждания в случайной среде $A$ при $t \to +\infty$. В частности, в терминах этой случайной функции $r(x)$ мы можем оценить вероятности выхода случайного блуждания в случайной среде $A$.

Пусть $v \in G_k$, $u \in W_m$ и $\pi(v, u)$ — путь из $v$ в $u$. Для любого $x \in G_k$ обозначим

$$\theta_u(v, x) = \sum_{y \in \pi(v,u) \bigcap \pi(v,x)} r(y).$$

Обозначим $M_j = \sup \{ \beta_u(x), x \in W_j \}$, $0 \le j \le m$.

**Лемма 1.** *Для любого* $0 \le j \le m-1$

$$M_j \le M_{j+1}. \tag{17}$$

***Доказательство.*** Доказательство проведем индукцией по $j$. Пусть $j = 0$. Тогда

$$M_0 = \sup \{ \beta_u(x), x \in W_0 = \{ e \} \} = \beta_u(e) = \sum_{i=1}^{k+1} p_j(e) \beta_u(a_j) \le$$

$$\le M_1 \sum_{j=1}^{k+1} p_j(e) = M_1.$$

Предположим, что $M_{j-1} \le M_j$ и докажем, что $M_j \le M_{j+1}$:

$$M_j = \sup \{ \beta_u(x), x \in W_j \} = \beta_u(\tilde{x}) = \sum_{j=1}^{k+1} p_j(\tilde{x}) \beta_u(\tilde{x} a_j) \le \sup \{ M_{j-1}, M_{j+1} \};$$

но в силу $M_{j-1} \le M_j$ получим (17). Лемма доказана.

**Лемма 2.** *Для* $m \ge 0$

$$\sup \{ \beta_u(x), x \in V_m \} = M_m.$$

***Доказательство*** очевидно.

Таким образом, мы доказали, что $\beta_u(y)$, $y \in V_m$, достигает своего максимума на границе $V_m$, т. е. на $W_m$.

Если из решетки $\mathcal{T}^k$ удалить произвольную вершину $x \in G_k$, то она разобьется на $k + 1$ компоненту — $k + 1$ полубесконечное дерево $\mathcal{T}_{xa_i}^k$, $i = \overline{1, k+1}$.

**Лемма 3.** a) *Для любых* $x \in \bigcup_{ya_i \notin \pi(v,u)} \mathcal{T}_{ya_i}^k$ *и* $y \in \pi(v, u)$ *имеет место равенство*

$$\theta_u(v, x) = \theta_u(v, y);$$

b) $\theta_u(v, x)$ удовлетворяет уравнению (5) при $x \in G_k \setminus \{v, u\}$;

c) $\max\limits_{x\in W_j}\theta_u(v,x) \le \max\limits_{x\in W_{j+1}}\theta_u(v,x), \ \ j=\overline{0,m}$;

d) $\max\limits_{x\in V_m}\theta_u(v,x) = \max\limits_{x\in W_m}\theta_u(v,x)$;

e) $\max\limits_{x\in W_m}\theta_u(v,x) = \max\{\theta_u(v,v),\theta_u(v,u)\}$.

***Доказательство.*** a) Очевидно следует из определения $\theta_u(v,x)$. b) Проверяется непосредственно подстановкой $\theta_u(v,x)$ в (5). Действительно, возможны следующие случаи:

i) $x$ и $xa_i$, $i=1,2,\ldots,k+1$ не принадлежат $\pi(v,u)$, тогда в силу п. a) имеем $\theta_u(v,x)=\theta_u(v,xa_i)$, $i=1,2,\ldots,k+1$; отсюда

$$\sum_{i=1}^{k+1}p_i(x)\theta_u(v,xa_i) = \theta_u(v,x)\sum_{i=1}^{k+1}p_i(x) = \theta_u(v,x);$$

ii) $x\notin\pi(v,u)$, но существует единственный $i_0$ такой, что $xa_{i_0}\in\pi(v,u)$; тогда в силу п. a) $\theta_u(v,x)=\theta_u(v,xa_{i_0})$, $\theta_u(v,xa_i)=\theta_u(v,xa_{i_0})$, $i=1,2,\ldots,k+1$; следовательно,

$$\sum_{i=1}^{k+1}p_i(x)\theta_u(v,xa_i) = \theta_u(v,xa_{i_0}) = \theta_u(v,x);$$

