УДК 519.21

Г. Л. Кулініч, Ю. В. Бернацька (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ПРО СТАБІЛІЗАЦІЮ ЕНЕРГІЇ КОНСЕРВАТИВНОЇ СИСТЕМИ, ЗБУРЕНОЇ ВИПАДКОВИМ ПРОЦЕСОМ ТИПУ „БІЛОГО ШУМУ” У ФОРМІ ІТО

We investigate the determined control of behavior of the total energy of simplest conservative nonlinear system with one degree of the freedom without friction in the case of random perturbations by a “white noise” type process in the Ito form. These perturbations act under a fixed angle to the vector of phase velocity of the conservative system.

Досліджується питання детермінованого керування поведінкою повної енергії найпростішої консервативної нелінійної системи з одним степенем вільності, без тертя при випадкових збуреннях процесом типу „білого шуму” у формі Іто, які діють під певним кутом до вектора фазової швидкості консервативної системи.

Найпростішою консервативною системою з одним степенем вільності називають механічну систему без тертя, рух якої описується диференціальним рівнянням другого порядку

$$\ddot{u}(t)-f(u(t)) = 0, \quad u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = \dot{u}_0, \tag{1}$$

де $u_0, \dot{u}_0$ — початкові положення і швидкість системи $(f^2(u_0)+\dot{u}_0^2>0)$, $u(t)$, $\dot{u}(t)$ — положення і швидкість системи в момент часу $t>0$, $f(z)$ — неперервно диференційовна функція, $z\in R^1$ [1].

Рівняння (1) еквівалентне системі диференціальних рівнянь першого порядку

$$\begin{gathered}\dot{x}_1(t) = x_2(t),\\ \dot{x}_2(t) = f(x_1(t)),\\ x_1(0) = u_0, \quad x_2(0) = \dot{u}_0,\end{gathered} \tag{2}$$

де $x_1(t)=u(t), x_2(t)=\dot{u}(t)$.

У прямокутній системі координат X_1OX_2 стан механічної системи в момент часу $t>0$ зображується точкою M з координатами $(x_1(t),x_2(t))$, яка рухається по фазовій траєкторії (лінії рівня повної енергії системи), фазова швидкість зображується вектором $b(x(t))=(x_2(t), f(x_1(t)))$, $x(t)=(x_1(t),x_2(t))$, повна енергія системи (2) має вигляд

$$E(t) = \frac{x_2^2(t)}{2}-\int\limits_0^{x_1(t)} f(z)\,dz.$$

У даній роботі досліджується поведінка зображувальної точки M на фазовій площині X_1OX_2 та поведінка повної енергії у випадку, коли під певним кутом до вектора фазової швидкості системи (2) діють флуктуації типу „білого шуму” у формі Іто, тобто збурений вектор фазової швидкості має вигляд $\left(g_1(t,x(t))b(x(t))+g_2(t,x(t))b^{\perp}(x(t))\right)\dot{w}(t)$, де $\dot{w}(t)$ — „похідна” від вінерівського процесу $w(t)$, $b^{\perp}(x(t)) = (-f(x_1(t)),x_2(t))$, $g_i(t,x)$ — невипадкові дійсні функції, $x=(x_1,x_2)\in R^2$. Відомо [2], що при такому збуренні фазовий „портрет” системи (2) порушується („хаос”), але за допомогою додаткового вектора $a(t,x)=(a_1(t,x),a_2(t,x))$, де $a_i(t,x)$ — невипадкові дійсні функції, можна керувати (детерміноване керування) поведінкою зображувальної точки збуреної системи (2). Тому систему (2) природно замінити системою стохастичних диференціальних рівнянь Іто

$$dx(t) = a(t, x(t))\,dt + \sigma(t, x(t))\,dw(t), \tag{3}$$

де $w(t)$ — одновимірний вінерівський процес, заданий на ймовірнісному просторі (Ω, F, P), $a(t,x) = (a_1(t,x), a_2(t,x))$, $\sigma(t,x) = (\sigma_1(t,x), \sigma_2(t,x))$ — невипадкові векторні функції,

$$\sigma_1(t,x) = g_1(t,x)x_2 - g_2(t,x)f(x_1), \qquad \sigma_2(t,x) = g_1(t,x)f(x_1) + g_2(t,x)x_2,$$

$$x^0 = (x_1^0, x_2^0), \qquad x_1^0 = u_0, \qquad x_2^0 = \dot{u}_0.$$

Якісний аналіз поведінки розв'язку системи (3) та його кореляційної функції при $f(x_1) = -k_2 x_1$, $g_2(t,x) \equiv 0$ для збуреної механічної системи без тертя проведено в роботі [3], а з тертям — в [4].

