УДК 512.544

Л. Ю. Боднарчук (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка),
О. С. Пилявська (НаУКМА, Київ)

ПРО ІСНУВАННЯ У p-ГРУП НЕВНУТРІШНЬОГО АВТОМОРФІЗМУ ПОРЯДКУ p

We obtain some sufficient conditions for the existence of noninner automorphism of order p for finite p-groups. We show that groups of order p^n ($n < 7$, p is a prime number, $p > 3$) possess the noninner automorphism of order p.

Отримано деякі достатні умови існування невнутрішнього автоморфізму порядку p для скінченних p-груп. Показано, що групи порядку p^n ($n < 7$, p — просте число, $p > 3$) мають невнутрішній автоморфізм порядку p.

Вступ. Нехай p — просте непарне число, $p > 3$, і G — скінченна p-група.

В Коуровському зошиті [1] Я. Беркович поставив задачу (4.13): *довести, що скінченна неабелева p-група допускає невнутрішній автоморфізм порядку p.*

Контрприклади до гіпотези Я. Берковича невідомі, але те, що ця проблема є досить складною, підтверджує такий приклад, знайдений авторами при дослідженні груп порядку p^6:

група

$$\Phi_8(42) = \langle a, b \mid [a, b] = a^p,\ b^{p^3} = a^{p^2};\ a^{p^3} = 1 \rangle,$$

має лише єдиний невнутрішній автоморфізм φ порядку p — єдиний в тому розумінні, що будь-який інший невнутрішній автоморфізм ξ порядку p може бути записаний як $\xi = \varphi^r \psi$, де ψ — внутрішній автоморфізм і $1 \le r < p$. (Більш детально ця група розглядається в [2].)

Відома теорема Гашютца [3] стверджує, що порядок групи зовнішніх автоморфізмів будь-якої скінченної p-групи, порядок якої більше p, ділиться на p. Але з неї не випливає існування невнутрішнього автоморфізму саме порядку p.

Сильним засобом при дослідженні p-груп на наявність невнутрішнього автоморфізму порядку p є така теорема.

Теорема 1 [4, с. 403]. *Якщо G — p-група і має нормальний дільник H такий, що $|G/H| = p$, і $Z(H) \subseteq Z(G)$, то існує невнутрішній автоморфізм групи G порядку p.*

Так серед 42 сімей ізоклінності, на які розбиваються неабелеві групи порядку p^n ($n < 7$) (див. [5]), в 31 сім'ї ізоклінності всі групи сім'ї задовольняють умови цієї теореми і, отже, мають невнутрішній автоморфізм порядку p.

Перевірка умов теореми 1 для груп порядку p^n ($n < 7, p > 3$) наводиться в п. 1. При дослідженні p-груп використовувались списки груп порядку p^6 Р. Джеймса [5] та О. Пилявської [6].

Нагадаємо, що p-група називається регулярною (див. [7, с. 205]), якщо для будь-яких двох елементів a та b і будь-якого $q = p^n$ має місце рівність

$$(ab)^q = a^q b^q S_1^q S_2^q \ldots S_t^q,$$

де $S_1, S_2, \ldots, S_t$ — відповідні елементи комутанта групи, породженої елементами a та b. Група порядку p^n завжди є регулярною при $p \ge n$, або коли клас нільпотентності групи менший за p.

Для регулярних груп знайдено узагальнення (теорема 3) теореми 1 на випадок $Z(H) \supset Z(G)$. Доведення теореми 3 безпосередньо вказує, як за підгрупою H та деяким елементом $x \in Z(H)$ побудувати шуканий автоморфізм, користуючись так званою стандартною системою твірних та визначальних співвідношень групи G. Означення стандартної системи твірних та визначальних співвідношень p-групи, а також доведення того факту, що кожну скінченну p-групу можна задати стандартною системою (теорема 2), наводиться в п. 2.

Теорема 4 також дає деякі достатні умови існування невнутрішнього автоморфізму порядку p, які для конкретних груп є значно зручнішими для перевірки, ніж умови теореми 3. Доведення теореми 4 аналогічне доведенню теореми 3.