iii) $x\in\pi(v,u)$; тогда $xa_{\nu(x)}\in\pi(v,u)$ и существует единственный $i_0\neq\nu(x)$ такой, что $xa_{i_0}\in\pi(v,u)$; следовательно, в силу п. a) имеем $\theta_u(v,xa_i)=\theta_u(v,x)$, если $i\neq\nu(x), i_0$; в этом случае

$$\sum_{i=1}^{k+1}p_i(x)\theta_u(v,xa_i) = \theta_u(v,x)\sum_{\substack{i=1\\ i\neq\nu(x),i_0}}^{k+1}p_i(x) + \theta_u(v,xa_{\nu(x)})p_{\nu(x)}(x) + \theta_u(v,xa_{i_0})p_{i_0}(x) =$$

$$= \theta_u(v,x) + \big(\theta_u(v,xa_{\nu(x)})-\theta_u(v,x)\big)p_{\nu(x)}(x) + \big(\theta_u(v,xa_{i_0})-\theta_u(v,x)\big)p_{i_0}(x) =$$

$$= \theta_u(v,x) - r(x)p_{\nu(x)}(x) + r(xa_{i_0})p_{i_0}(x) = \theta_u(v,x),$$

где мы использовали равенство $r(x)p_{\nu(x)}(x)=r(xa_{i_0})p_{i_0}(x)$, которое следует из определения функции $r(x)$. Пункт b) доказан.

Пункты c) и d) в силу п. b) доказываются так же, как леммы 1 и 2 соответственно. Пункт e) следует из п. c) применением п. a). Лемма доказана.

**Лемма 4.** *Для почти всех* $A$ *и для любых* $x\in V_m$, $v\notin V_{m-1}\cup\mathcal{T}_u^k$

$$\frac{\theta_u(v,x)-r(v)}{\theta_u(v,ua_i)-r(v)} \le \beta_u(x) \le \frac{\theta_u(va_i,x)-r(va_i)}{\theta_u(va_i,ua_i)-r(va_i)}, \tag{18}$$

$$\frac{\theta_u(x,ua_i)-r(x)}{\theta_u(va_i,ua_i)-r(va_i)} \le \beta_v(x) \le \frac{\theta_u(x,ua_i)-r(x)}{\theta_u(v,ua_i)-r(v)}, \tag{19}$$

*где* $i\neq\nu(v),\nu(u)$.

***Доказательство.*** Очевидно, что

$$1-\beta_u(ua_i) = \beta_u(v) = \beta_u(va_i) = 0 \quad \text{при} \quad v\notin V_{m-1}\cup\mathcal{T}_u^k, \quad i\neq\nu(v),\nu(u). \tag{20}$$

В силу п. b) леммы 3 функции $\theta_u(v,x)$ и $\theta_u(va_i,x)$ являются решениями уравнений (5). Поэтому функции

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \beta_u(x) - \frac{\theta_u(va_i, x) - r(va_i)}{\theta_u(va_i, ua_i) - r(va_i)}, \\ \varphi_2(x) &= \frac{\theta_u(v, x) - r(v)}{\theta_u(v, ua_i) - r(v)} - \beta_u(x) \end{aligned} \tag{21}$$

будут решениями системы (5) на $x \in V_m$.

Можно доказать, что

$$\sup\{\varphi_i(x), x \in V_m\} = \sup\{\varphi_i(x), x \in W_m\}, \quad \text{где } i = 1, 2.$$

В силу (20) получим:

1) если $x = ua_i \in W_{m+1}$, то $\varphi_1(ua_i) = \varphi_2(ua_i) = 0$;

2) если $a_i u \neq x \in W_{m+1}$, то

$$\varphi_1(x) = -\frac{\theta_u(va_i, x) - r(va_i)}{\theta_u(va_i, ua_i) - r(va_i)} \leq 0$$

и в силу п. е) леммы 3 и (5)

$$\max\{\varphi_2(x), x \in W_{m+1} \setminus ua_i\} = \max\{\varphi_2(v), \varphi_2(va_i)\} = 0.$$

Таким образом, $\varphi_1(x) \leq 0$ и $\varphi_2(x) \leq 0$ на $W_{m+1}$, следовательно, $\varphi_1(x) \leq 0$ и $\varphi_2(x) \leq 0$ для любого $x \in V_m$. Отсюда следуют неравенства (18). Неравенства (19) доказываются аналогично. Лемма доказана.

**7. Предельные поведения траекторий частиц без условий периодичности случайной среды.** Обозначим $D_{ij} = E_P \ln(p_i(x)/p_j(x))$. Заметим, что для каждого $i = \overline{1, k+1}$ совокупность $\{\xi_x^{(i)}, x \in G_k\}$ образует однородную цепь Маркова, которая удовлетворяет усиленному закону больших чисел.