Для рівняння (3) у даній статті в термінах, виражених через функції $g_i(t,x)$, $a_i(t,x)$, наведено достатні умови, при яких $E(t) = E(0)$ з імовірністю 1 для всіх $t \geq 0$ (наслідок 1 до теореми 2), математичне сподівання $\mathrm{M}E(t) = E(0)$ для всіх $t \geq 0$ (наслідок 3 до теореми 3), стійкість за ймовірністю $E(t)$ (теорема 4). При цьому показано, що вибором функції $a(t,x)$ (детерміноване керування) можна керувати поведінкою $E(t)$.

Далі будемо припускати, що функції $a_i(t,x)$, $g_i(t,x)$ такі, що коефіцієнти рівняння (3) задовольняють умови:

$$A_1) \qquad \exists C > 0: |a(t,x)|^2 + |\sigma(t,x)|^2 \leq C\left[1 + |x|^2\right];$$

$$A_2) \quad \forall N > 0 \quad \exists C_N: |a(t,x) - a(t,y)|^2 + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)|^2 \leq C_N |x-y|^2$$

$$\text{при} \quad |x| \leq N, \ |y| \leq N.$$

Відомо [5], що умови $A_1), A_2)$ гарантують існування єдиного неперервного з імовірністю 1 сильного розв'язку $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ рівняння (3).

Розглянемо деяку відкриту область $D \subseteq R^2$, припустимо, що $x^0 \in D$, і позначимо через $\tau_D(x^0)$ момент першого виходу розв'язку рівняння $x(t)$ з області D (тобто $\tau_D(x^0) = \inf(t: x(t) \overline{\in} D)$ і $\tau_D(x^0) = \infty$, якщо $\inf(t: x(t) \overline{\in} D) = \varnothing$). Крім того, будемо притримуватись таких позначень:

$$I_1(t,x) = (b^{\perp}(x), a(t,x)) + \frac{1}{2}\left[-f'(x_1)\sigma_1^2(t,x) + \sigma_2^2(t,x)\right],$$

$$I_2(t,x) = (b^{\perp}(x), a(t,x)) + \frac{1}{2} g_1^2(t,x)\left[-f'(x_1)x_2^2 + f^2(x_1)\right],$$

$$G(x) = \frac{x_2^2}{2} - \int_0^{x_1} f(z)\,dz \quad (E(t) = G(x(t))),$$

$(\cdot,\cdot)$ — скалярний добуток, $\nabla G(x) = (G'_{x_1}(x), G'_{x_2}(x))$, $\tau_t = \min(t, \tau_D(x^0))$.

Зауважимо, що криві $G(x) = G(x^0)$ при $x \in D$ є локальними фазовими траєкторіями рівняння (2).

Оскільки функція $G(x)$ двічі неперервно диференційовна, то згідно з формулою Іто для процесу $G(x(t))$, де $x(t)$ — розв'язок рівняння (3), при всіх $t \geq 0$ справедлива з імовірністю 1 рівність

$$E(t) = E(0) + \int_0^t \{(\nabla G(x(s)), a(s,x(s))) + \frac{1}{2}\big[G''_{x_1x_1}(x(s))\sigma_1^2(s,x(s)) +$$

$$+ 2G''_{x_1x_2}(x(s))\sigma_1(s,x(s))\sigma_2(s,x(s)) + G''_{x_2x_2}(x(s))\sigma_2^2(s,x(s))\big]\} ds + \qquad (4)$$

$$+ \int_0^t (\nabla G(x(s)), \sigma(s,x(s)))\, dw(s)) =$$

$$= E(0) + \int_0^t I_1(s,x(s))ds + \int_0^t g_2(s,x(s))\,|\,b(x(s))\,|^2\, dw(s).$$

З рівності (4) випливають такі твердження.