Доведення теореми 3 і теорема 4 наводяться в п. 3. Там же показано, що всі неабелеві групи порядку p^n $(n < 7, p > 3)$, для яких не виконуються умови теореми 1, задовольняють умови теореми 3, і, отже, також мають невнутрішній автоморфізм порядку p. Нерегулярні групи порядку p^n $(n < 7, p > 3)$, а саме групи порядку 5^6, що мають клас нільпотентності 5, задовольняють умови теореми 1, а отже, мають невнутрішній автоморфізм порядку 5. Таким чином, показано, що кожна неабелева група порядку p^n $(n < 7, p > 3)$ має невнутрішній автоморфізм порядку p. Для абелевих груп, що не є циклічними порядку p, існування такого автоморфізму очевидне.

1. Групи G, H називаються ізоклінними ($G \approx H$) (див. [8]), якщо існують ізоморфізми $\theta\colon G/Z(G) \to H/Z(H)$ і $\varphi\colon G_2 \to H_2$ такі, що $\varphi([a, b]) = [a', b']$ для будь-яких $a, b \in G$, де a', b' визначаються із співвідношень $a'Z(H) = \theta(aZ(G))$.

Очевидно, що відношення ізоклінності є відношенням еквівалентності, і можна розглядати класи еквівалентності за цим відношенням. Класи еквівалентності називають *сім'ями ізоклінності*.

Легко бачити, що всі скінченні абелеві p-групи ізоклінні між собою і утворюють сім'ю ізоклінності.

Згідно з результатами Р. Джеймса [5] та. Т. Естерфілда [9], множина груп порядку p^6 розбивається на 43 сім'ї ізоклінності, які будемо позначати Φ_1, $\Phi_2, \ldots, \Phi_{43}$. Через Φ_1 позначатимемо сім'ю абелевих груп.

31 сім'я з 42 неабелевих сімей, що містять групи порядку p^6, мають таку властивість: всі групи порядку p^6 даної сім'ї ізоклінності задовольняють умови теореми 1 і, отже, мають невнутрішній автоморфізм порядку p. Список цих сімей, а також відповідні підгрупи H та центри $Z(G), Z(H)$ наведено в табл. 1. Для задання груп користуємось класифікацією груп порядку p^n $(n < 7)$ за Р. Джеймсом [5].

Зауваження. Групи останніх п'яти сімей і тільки вони з усіх груп порядку p^6 мають клас нільпотентності 5 і є нерегулярними при $p = 5$.

Таким чином, всі нерегулярні групи порядку p^6 при $p > 3$ мають невнутрішній автоморфізм порядку p.

2. Нам будуть потрібні такі властивості комутаторів:

Лема 1 [4] (пп. III, 1.2; 1.3) 1. $[a, bc] = [a, c][a, b]^c$, $[ab, c] = [a, c]^b[b, c]$.

2. *Якщо комутатор* $[a, b]$ *комутує з* a, n *— ціле, то* $[a^n, b] = [a, b]^n$.

3. *Якщо комутатор* $[a, b]$ *комутує з* a *і* b, *то для будь-якого натурального* n

$$(ab)^n = a^n b^n [a,b]^{C_n^2}, \quad \text{де} \quad C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Нехай $G = G_1 \geq G_2 \geq \ldots \geq G_r = 1$ — нижній центральний ряд групи G. Як відомо [4] (п. III. 1.9), $G_k = \langle [x_1, \ldots, x_k] \rangle$, де для довільних $x_i \in G$ під $[x_1, \ldots, x_k]$ розуміємо $[\ldots [x_1, x_2], x_3], \ldots, x_k]$.

