УДК 513.88: 517.98

С. В. Тищенко (Киев. нац. ун-т им. Т. Шевченко)

О НЕКОТОРОМ КЛАССЕ МАТРИЧНЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ $*$-АЛГЕБР

We study the matrix algebra $M_n(U)$, where U is a commutative topological nuclear entire (bounded, analytic) $*$-algebra. We prove that $M_n(U)$ is also a topological nuclear entire (bounded, analytic) $*$-algebra.

Вивчається алгебра матриць $M_n(U)$, де U — комутативна топологічна ядерна ціла (обмежена, аналітична) $*$-алгебра. Доводиться, що $M_n(U)$ також буде топологічною ядерною цілою (обмеженою, аналітичною) $*$-алгеброю.

Введение. Естественным обобщением коммутативных алгебр являются матричные алгебры над коммутативными и алгебры матриц-функций на топологическом пространстве (многообразии), которые сочетают в себе свойства коммутативных алгебр и матричных алгебр над полем комплексных чисел C. О важности класса матричных алгебр над коммутативными свидетельствует следующий факт: при определенных условиях на исходную алгебру она становится изоморфной матричной алгебре над своим центром [1]. В работах [2, 3] определяется класс коммутативных топологических $*$-алгебр, для которого изучаются представления неограниченными операторами из алгебры $L_+(D)$ [4]. При этом для получения основных результатов в [2, 3] существенное значение имеют топологическое условие ядерности алгебры, обеспечивающее применение к семейству операторов представления проекционной спектральной теоремы [5], и условие квазианалитичности (ограниченности, целости, аналитичности) элементов алгебры, позволяющее доказать существенную самосопряженность операторов представления, отвечающих эрмитовым элементам алгебры.

В настоящей работе изучается класс матричных алгебр над коммутативными топологическими ядерными целыми (ограниченными, аналитическими) $*$-алгебрами U. Доказывается, что матричные алгебры $M_n(U)$ также принадлежат к соответствующему алгебре U классу.

Основные определения и понятия. Пусть $(H_\tau)_{\tau\in T}$ (T — произвольное индексирующее множество) — семейство комплексных гильбертовых пространств со скалярными произведениями $(\cdot,\cdot)_\tau := (\cdot,\cdot)_{H_\tau}$ и нормами $\|\cdot\|_\tau := \|\cdot\|_{H_\tau}$. Предполагается, что: а) множество $\Phi = \bigcap_{\tau\in T} H_\tau$ плотно в каждом H_τ; б) семейство $(H_\tau)_{\tau\in T}$ направлено по вложению: $\forall\tau_1,\tau_2\in T$ $\exists\tau_3\in T$: $H_{\tau_3}\subset H_{\tau_1}$, $H_{\tau_3}\subset H_{\tau_1}$, причем вложения топологические. Введем на Φ проективную топологию относительно семейства гильбертовых пространств $(H_\tau)_{\tau\in T}$ и естественных вложений $O_\tau\colon \Phi\to H_\tau$. В качестве системы базисных окрестностей этой топологии принимается совокупность всех шаров

$$U(\varphi_1;\tau;\varepsilon) = \left\{\varphi\in\Phi\colon \|\varphi-\varphi_1\|_\tau<\varepsilon,\quad \varphi_1\in\Phi,\ \tau\in T,\ \varepsilon>0\right\}.$$

Так построенное пространство Φ называется проективным пределом семейства $(H_\tau)_{\tau\in T}$ и обозначается $\operatorname{pr\,lim}_{\tau\in T} H_\tau$. Пространство $\Phi = \operatorname{pr\,lim}_{\tau\in T} H_\tau$ называется ядерным [6, с. 21], если для каждого $\tau\in T$ найдется $\tau'\in T$ такое, что вложение $H_{\tau'}\to H_\tau$ квазиядерное (оператор вложения Гильберта – Шмидта) $*$-алгебра A называется топологической $*$-алгеброй, если A — топологическое линейное пространство над полем действительных или комплексных чисел, отображение $A' f\to f^*\in A$ (инволюция) непрерывно, а отображение $A \times A$ ' $(f, g) \to f \cdot g \in A$ (умножение) является раздельно непрерывным [7, с. 201]. Элемент f топологической алгебры A называется целым, если для всех $\lambda > 0$ множество $\{(\lambda, f)^n / n! \in A \colon n = 1, 2, \ldots\}$ является ограниченным в A. Топологическая алгебра, в которой каждый элемент является целым, называется топологической целой [2]. Определения топологических алгебр, состоящих соответственно из ограниченных, аналитических и квазианалитических элементов, приведены в [2].

Основной результат работы. Теорема. *Пусть U — коммутативная топологическая ядерная целая (ограниченная, аналитическая) $*$-алгебра. Тогда матричная алгебра $A = M_n(U)$ также является топологической ядерной целой (ограниченной, аналитической) $*$-алгеброй.*

Доказательство. Приведем подробное доказательство теоремы для класса топологических ядерных целых $*$-алгебр (относительно других классов см. замечание в конце работы). Рассмотрим каждое из утверждений теоремы в отдельности.