Теорема 1. *Якщо* $g_2(t,x)=0$ *в області* $[0,\infty)\times D$, *то з імовірністю* 1

$$\int_0^{\tau_t} m(s)\,ds \le E(\tau_t) - E(0) \le \int_0^{\tau_t} M(s)\,ds,$$

де

$$m(t) = \inf_{x\in D} I_2(t,x), \qquad M(t) = \sup_{x\in D} I_2(t,x).$$

Справді, при $g_2(t,x)=0$ в області $[0,\infty)\times D$ рівність (4) при $t=\tau_t$ набуває вигляду

$$E(\tau_t) - E(0) = \int_0^{\tau_t} I_2(s,x(s))ds,$$

з якого випливає твердження теореми.

Теорема 2. *Якщо в області* $[0,\infty)\times D$ *виконуються рівності*: 1) $g_2(t,x) = 0$; 2) $I_2(t,x) = \alpha(t,x)G(x)$, *де* $\alpha(t,x)$ — *неперервно диференційовна функція, то з імовірністю* 1

$$E(\tau_t) = E(0)\exp\left\{\int_0^{\tau_t} \alpha(s,x(s))ds\right\}.$$

Дійсно, у цьому випадку рівність (4) набуває вигляду

$$E(\tau_t) = E(0) + \int_0^{\tau_t} \alpha(s,x(s))E(s)ds,$$

з якого випливає твердження теореми.

***Наслідок* 1.** *Якщо в умовах теореми* 2 $\alpha(t,x) = 0$ *в області* $[0,\infty)\times D$, *то при* $t < \tau_D(x^0)$ *з імовірністю* 1 *виконується рівність* $E(t) = E(0)$, *тобто зображувальна точка системи* (3) *„дифундує" по фазовій траєкторії системи* (2) *до моменту першого виходу з області* D (*в області* D *фазові траєкторії системи* (2) *є локально інваріантними кривими системи* (3) [2]). *Якщо, крім того,* $\tau_D(x^0) = \infty$ *з імовірністю* 1, *то* $E(t) = E(0)$ *з імовірністю* 1 *при всіх* $t \ge 0$.

***Наслідок* 2.** *Нехай* $\tau_D(x^0) = \infty$ *з імовірністю* 1. *Якщо в області* $[0,\infty)\times D$:

1) $\left|\int_0^t \alpha(s,x)ds\right| \le C$, *то для всіх* $t\ge 0$ $|E(t)| \le |E(0)|\exp\{C\}$;

2) $$\lim_{t\to\infty}\int_0^t \sup_{x\in D}\alpha(s,x)ds = -\infty, \text{ то } E(t)\to 0 \text{ при } t\to\infty;$$

3) $$\lim_{t\to\infty}\int_0^t \inf_{x\in D}\alpha(s,x)ds = \infty, \text{ то } |E(t)|\to\infty \text{ при } t\to\infty.$$

***Зауваження* 1.** Зокрема, якщо в області $[0,\infty)\times D$:

1) $$a(t,x) = \frac{1}{2}g_1^2(t,x)\left(f(x_1), x_2 f'(x_1)\right), \text{ то } I_2(t,x)=0;$$

2) $$a(t,x) = \left(\frac{1}{2}f(x_1)g_1^2(t,x)+\alpha(t,x)G(x)\frac{1}{|b(x)|^2}f(x_1), \frac{1}{2}x_2 f'(x_1)g_1^2(t,x)-\right.$$
$$\left.-\alpha(t,x)G(x)\frac{1}{|b(x)|^2}x_2\right),$$

то $I_2(t,x)=\alpha(t,x)G(x)$;

3) $$a(t,x) = \left(\frac{1}{2}g_1^2(t,x)f(x_1)+\alpha(t,x)G(x)f(x_1), \frac{1}{2}g_1^2(t,x)x_2 f'(x_1)-\right.$$
$$\left.-\alpha(t,x)G(x)x_2\right),$$

то $I_1(t,x)=\alpha(t,x)|b(x)|^2G(x)$.