Таблиця 1

Сім'я	H	$Z(G)$	$Z(H)$
Φ_3	$\langle \alpha, \alpha_2, \alpha_3, \{\gamma\}\rangle$	$\langle \alpha_3, \{\gamma\}\rangle$	$\langle \alpha_3, \{\gamma\}\rangle$
Φ_4	$\langle \alpha, \alpha_1^p, \alpha_2, \beta_1, \beta_2\rangle$	$\langle \alpha_1^p, \beta_1, \beta_2, \{\gamma\}\rangle$	$\langle \alpha_1^p, \beta_1, \beta_2, \{\gamma\}\rangle$
Φ_6	$\langle \alpha_1^p, \alpha_2, \beta, \beta_1, \beta_2\rangle$	$\langle \alpha_1^p, \beta_1, \beta_2\rangle$	$\langle \alpha_1^p, \beta_1, \beta_2\rangle$
Φ_9	$\langle \alpha, \alpha_1^p, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\rangle$	$\langle \alpha_1^p, \alpha_4\rangle$	$\langle \alpha_1^p, \alpha_4\rangle$
Φ_{10}	$\langle \alpha, \alpha_1^p, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\rangle$	$\langle \alpha_1^p, \alpha_4\rangle$	$\langle \alpha_1^p, \alpha_4\rangle$
Φ_{11}	$\langle \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3\rangle$	$\langle \beta_1, \beta_2, \beta_3\rangle$	$\langle \beta_1, \beta_2, \beta_3\rangle$
Φ_{12}	$\langle \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2\rangle$	$\langle \gamma_1, \gamma_2\rangle$	$\langle \gamma_1, \gamma_2\rangle$
Φ_{13}	$\langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2\rangle$	$\langle \beta_1, \beta_2\rangle$	$\langle \beta_1, \beta_2\rangle$
Φ_{15}	$\langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2\rangle$	$\langle \beta_1, \beta_2\rangle$	$\langle \beta_1, \beta_2\rangle$
Φ_{16}	$\langle \alpha, \alpha_2, \alpha_3, \beta, \gamma\rangle$	$\langle \alpha_3, \gamma\rangle$	$\langle \alpha_3, \gamma\rangle$
Φ_{17}	$\langle \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \gamma\rangle$	$\langle \alpha_3, \gamma\rangle$	$\langle \alpha_3, \gamma\rangle$
Φ_{18}	$\langle \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \gamma\rangle$	$\langle \alpha_3, \gamma\rangle$	$\langle \alpha_3, \gamma\rangle$
Φ_{19}	$\langle \alpha_1, \alpha_2, \beta, \beta_1, \beta_2\rangle$	$\langle \beta_1, \beta_2\rangle$	$\langle \beta_1, \beta_2\rangle$
Φ_{20}	$\langle \alpha_1, \alpha_2, \beta, \beta_1, \beta_2\rangle$	$\langle \beta_1, \beta_2\rangle$	$\langle \beta_1, \beta_2\rangle$
Φ_{21}	$\langle \alpha_1, \alpha_2, \beta, \beta_1, \beta_2\rangle$	$\langle \beta_1, \beta_2\rangle$	$\langle \beta_1, \beta_2\rangle$
Φ_{22}	$\langle \alpha, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2\rangle$	$\langle \alpha_3\rangle$	$\langle \alpha_3\rangle$
Φ_{23}	$\langle \alpha, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \gamma\rangle$	$\langle \alpha_4, \gamma\rangle$	$\langle \alpha_4, \gamma\rangle$
Φ_{24}	$\langle \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\rangle$	$\langle \alpha_4\rangle$	$\langle \alpha_4\rangle$
Φ_{27}	$\langle \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\rangle$	$\langle \alpha_4\rangle$	$\langle \alpha_4\rangle$
Φ_{28}	$\langle \alpha, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\rangle$	$\langle \alpha_4\rangle$	$\langle \alpha_4\rangle$
Φ_{29}	$\langle \alpha, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\rangle$	$\langle \alpha_4\rangle$	$\langle \alpha_4\rangle$
Φ_{30}	$\langle \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\rangle$	$\langle \alpha_4\rangle$	$\langle \alpha_4\rangle$
Φ_{31}	$\langle \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma\rangle$	$\langle \gamma\rangle$	$\langle \gamma\rangle$
Φ_{32}	$\langle \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma\rangle$	$\langle \gamma\rangle$	$\langle \gamma\rangle$
Φ_{33}	$\langle \alpha, \alpha_1, \beta_1, \beta_2, \gamma\rangle$	$\langle \gamma\rangle$	$\langle \gamma\rangle$
Φ_{34}	$\langle \alpha, \alpha_1, \beta_1, \beta_2, \gamma\rangle$	$\langle \gamma\rangle$	$\langle \gamma\rangle$
Φ_{35}	$\langle \alpha, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\rangle$	$\langle \alpha_5\rangle$	$\langle \alpha_5\rangle$
Φ_{36}	$\langle \alpha, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\rangle$	$\langle \alpha_5\rangle$	$\langle \alpha_5\rangle$
Φ_{37}	$\langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\rangle$	$\langle \alpha_4, \alpha_5\rangle$	$\langle \alpha_4, \alpha_5\rangle$
Φ_{38}	$\langle \alpha, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\rangle$	$\langle \alpha_5\rangle$	$\langle \alpha_5\rangle$
Φ_{39}	$\langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\rangle$	$\langle \alpha_5\rangle$	$\langle \alpha_5\rangle$

Кожна скінченна p-група — нільпотентна [7] (п. 10.3.4). Через m будемо позначати клас нільпотентності групи G. При проведенні обчислень в нільпотентних групах широко застосовується запропонований М. Холлом збиральний процес [7], який визначається для слів, складених з базисних комутаторів. Базисні комутатори та їх вага визначаються таким чином.