1. Очевидно, что $A = M_n(U)$ является $*$-алгеброй над полем комплексных чисел C с обычными линейными операциями над матрицами $F = (f_{ij})_{i,j=1}^n$, $G = (g_{ij})_{i,j=1}^n$, матричным умножением и инволюцией $(f_{ij})_{i,j=1}^n = F \mapsto F^* = (f_{ji}^*)_{j,i=1}^n$. На множестве $M_n(U)$ введем структуру топологического пространства, являющегося проективным пределом гильбертовых. Для этого при каждом $\alpha = (\tau_{ij})_{i,j=1}^n \in \Gamma := T^{n \times n}$ (или, что то же, $\tau_{ij} \in T$ для всех $i, j = 1, 2, \ldots, n$) введем гильбертово пространство H_α матричнозначных функций $F = (f_{ij})_{i,j=1}^n$, $G = (g_{ij})_{i,j=1}^n$ ($f_{ij}, g_{ij} \in H_{ij} := H_{\tau_{ij}}$), в котором скалярное произведение и норму определим формулами $(F, G)_\alpha := \sum_{i,j=1}^n (f_{ij}, g_{ij})_{ij}$, $\|F\|_\alpha^2 := \sum_{i,j=1}^n \|f_{ij}\|_{ij}^2$. Имеем семейство гильбертовых пространств $(H_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$. Множество $\bigcap_{\alpha \in \Gamma} H_\alpha = \bigcap_{i,j=1}^n M_n(H_{ij}) = M_n\left(\bigcap_{i,j=1}^n H_{ij}\right) = M_n(U)$ является плотным в каждом H_α, поскольку U плотно в каждом H_{ij}. Семейство гильбертовых пространств $(H_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$, очевидно, также направлено по вложению:

$$\forall \alpha^{(1)}, \alpha^{(2)} \in \Gamma \;\; \exists \alpha^{(3)} \in \Gamma \colon \; H_{\alpha^{(3)}} \subset H_{\alpha^{(1)}}, \; H_{\alpha^{(3)}} \subset H_{\alpha^{(2)}},$$

причем вложения топологические.

2. Проверим, что линейное топологическое пространство $A = M_n(U) = \operatorname{pr} \lim_{\alpha \in \Gamma} H_\alpha$ является ядерным, т. е. для него выполняется условие: для каждого $\alpha \in \Gamma$ найдется $\alpha' \in \Gamma$ такое, что вложение $H_{\alpha'} \to H_\alpha$ квазиядерное. Действительно, поскольку алгебра U является ядерной топологической, то $U = \operatorname{pr} \lim_{\tau \in T} H_\tau$, и выполняется условие ядерности для проективного предела. Рассмотрим локально-выпуклое топологическое пространство $A = \operatorname{pr} \lim_{\alpha \in \Gamma} H_\alpha$, которое, как множество, совпадает с пересечением $\bigcap_{\alpha \in \Gamma} H_\alpha$ гильбертовых пространств H_α. Базис окрестностей нуля в A образуют множества $W(0; \alpha, \delta) = \{F \in U \colon \|F\|_\alpha < \delta\}$ при произвольных $\alpha \in \Gamma$ и $\delta > 0$. Проверим выполнение условия ядерности для пространства A. Поскольку пространство $U = \operatorname{pr} \lim_{\tau \in T} H_\tau$ является ядерным, то для каждого $\tau_{ij} \in T$ найдется $\tau'_{ij} \in T$ такое, что оператор вложения $O_{ij} \colon H_{\tau'_{ij}} \to H_{\tau_{ij}}$ квазиядерный, т. е. норма Гильберта – Шмидта $|O_{ij}|$ оператора вложения O_{ij} конечна. Введем обозначение $\alpha' := (\tau'_{ij})_{i,j=1}^n \in \Gamma$. Тогда норма Гильберта–Шмидта оператора вложения $O_\alpha : H_{\alpha'} \to H_\alpha$ также конечна: $|O_\alpha|^2 = \sum_{i,j=1}^n |O_{ij}|^2 < \infty$, что и обеспечивает квазиядерность вложения $H_{\alpha'} \to H_\alpha$.

3. Докажем, что A является топологической $*$-алгеброй, т. е. умножение и инволюция являются непрерывными операциями в A. Действительно, учитывая непрерывность операций умножения и инволюции в исходной алгебре U, можно записать следующие оценки для этих операций: $\| f_{ik} g_{kj} \|_{ij} \leq c_{ij}^{(k)} \| f_{ik} \|_{ik} \| g_{kj} \|_{kj}$ и $\| f_{ji}^* \|_{ji} \leq c_{\alpha,\alpha^{(1)}} \| f_{ji} \|_{\tau_{ji}^{(1)}}$, в которых при произвольных фиксированных $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$ $c_{ij}^{(k)}$, $c_{\alpha,\alpha^{(1)}}$ — постоянные; $f_{ik} \in H_{ik}$, $g_{kj} \in H_{kj}$, $f_{ji}^* \in H_{ji}$, $f_{ji} \in H_{\tau_{ji}^{(1)}}$, $\tau_{ji} \in \alpha$, $\tau_{ji}^{(1)} \in \alpha^{(1)}$. Теперь для элементов F и G матричной алгебры $M_n(U)$ в силу неравенства Коши – Шварца получаем