Теорема 3. *Якщо* $I_1(t,x)=0$ *в області* $[0,\infty)\times D$ *і* $|f(x_1)|\le \le C\left(1+|x_1|^m\right)$ *при деякому цілому* $m\ge 0$, *то*

$$ME(\tau_t) = E(0).$$

Доведення. Згідно з рівністю (4)

$$E(\tau_t) = E(0)+\int_0^{\tau_t} g_2(s,x(s))|b(x(s))|^2dw(s) \tag{5}$$

з імовірністю 1. Враховуючи умови $A_1), A_2)$, маємо [5], що $M|x(t)|^l<\infty$ для довільного цілого $l\ge 0$; крім цього, легко встановлюється нерівність $g_2^2(t,x)|b(x)|^4\le C\left[1+|x|^l\right]$ для деяких сталих $C>0$ і $l\ge 0$. Оскільки τ_t — марковський момент і $\tau_t\le t$ з імовірністю 1, то

$$M\int_0^{\tau_t} g_2^2(s,x(s))|b(x(s))|^4ds < \infty \tag{6}$$

і тому [5]

$$M\int_0^{\tau_t} g_2(s,x(s))|b(x(s))|^2dw(s) = 0.$$

З цієї рівності і з (5) випливає твердження теореми.

Наслідок 3. *Якщо виконуються умови теореми* 3 *і* $\tau_D(x^0)=\infty$ *з імовірністю* 1, *то*

$$ME(t) = E(0) \qquad \forall t\ge 0.$$

Дійсно, в цьому випадку $\tau_t=t$ з імовірністю 1 і, враховуючи (5), отримуємо твердження наслідку.

Теорема 4. *Нехай* $D = R^2$, $|f(x_1)| \le C(1+|x_1|^m)$ *при деякому цілому* $m \ge \ge 0$ *і* $E(t) \ge 0$ *з імовірністю* 1 *для всіх* $t \ge 0$. *Якщо* $I_1(t,x) \le 0$ *в області* $[0,\infty)\times R^2$, $E(0) < \delta$ *для деякого* $\delta > 0$, *то для довільного* $\varepsilon > 2\delta$

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{t\ge 0} E(t) < \varepsilon\right\} \ge 1 - \frac{2\delta}{\varepsilon}.$$

Доведення. Оскільки існує неперервний розв'язок $x(t)$ рівняння (3) на проміжку $[0,T]$ для довільного $T > 0$, то $\tau_D(x^0) = \infty$ з імовірністю 1. Тому з рівності (4) отримуємо нерівність

$$E(t) \le E(0) + \zeta(t) \tag{7}$$

з імовірністю 1 для всіх $t \ge 0$, де

$$\zeta(t) = \int_0^t g_2(s, x(s))|b(x(s))|^2 dw(s).$$

Зрозуміло, що в цьому випадку має місце нерівність (6) при $\tau_t = t$ і тому $\zeta(t)$ — інтегровний з квадратом мартингал, для якого згідно з (7) виконується нерівність $\zeta(t) \ge -E(0)$ з імовірністю 1 для всіх $t \ge 0$. Отже [6], для довільного $\varepsilon > > 0$

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{t\ge 0} \zeta(t) > \varepsilon\right\} \le \frac{E(0)}{\varepsilon}.$$

Оскільки $E(0) < \dfrac{\varepsilon}{2}$, то, враховуючи (7), маємо

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{t\ge 0} E(t) > \varepsilon\right\} \le \mathrm{P}\left\{\sup_{t\ge 0} \zeta(t) > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \le \frac{2E(0)}{\varepsilon} \le \frac{2\delta}{\varepsilon}.$$

З цієї нерівності випливає твердження теореми.