Означення [7] (розд. 11.1). 1. *Нехай* $\{x_1, \ldots, x_k\}$ — *система твірних групи* G. *Тоді* $c_i = x_i$, $i = 1, \ldots, k$, — *базисні комутатори ваги* 1, $\omega(x_i) = 1$. *Вважаємо, що вони впорядковані за індексами. Нехай базисні комутатори* c_i *меншої ваги вже визначені і впорядковані. Тоді базисними комутаторами ваги* n *є комутатори* $c_k = [c_i, c_j]$ *де* c_i, c_j — *базисні комутатори, сума ваг* $\omega(c_i) + \omega(c_j) = n$ *і* $\omega(c_i) > \omega(c_j)$; *а якщо* $c_i = [c_s, c_t]$ *то* $\omega(c_j) \geq \omega(c_s)$.

2. *Комутатори меншої ваги передують комутаторам більшої ваги. Комутатори однакової ваги впорядковані довільним чином. Вважаємо, що базисні комутатори перенумеровані так, що вони впорядковані за індексами.*

У даній роботі для задання конкретних груп та проведення обчислень використовується зручна система твірних, яку ми будемо називати *стандартною*.

Означення. *Систему твірних групи назвемо стандартною, якщо*:

1) $c_1, \ldots, c_k$ — *мінімальна породжуюча система,*

2) $c_{k+1}, \ldots, c_t$ — *множина всіх базисних комутаторів ваги* ≥ 2, *впорядкованих за вагою.*

В такій системі твірних визначальні співвідношення групи також набирають досить зручного вигляду. Цей вигляд описує теорема 2.

Через F позначимо вільну групу з вільними твірними $y_1, \ldots, y_k$, через W — відносно вільну групу з вільною породжуючою множиною $\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_k$. Нагадаємо, що група називається *відносно вільною* (див. [10], п. 13.11), якщо вона має таку породжуючу множину, що кожне її відображення в цю групу можна продовжити до деякого ендоморфізму. Група W є відносно вільною тоді і тільки тоді, коли вона має одну з таких властивостей (див. [10], теорема 13.2):

1) W має множину твірних таку, що кожне співвідношення між цими твірними є тотожністю в W (ця множина твірних називається вільною породжуючою множиною);

2) W може бути зображена як фактор-група $W = F/V$ вільної групи F за деякою її вербальною підгрупою V.

Нагадаємо, що *вербальною підгрупою* V *групи* G, що відповідає множині слів $w_1, w_2, \ldots, w_r$, називається підгрупа, породжена всіма значеннями в G слів з множини $\{w_1, w_2, \ldots, w_r\}$.

Вербальними підгрупами вільної групи, наприклад, є:

1) група n-х степенів; вона задається єдиним словом x^n;

2) k-й член нижнього центрального ряду; породжується всіма значеннями слова $[x_1, \ldots, x_k]$.

Зрозуміло, що добуток вербальних підгруп є також вербальною підгрупою.

Теорема 2. *Якщо* G — *скінченна* p-*група, то* G *має стандартну систему твірних* $c_1, \ldots, c_k, c_{k+1}, \ldots, c_t$, *де* $c_1, \ldots, c_k$ — *базисні комутатори ваги* 1, *і визначальні співвідношення можна записати у вигляді* $c_1^{p\lambda_1} c_2^{p\lambda_2} \ldots c_k^{p\lambda_k} = c_{k+1}^{\lambda_{k+1}} \ldots c_t^{\lambda_t}$.

Доведення. Нехай $|G| = p^n$, G — нільпотентна група класу нільпотентності m, $m < n$, і має експоненту p^d, $d \leq n$. Нехай $a_1, \ldots, a_k$ — деяка мінімальна система породжуючих групи $G, F = \langle y_1, \ldots, y_k \rangle$ — вільна група з k вільними породжуючими. Тоді існує епіморфізм $\varphi : F \to G$ такий, що $y_i \to a_i$.