Пусть $v = a_{i_1} \ldots a_{i_n}$ и $\eta_n = \xi^{(i_n)}_{a_{i_1} \ldots a_{i_n}}$. Тогда для почти всех $A$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln r(a_{i_1} \ldots a_{i_n}) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \ln \eta_j = E_P \ln \eta_1 = D_{\nu(e) i_1},$$

где $\nu(e) = \nu(u^{-1})$. Отсюда следует, что для всех $u \in V_m$ и для п. в. $A$ при $n \to \infty$

$$\theta_u(v, u) = \sum_{y \in \pi(v,u)} r(y) \to \begin{cases} +\infty, & \text{если } D_{\nu(e)i_1} > 0; \\ < +\infty, & \text{если } D_{\nu(e)i_1} < 0. \end{cases} \tag{22}$$

Используя (18) и соотношение (22), получаем, что для п. в. $A$

$$\beta_u(x) = 1 \quad \text{для всех } x \in V_m, \ D_{\nu(e)i_1} > 0$$

и $\beta_v(x)$ стремится к нулю при $n \to \infty$ для любого $x \in G_k$. Это означает, что для п. в. $A$

$$P_A\{\lim_{t \to +\infty} |x(t)| = +\infty\} = 1.$$

Пусть теперь $u = a_{\nu(e)} a_{j_2} \ldots a_{j_m}$ и $\xi_n = \xi^{(j_n)}_{a_{\nu(e)} \ldots a_{j_{n-1}}}$, тогда для п. в. $A$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln r(u) = -D_{\nu(e) i_1}.$$

Отсюда следует, что для всех $v \notin V_{m-1} \cup \mathcal{T}_u^k$ и для п. в. $A$ при $m \to \infty$

$$\theta_u(v, u) = \sum_{y \in \pi(v,u)} r(y) \to \begin{cases} +\infty, & \text{если } D_{\nu(e)i_1} < 0; \\ <+\infty, & \text{если } D_{\nu(e)i_1} > 0. \end{cases} \tag{23}$$

Используя неравенство (19) и соотношение (23), получаем, что для п. в. $A$

$$\beta_v(x) = 1 \quad \text{для всех} \quad x \in V_m, \ D_{\nu(e)i_1} < 0$$

и $\beta_u(x)$ стремится к нулю при $m \to \infty$ для любого $x \in G_k$. Это означает, что для п. в. $A$

$$P_A\{\lim_{t \to +\infty} |x(t)| = +\infty\} = 1.$$

Заметим, что при $D_{\nu(e)i_1} = 0$ частица может оказаться по обе стороны пути $\pi(v, u)$. Так что при $D_{\nu(e)i_1} = 0$ для п. в. $A$

$$P_A\{\lim_{t \to +\infty} \sup |x(t)| = +\infty\} = 1.$$

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

**Теорема 5.** *Для любой траектории* $x(t)$, $t \in T$, *имеют место следующие импликации: при* $i \neq j$

$$D_{ij} \neq 0 \Rightarrow \mathbb{P}\{\lim_{t \to +\infty} |x(t)| = +\infty\} = 1,$$

$$D_{ij} = 0 \Rightarrow \mathbb{P}\{\lim_{t \to +\infty} \sup |x(t)| = +\infty\} = 1.$$

Пусть $\pi$ — двусторонний бесконечный путь.

**Определение 3.** *Случайное блуждание в среде* $A$ *назовем* $\pi$*-невозвратным, если*

$$P_A\{\lim_{t \to +\infty} |x(t)| = +\infty \,|\, x(t) \in \pi\} = 1.$$

**Определение 4.** *Случайное блуждание в среде* $A$ *назовем строго невозвратным, если относительно любого пути оно является* $\pi$*-невозвратным.*

Каждому двустороннему пути $\pi$ можно поставить в соответствие пару чисел $(t(\pi), s(\pi)) \in [0, 1] \times [0, 1]$ [6].

**Определение 5.** *Случайное блуждание в среде* $A$ *назовем* $\tau$*-мерно невозвратным, если* $\lambda(\{(t(\pi), s(\pi)) \in [0, 1] \times [0, 1]$.: *случайное блуждание* $\pi$*-невозвратно*$\}) = \tau$, *где* $\lambda$ *— мера Лебега на* $[0, 1] \times [0, 1]$.