Теорема 5. *Нехай у рівнянні* (3) $g_i(t,x) = g_i(x)$, $a_i(t,x) = a_i(x)$, *в області* D *функції* $g_i(x)$ *неперервно диференційовні і* $\sigma_1^2(x) + \sigma_2^2(x) > 0$. *Тоді існує двічі неперервно диференційовна в області* D *функція* $G(x)$ *така, що як тільки для вектора* $a(x)$ *виконується в області* D *рівність*

$$(\nabla G(x), a(x)) + \frac{1}{2}\left[G''_{x_1x_1}(x)\sigma_1^2(x) + 2G''_{x_1x_2}(x)\sigma_1(x)\sigma_2(x) + G''_{x_2x_2}(x)\sigma_2^2(x)\right] = 0, \tag{8}$$

то

$$G(x(t)) = G(x^0) \qquad \forall t < \tau_D(x^0).$$

Доведення. Твердження теореми означає, що криві $G(x) = G(x^0)$ при $x^0 \in D$ є локально інваріантними кривими рівняння (3). Відомо [2], що для локальної інваріантності таких кривих при всіх $x^0 \in D$ необхідно та досить виконання в області D рівності (8) і рівності

$$(\nabla G(x), \sigma(x)) = 0. \tag{9}$$

Рівність (9) означає, що функція $G(x)$ є локальним (в області D) загальним інтегралом диференціального рівняння

$$-\sigma_2(x)dx_1 + \sigma_1(x)dx_2 = 0,$$

тобто це рівняння повинно бути рівнянням в повних диференціалах:

$$G'_{x_1}(x) = -\sigma_2(x), \qquad G'_{x_2}(x) = \sigma_1(x),$$

але при цьому в області D повинна виконуватись рівність

$$(-\sigma_2(x))'_{x_2} = (-\sigma_2(x))'_{x_1}.$$

Якщо ця рівність має місце, то теорему доведено. Якщо ця рівність не виконується, то відомо [7], що за умови $\sigma_1^2(x) + \sigma_2^2(x) > 0$ існує неперервно диференційовний в області D інтегруючий множник $\mu(x) \neq 0$ такий, що рівняння

$$-\mu(x)\sigma_2(x)dx_1 + \mu(x)\sigma_1(x)dx_2 = 0$$

є рівнянням у повних диференціалах. Тобто існує двічі неперервно диференційовна функція $G(x)$, для якої в області D $G'_{x_1}(x) = -\mu(x)\sigma_2(x)$, $G'_{x_2}(x) = \mu(x)\sigma_1(x)$, і виконується рівність (9). Теорему доведено.

Зауваження 2. Якщо $g_2(x) = 0$ в області D (збурення „білим шумом" відбувається вздовж вектора фазової швидкості системи (2)), то в цьому випадку $\mu(x) = g_1^{-1}(x)$, $G'_{x_1}(x) = -f(x_1)$, $G'_{x_2}(x) = x_2$, і за умови (8) на функцію $a(x)$ фазові траєкторії рівняння (2) є локально інваріантними кривими рівняння (3). Отже, збурення вздовж вектора фазової швидкості рівняння (2) є однією з необхідних та достатніх умов для збереження локального фазового портрету системи (2).

Приклад 1. Нехай $f(x_1) = -\sin x_1$ ((1) — рівняння коливання маятника), $D = R^2$. Отже, $G(x) = \dfrac{x_2^2}{2} + 1 - \cos x_1 \geq 0$ і для рівняння (3) $\tau_D(x^0) = \infty$ з імовірністю 1 для довільного $x^0 \in D$. Якщо в області $[0, \infty) \times R^2$:

1) $g_2(t,x) = 0,\ a(t,x) = \dfrac{1}{2} g_1^2(t,x)(-\sin x_1, -x_2\cos x_1),$

то $I_2(t,x) = 0$, і згідно з наслідком 1 $E(t) = E(0)$ з імовірністю 1 для всіх $t \geq 0$ (фазові траєкторії рівняння (2) є інваріантними кривими рівняння (3));

2) $g_2(t,x) = 0,\ a(t,x) = \dfrac{1}{2} g_1^2(t,x)(-2\sin x_1, -x_2(\cos x_1 + 1)),$