Розглянемо групу $W = F/V$, де

$$V = F_{m+1}\Omega_{p^d}(F),$$

F_{m+1} — $(m+1)$-й член нижнього центрального ряду групи F, який є вербальною підгрупою, породженою значеннями слова $[x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}]$; $\Omega_{p^d}(F)$ — вербальна підгрупа, породжена значеннями слів x^{p^d}.

W є відносно вільною групою класу нільпотентності m і експоненти p^d з k породжуючими. Всі елементи групи W задовольняють тотожності $x^{p^d} = 1$, $[x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}] = 1$.

Позначимо через $\eta: F \to W = F/V$ природний гомоморфізм групи F на W, $\bar{y}_i = \eta(y_i) = y_i V$. Задамо відображення $\psi: \bar{y}_i \to a_i$, $i = 1, \ldots, k$. Згідно з [10] (п. 14.4), якщо $\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_k$ — вільна породжуюча множина відносно вільної групи $W = F/V$, G — деяка група, в якій мають місце всі тотожності, які виконуються в W, то будь-яке відображення вільних твірних $\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_k$ групи W в групу G може бути продовжене до гомоморфізму. Продовжимо відображення $\psi: \bar{y}_i \to a_i$, $i = 1, \ldots, k$, до гомоморфізму $\psi: W \to G$. При цьому для будь-якого $f \in F$ виконується $\varphi(f) = \psi(\eta(f))$. Оскільки $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — система породжуючих G, то $\psi: W \to G$ є епіморфізмом, отже, $G \cong W/N$, де N — нормальний дільник W. Очевидно, якщо слово $w(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_k) \in N$, то $w(a_1, a_2, \ldots, a_k) = 1$. Множину всіх слів w таких, що $w(a_1, a_2, \ldots, a_k) = 1$, можна подати як наслідок об'єднання двох підмножин:

$$a_i^{p^d} = 1, \quad [a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_{m+1}}] = 1, \tag{1}$$

де $i = 1, 2, \ldots, k$, $i_j = 1, 2, \ldots, k$, $j = 1, 2, \ldots, m+1$, та

$$w_1(a_1, \ldots, a_k) = 1, \ldots, w_j(a_1, \ldots, a_k) = 1, \ldots, w_r(a_1, \ldots, a_k) = 1. \tag{2}$$

Співвідношення (1) — визначальні співвідношення групи W, а співвідношення (2) задаються словами $w_1(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_k), \ldots, w_r(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_k)$, що утворюють деяку систему твірних групи $N \lhd W$.

Дослідимо структуру слів $w_j(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_k)$. Оскільки $W = F/V = F/(F_{m+1}\Omega_{p^d}(F))$, а згідно з [7] (теорема 11.2.4) довільний елемент f групи F однозначно записується у вигляді $f = c_1^{\lambda_1} c_2^{\lambda_2} \ldots c_t^{\lambda_t} (\mathrm{mod}\, F_{m+1})$, де $c_1, c_2, \ldots, c_t$ — множина усіх базисних комутаторів ваги $1, 2, \ldots, m$ групи F, то кожен елемент $w \in W$ задається у вигляді

$$w = \bar{y}_1^{\lambda_1} \ldots \bar{y}_k^{\lambda_k} \bar{c}_{k+1}^{\lambda_{k+1}} \ldots \bar{c}_t^{\lambda_t} = \bar{c}_1^{\lambda_1} \ldots \bar{c}_t^{\lambda_t},$$

де $\bar{c}_i$ — образи базисних комутаторів c_i групи F. (Тут і далі $c_1 = y_1, \ldots, c_k = y_k$.)

Враховуючи, що всі співвідношення в групі W є наслідками тотожностей $x^{p^d} = 1$, $[x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}] = 1$ і інших немає, одержуємо, що w однозначно задається у вигляді

$$w = \bar{y}_1^{\lambda_1} \ldots \bar{y}_k^{\lambda_k} \bar{c}_{k+1}^{\lambda_{k+1}} \ldots \bar{c}_t^{\lambda_t}, \quad 0 \le \lambda_t < p^d, \quad i = 1, \ldots, t. \tag{3}$$