*Если множество* $\{(t(\pi), s(\pi)) \in [0, 1] \times [0, 1]$: *случайное блуждание* $\pi$*-невозвратно*$\}$ *неизмеримо, то блуждание назовем неизмеримо невозвратным.*

Из теоремы 5 следует:

***Следствие* 1.** *Если для* $\pi = \{\ldots, x_{-n}, \ldots, e, \ldots, x_n, \ldots\}$ *среда* $A$ *удовлетворяет условию* $E_P \ln(p_{\nu(x_{-1})}(x)/p_{\nu(x_1)}(x)) \neq 0$, *то случайное блуждание* $\pi$*-невозвратно.*

***Следствие* 2.** *Если* $D = \prod_{i<j} D_{ij} \neq 0$, *то случайное блуждание в случайной среде* $A$ *строго невозвратно.*

**Теорема 6.** *Если для* $A$ *существуют* $i, j$ *такие, что* $D_{ij} \neq 0$, *то случайное блуждание в случайной среде* $A$ $\tau$*-мерно невозвратно, где*

$$\frac{2}{k(k+1)} \leq \tau.$$

***Доказательство.*** Пусть $\Pi$ — множество всевозможных двусторонних путей на $\mathcal{T}^k$, $k \geq 1$. Очевидно, что

$$\lambda(\Pi) = \lambda(\{(t(\pi), s(\pi)) \in [0,1]\times[0,1] : \pi \in \Pi\}) = 1.$$

Для $i \neq j$ обозначим

$$\Pi_{ij} = \{\pi \in \Pi : \pi = \{\ldots, a_i, e, a_j, \ldots\}\}, \qquad i, j = \overline{1, k+1}.$$

Ясно, что $\Pi = \bigcup_{i<j} \Pi_{ij}$ и $\Pi_{ij} \cap \Pi_{i_1 j_1} \neq \varnothing$, если $i \neq i_1$ либо $j \neq j_1$. Нетрудно заметить справедливость равенства

$$\lambda(\Pi) = \sum_{i<j} \lambda(\Pi_{ij}) = \frac{k(k+1)}{2} \lambda(\Pi_{ij}). \tag{24}$$

Из (24) получим

$$\lambda(\Pi_{ij}) = \frac{2}{k(k+1)}. \tag{25}$$

Поскольку $D_{ij} \neq 0$ и любое $\pi \in \Pi_{ij}$ имеет вид $\pi = \{\ldots, a_i, e, a_j, \ldots\}$, то случайное блуждание $\pi$-невозвратно. Тогда из (25) следует, что случайное блуждание в случайной среде $A$, $\frac{2}{k(k+1)} \leq \tau$-мерно невозвратно. Теорема доказана.

***Следствие* 3.** *Если для $s$ различных пар $i, j$ $D_{ij} \neq 0$, то случайное блуждание в случайной среде $A$ $\tau$-мерно невозвратно, где $\tau \geq \frac{2s}{k(k+1)}$, $s = \overline{1, \frac{k(k+1)}{2}}$.*

***Следствие* 4.** *Для того чтобы случайное блуждание в случайной среде $A$ было строго невозвратным, необходимо, чтобы оно было 1-мерно невозвратным.*

Автор выражает благодарность Н. Н. Ганиходжаеву и Ш. К. Форманову за постановку задачи и внимание к работе.

1. *Ганиходжаев Н. Н.* Групповое представление и автоморфизмы дерева Кэли // Докл. АН Республики Узбекистан. – 1994. – № 4. – С. 3 – 5.
2. *Key E. S.* Recurrence and transience criteria for random walk in a random environment // Ann. Probab. – 1984. – **12**, № 2. – P. 529 – 560.
3. *Летчиков А. В.* Асимптотические свойства одномерных случайных блужданий в случайной среде с вероятностью 1 // Мат. сб. –1991. – **182**, № 12. – С. 1710 – 1728.
4. *Летчиков А. В.* Предельная теорема для возвратного случайного блуждания в случайной среде // Докл. АН СССР. – 1989. – **304**, №1. – С. 25 – 28.
5. *Летчиков А. В.* Одна предельная теорема для случайного блуждания в случайной среде // Теория вероятностей и ее применения. – 1988. – **33**, вып. 2. – С. 246 – 256.
6. *Блехер П. М., Ганиходжаев Н. Н.* О чистых фазах модели Изинга на решетке Бете // Там же. – 1990. – **35**, вып. 2. – С. 220 – 230.

Получено 09.06.99