то $I_2(t,x) = -\left[\sin^2 x_2 + x_2^2\right] \leq 0$, і згідно з теоремою 2 $E(t) \leq E(0)$ з імовірністю 1 для всіх $t \geq 0$;

3) $$g_1(t,x) = g_2(t,x),\ a(t,x) =$$

$$= -\frac{g_1^2(t,x)}{2}(\sin x_1(\cos x_1 + 1), x_2(\cos x_1 + 1) + 2\sin x_1(\cos x_1 - 1)),$$

то $I_1(t,x) = 0$, і згідно з теоремою 3 $\mathrm{M}E(t) \leq E(0)$ для всіх $t \geq 0$;

4) $$g_1(t,x) = g_2(t,x),\ a(t,x) =$$

$$= -\frac{g_1^2(t,x)}{2}(\sin x_1 \cos x_1, x_2\cos x_1 + 2\sin x_1(\cos x_1 - 1)),$$

$$\frac{x_2^2(0)}{2} + 1 - \cos x_1(0) < \delta,$$

то $I_1(t,x) = -\left(\sin^2 x_1 + x_2^2\right) \le 0$, і згідно з теоремою 4 $\mathrm{P}\left\{\sup\limits_{t\ge 0} E(t) < \varepsilon\right\} \ge 1 - \dfrac{2\delta}{\varepsilon}$ $(\forall \varepsilon > 2\delta)$ (отже, точки $(0, 2n\pi)$ положення рівноваги системи (2) є стійкими за ймовірністю для системи (3)).

Приклад 2. Нехай $f(x_1) = x_1$, $D = R^2 \setminus \{0, 0\}$. Отже, фазові траєкторії рівняння (2) є гіперболами вигляду $x_2^2 - x_1^2 = C$. Розглянемо збурення цього рівняння при $g_1(t,x) = 0$, $g_2(t,x) = g_2(x) \ne 0$ (збурення „білим шумом" перпендикулярне до вектора фазової швидкості рівняння (2)) і отримаємо рівняння (3). У цьому випадку

$$\sigma_1^2(t,x) + \sigma_2^2(t,x) = g_2^2(x)\left[x_1^2 + x_2^2\right] > 0 \quad \text{і} \quad \tau_D(x^0) = \infty \text{ з імовірністю } 1$$

для рівняння (3) при довільному $x^0 \in D$. Тому згідно з теоремою 5 існує двічі неперервно диференційовна функція $G(x)$ і керуючий вектор функції $a(x)$ такі, що $G(x(t)) = G(x^0)$ з імовірністю 1, де $x(t)$ — розв'язок рівняння (3) з відповідним коефіцієнтом $a(x)$. Використовуючи метод доведення теореми 5, одержуємо, що в даному випадку

$$\mu(x) = \frac{1}{g_2^2(x)}, \qquad G(x) = x_1 \cdot x_2, \qquad a(x) = -\frac{1}{2} g^2(x)(x_1, x_2).$$

(Отже, в цьому прикладі інваріантними кривими рівняння (3) є гіперболи, які отримуються поворотом фазових траєкторій рівняння (2) на кут $\pi/2$.)

1. *Андронов А. А., Вит А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний. – М.: Наука, 1981. – 568 с.
2. *Kulinich G. L., Pereguda O. V.* Phase picture of the diffusion processes with the degenerate diffusion matrices // Random Oper. and Stochast. Equat. – 1997. – **5**, № 3. – P. 203–216.
3. *Kulinich G. L.* Qualitative analysis of the influence of random perturbation on the phase velocity of the harmonic oscillator // Ibid. – 1995. – **3**, № 2. – P. 141–152.
4. *Кулініч Г. Л.* Якісний аналіз впливу на гармонічний осцилятор з тертям збурень типу „білого шуму" вздовж вектора фазової швидкості // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 1. – С. 36–47.
5. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения. – К.: Наук. думка, 1968. – 354 с.
6. *Гихман И. И.* Дифференциальные уравнения со случайными функциями // Зимн. шк. по теории вероятностей и мат. статистике. – К.: Ин-т математики НАН Украины, 1964. – 63 с.
7. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1976. – 702 с.

Одержано 04.04.2000