Дослідимо співвідношення $w_t(a_1, \ldots, a_k) = 1$ групи G. Позначимо через $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_t$ образи базисних комутаторів $c_{k+1}, c_{k+2}, \ldots, c_t$ групи F. Очевидно, що $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_t$ — базисні комутатори групи G і $a_i = \varphi(c_i) = \psi(\bar{c}_i)$, де $\bar{c}_i$ — базисні комутатори групи W. З (3) випливає, що співвідношення $w_t(a_1, \ldots, a_k) = 1$ можна записати так:

$$a_1^{\lambda_1} \ldots a_k^{\lambda_k} a_{k+1}^{\lambda_{k+1}} \ldots a_t^{\lambda_t} = 1, \quad \text{або} \quad a_1^{\lambda_1} \ldots a_k^{\lambda_k} = (a_{k+1}^{\lambda_{k+1}} \ldots a_t^{\lambda_t})^{-1}.$$

Оскільки у правій частині слово від базисних комутаторів ваги ≥ 2, то, застосовуючи збиральний процес (див. [7], п. 11.1), одержуємо

$$a_1^{\lambda_1} \dots a_k^{\lambda_k} = a_{k+1}^{\nu_{k+1}} \dots a_t^{\nu_t}, \quad 0 \leq \lambda_t < p^d.$$

Отже, всі співвідношення групи G можна записати у вигляді

$$a_1^{\nu_1} \dots a_k^{\nu_k} = a_{k+1}^{\nu_{k+1}} \dots a_t^{\nu_t}, \quad \nu_i = \lambda_i \quad \text{при} \quad i = 1, \dots, k. \tag{4}$$

Покажемо, що $\nu_i \equiv 0 \pmod p$ при $i = 1, \dots, k$. Припустимо, що це не так. Не порушуючи загальності будемо вважати, що $i = 1$, $\nu_1 \not\equiv 0 \pmod p$. Тоді існує ціле число s таке, що $s\nu_1 \equiv 1 \pmod p$. Співвідношенню (4) відповідає слово $w = w_j(\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_k) = \bar{c}_1^{\nu_1} \dots \bar{c}_k^{\nu_k} \bar{c}_{k+1}^{\lambda_{k+1}} \dots \bar{c}_t^{\lambda_t}$ групи N.

Застосовуючи збиральний процес, одержуємо

$$w_j^s(\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_k) = \bar{c}_1 \bar{c}_2^{\sigma_1} \dots \bar{c}_k^{\sigma_k} \bar{c}_{k+1}^{\sigma_{k+1}} \dots \bar{c}_t^{\sigma_t}.$$

Слово $w = w_j(\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_k)$ задає твірний елемент групи N, яка має систему твірних

$$\{w_1, w_2, \dots, w_{j-1}, w_j, w_{j+1}, \dots, w_r\}. \tag{5}$$

Система

$$\{w_1, w_2, \dots, w_{j-1}, w_j^s, w_{j+1}, \dots, w_r\} \tag{6}$$

також є системою твірних групи N, оскільки (6) є наслідком системи (5), і навпаки. Отже, група G може бути задана набором співвідношень $w_1(a_1, \dots$ $\dots, a_k) = 1, \dots, w_j^s(a_1, \dots, a_k), \dots, w_r(a_1, \dots, a_k) = 1$ і співвідношеннями (1). Але співвідношення $w_j^s(a_1, \dots, a_k) = 1$ має вигляд $a_1 a_2^{\sigma_1} \dots a_k^{\sigma_k} a_{k+1}^{\sigma_{k+1}} \dots a_t^{\sigma_t} = 1$ і може бути розв'язане відносно a_1:

$$a_1 = a_2^{-\sigma_2} \dots a_k^{-\sigma_k} u, \quad u \in G_2.$$

Оскільки a_1 зображується через $a_2, \dots, a_k, u$, то $\{a_2, \dots, a_k, u\}$ є системою породжуючих групи G. Відомо [7] (теореми 10.4.3; 10.4.1), що кожен елемент комутанта можна вилучити з будь-якої системи твірних; при цьому елементи, що залишились, породжуватимуть всю групу G. Отже, система $\{a_2, \dots, a_k\}$ є системою породжуючих групи G, що суперечить мінімальності системи $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$. Одержана суперечність доводить, що у співвідношеннях вигляду (4) при $i = 1, \dots, k$ виконується $\nu_i \equiv 0 \pmod p$. Теорему доведено.

3. Можливість задання будь-якої p-групи твірними та визначальними співвідношеннями, вказаними в теоремі 2, буде використано при доведенні наступної теореми, яка, як і теорема 1, дає достатню умову існування зовнішнього автоморфізму порядку p.