$$\| F \cdot G \|_\alpha^2 = \sum_{i,j=1}^n \left\| \sum_{k=1}^n f_{ik} g_{kj} \right\|_{ij}^2 \leq \sum_{i,j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \| f_{ik} g_{kj} \|_{ij} \right)^2 \leq$$

$$\leq \sum_{i,j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n c_{ij}^{(k)} \| f_{ik} \|_{ik} \| g_{kj} \|_{kj} \right)^2 \leq \left(\max_{i,j} \left(\max_k c_{ij}^{(k)} \right)^2 \right) \sum_{i,j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \| f_{ik} \|_{ik} \| g_{kj} \|_{kj} \right)^2 \leq$$

$$\leq K \left(\sum_{i,k=1}^n \| f_{ik} \|_{ik}^2 \right) \left(\sum_{k,j=1}^n \| g_{kj} \|_{kj}^2 \right) = K \| F \|_{\alpha_1}^2 \| G \|_{\alpha_2}^2,$$

где $K := \left(\max_{i,j} \left(\max_k c_{ij}^{(k)} \right)^2 \right)$, $\alpha_1 := (\tau_{ik})_{i,k=1}^n$, $\alpha_2 := (\tau_{kj})_{k,j=1}^n$. Окончательно имеем $\| F \cdot G \|_\alpha^2 \leq K \| F \|_{\alpha_1}^2 \| G \|_{\alpha_2}^2$, где постоянная K не зависит от F и G. Последнее неравенство означает, что умножение в A является непрерывным. Повторно применяя это неравенство для произвольного $F \in A$ и $G = F$, получаем

$$\| F^m \|_\alpha^2 = \left\| \underbrace{F \cdot F \cdot \ldots \cdot F}_{m} \right\|_\alpha^2 \leq \left(K \| F \|_{\alpha_2}^2 \right)^{m-1} \| F \|_{\alpha_1}^2.$$

Отсюда для любого $\lambda > 0$ имеем оценку

$$\lim_{m \to \infty} \frac{1}{m!} \| (\lambda F)^m \|_\alpha^2 \leq \| F \|_{\alpha_1}^2 \lim_{m \to \infty} \frac{\lambda^{2m}}{m!} \left(K \| F \|_{\alpha_2}^2 \right)^{m-1} = 0.$$

Это означает, что произвольный элемент F топологической алгебры $A = \operatorname{pr} \lim_{\alpha \in \Gamma} H_\alpha$ является целым. В результате убеждаемся, что алгебра A является ядерной топологической целой.

Поскольку

$$\| F^* \|_\alpha^2 = \sum_{j,i=1}^n \| f_{ji}^* \|_{ij}^2 \leq \sum_{j,i=1}^n \left(c_{\alpha,\alpha^{(1)}} \| f_{ji} \|_{\tau_{ji}^{(1)}} \right)^2 \leq K_1 \| F \|_{\alpha^{(1)}}^2,$$

где $K_1 := \max_{\alpha,\alpha^{(1)}} c_{\alpha,\alpha^{(1)}}^2$, $\alpha^{(1)} := \left(\tau_{ji}^{(1)} \right)_{j,i=1}^n$, то инволюция $*$ является непрерывным оператором в шкале пространств H_α, а значит, является непрерывным оператором в алгебре A.

Замечание. Доказательство теоремы в случае, когда U — (коммутативная топологическая ядерная) ограниченная или аналитическая $*$-алгебра, немногим отличается от приведенного выше. Фактически необходимо лишь доказать непрерывность умножения $F \cdot G$ в топологии проективного предела, оценка же для степени элемента F получается автоматически из непрерывности умножения.

1. *Krupnik N., Silberman B.* The structure of some Banach algebras fulfilling a standart identity // Math. Nachr. – 1989. – **142**. – P. 175 – 180.
2. *Яковлев В. С.* О представлениях некоторых коммутативных ядерных $*$-алгебр // Укр. мат. журн. – 1987. – **39**, № 2. – С. 235 – 243.
3. *Березанский Ю. М.,Ласснер Г., Яковлев В. С.* О разложении положительных функционалов на коммутативных ядерных $*$-алгебрах // Там же. – № 5. – С. 638 – 641.
4. *Lassner G.* Topological algebras of operators // Rept. Math. Phys. – 1979. – **3**, № 4. – P. 279 – 293.
5. *Березанский Ю. М.* Проекционная спектральная теорема // Успехи мат. наук. – 1984. – **39**, № 4. – С. 3 – 52.
6. *Березанский Ю. М.* Самосопряженные операторы в пространствах функций бесконечного числа переменных. – К.: Наук. думка, 1978. – 360 с.
7. *Наймарк М. А.* Нормированные кольца. – М.: Наука, 1968. – 664 с.

Получено 12.07.2000,
после доработки — 17.11.2000