Теорема 3. *Нехай G — неабелева p-група і виконуються такі умови*:

1) *група G — регулярна*;

2) *існує H: $G \triangleright H$, $|G/H| = p$*;

3) *існує x: $|x| = p$, $x \in Z(H)$, $x \neq [a, \nu]$, де $a \notin H$, $\nu \in Z(H)$.*

Тоді G має зовнішній автоморфізм порядку p.

Доведення. Нехай $a_1, \dots, a_k$ — мінімальна система породжуючих групи G. Скористаємось зображенням G з теореми 2:

$$G = \langle a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_t \mid a_1^{\lambda_{i1} p} \dots a_k^{\lambda_{ik} p} = a_{k+1}^{\lambda_{i,k+1}} \dots a_t^{\lambda_{it}}, \ i = 1, \dots, n \rangle.$$

Не втрачаючи загальності вважатимемо $a_1 = a \notin H$, $a_2, \ldots, a_t \in H$.

Задамо відображення φ:

$$a_1 \to a_1' = a_1 x,$$
$$a_2 \to a_2' = a_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_k \to a_k' = a_k.$$

Для базисних комутаторів $a_{k+1}, \ldots, a_t$ покладемо $\varphi(a_s) = [\varphi(a_j), \varphi(a_i)]$, якщо $a_s = [a_j, a_i]$, де $s > k$, $i < j < s \leq t$. Покажемо, що при цьому виконується $\varphi(a_s) = a_s$. Дійсно, оскільки $a_s = [a_j, a_i]$, де $s > k$, $i < j < s \leq t$, то при $i = 1$ маємо $\varphi(a_s) = [\varphi(a_j), \varphi(a_1)] = [a_j, a_1 x] = [a_j, x][a_j, a_1]^x = [a_j, a_1] = a_s$, тому що $a_j \in H$, $x \in Z(H)$. При $i \neq 1$ $\varphi(a_s) = [\varphi(a_j), \varphi(a_i)] = [a_j, a_i] = a_s$.

Продовжимо φ на інші елементи групи G, що задані як впорядковані добутки $g = a_1^{\mu_1} \ldots a_k^{\mu_k} a_{k+1}^{\mu_{k+1}} \ldots a_t^{\mu_t}$, за правилом $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$. Покажемо, що це відображення визначено коректно. Для нього спочатку перевіримо, що φ зберігає визначальні співвідношення $w_t(a_1, \ldots, a_t) = 1$ і для будь-яких $g_1, g_2 \in G$ $\varphi(g_1)\varphi(g_2) = \varphi(g_1 g_2)$. Таким чином ми одержимо, що значення $\varphi(g)$ не залежить від способу зображення елемента g як добутку базисних комутаторів.

Перевіримо, що φ зберігає визначальні співвідношення $w_i(a_1, \ldots, a_t) = 1$, тобто $\varphi(w_i(a_1, \ldots, a_t)) = w_i(\varphi(a_1) \ldots \varphi(a_t)) = 1$, де

$$w_i(a_1, \ldots, a_t) = a_1^{\lambda_{i1}p} \ldots a_k^{\lambda_{ik}p} (a_{k+1}^{\lambda_{i,k+1}} \ldots a_k^{\lambda_{it}})^{-1}.$$

Дійсно,

$$\varphi(a_1^{\lambda_{i1}p} \ldots a_k^{\lambda_{ik}p}) = \varphi(a_1)^{\lambda_{i1}p} \ldots \varphi(a_k)^{\lambda_{ik}p} =$$
$$= \varphi(a_1)^{\lambda_{i1}p} a_2^{\lambda_{i2}p} \ldots a_k^{\lambda_{ik}p} = (a_1 x)^{\lambda_{i1}p} a_2^{\lambda_{i2}p} \ldots a_k^{\lambda_{ik}p} = a_1^{\lambda_{i1}p} a_2^{\lambda_{i2}p} \ldots a_k^{\lambda_{ik}p}.$$

Обгрунтуємо останню рівність. З умови $|G/H| = p$ випливає, що $G_2 \subset H$, а оскільки $x \in Z(H)$, то комутує з усіма комутаторами. Таким чином,

$$(a_1 x)^p = a_1^p x^p [x, a_1]^{C_p^2} [x, a_1, a_1]^{C_p^3} \ldots [x, a_1, \ldots, a_1]^{C_p^n}.$$

Внаслідок регулярності групи G всі показники степеня при комутаторах мають ділитися на p, тобто ланцюжок комутаторів обірветься раніше, ніж з'явиться член степеня $C_p^p = 1$. Оскільки x комутує з усіма комутаторами, то за лемою 1 степінь можна внести під знак комутатора: $[x, a_1, \ldots, a_1]^{C_p^j} = [x^{C_p^j}, a_1, \ldots, a_1]$. Оскільки за умовою $x^p = 1$ і p ділить всі числа C_p^α, $\alpha = 2, \ldots, p-1$, то $x^{C_p^\alpha} = 1$, звідки $(a_1 x)^p = a_1^p$.

З іншого боку,

$$\varphi(a_{k+1}^{\lambda_{i,k+1}} \ldots a_t^{\lambda_{it}}) = \varphi(a_{k+1})^{\lambda_{i,k+1}} \ldots \varphi(a_t)^{\lambda_{it}} = a_{k+1}^{\lambda_{i,k+1}} \ldots a_t^{\lambda_{it}}.$$

Враховуючи, що $a_1^{\lambda_{i1}p} \ldots a_k^{\lambda_{ik}p} = a_{k+1}^{\lambda_{i,k+1}} \ldots a_t^{\lambda_{it}}$, маємо $\varphi(a_1^{\lambda_{i1}p} \ldots a_k^{\lambda_{ik}p}) = \varphi(a_{k+1}^{\lambda_{i,k+1}} \ldots a_t^{\lambda_{it}})$, або $w_i(\varphi(a_1) \ldots \varphi(a_t)) = 1$.

Перевіримо, що $\varphi(g_1)\varphi(g_2) = \varphi(g_1 g_2)$ для будь-яких $g_1, g_2 \in G$. Справді, якщо

$$g_1 = a_1^{\alpha_1} \dots a_t^{\alpha_t}, \quad g_2 = a_1^{\beta_1} \dots a_t^{\beta_t}$$

і

$$g_1 g_2 = a_1^{\alpha_1} \dots a_t^{\alpha_t} a_1^{\beta_1} \dots a_t^{\beta_t} = a_1^{\gamma_1} \dots a_t^{\gamma_t},$$

то, застосовуючи збиральний процес і враховуючи, що $w_i(\varphi(a_1)\dots\varphi(a_t)) = \varphi(w_i(a_1, \dots, a_t))$ і $w_i(a_1, \dots, a_t) = 1$ — визначальні співвідношення групи G, маємо

$$\varphi(g_1)\varphi(g_2) = (\varphi(a_1))^{\alpha_1} \dots (\varphi(a_t))^{\alpha_t} (\varphi(a_1))^{\beta_1} \dots (\varphi(a_t))^{\beta_t} =$$

$$= (\varphi(a_1))^{\gamma_1} \dots (\varphi(a_t))^{\gamma_t} \prod_i w_i(\varphi(a_1) \dots \varphi(a_t)) =$$

$$= (\varphi(a_1))^{\gamma_1} \dots (\varphi(a_t))^{\gamma_t} \prod_i \varphi(w_i(a_1 \dots a_t)) = (\varphi(a_1^{\gamma_1} \dots a_t^{\gamma_t})) = \varphi(g_1 g_2).$$

Отже, гомоморфізм φ визначено коректно.

Покажемо, що φ — оборотний. Розглянемо відображення ψ:

$$a_1' \to a_1'' = a_1' x^{-1},$$
$$a_1' \to a_2'' = a_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_k' \to a_k'' = a_k.$$

Аналогічно поширивши його на всі елементи $g \in G$, можна показати, що ψ — гомоморфізм. Легко перевірити, що $\varphi\psi = 1$. Отже, φ — автоморфізм.

Покажемо, що φ має порядок p. Спочатку покажемо, що $\varphi(x) = x$. Нехай $x = a_1^{\lambda_1} \dots a_t^{\lambda_t}$. Оскільки $x \in H$, $a_1 \notin H$ і $|G/H| = p$, то $\lambda_1 = p\lambda$. Тоді $\varphi(x) = ((\varphi(a_1)^p)^\lambda a_2^{\lambda_2} \dots a_t^{\lambda_t}) = ((\varphi(a_1)^p)^\lambda \varphi(a_2)^{\lambda_2} \dots \varphi(a_t)^{\lambda_t})$. Але $(\varphi(a_1))^p = (a_1 x)^p = a_1^p$, отже, $\varphi(x) = a_1^{p\lambda} a_2^{\lambda_2} \dots a_t^{\lambda_t} = a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \dots a_t^{\lambda_t} = x$. Розглянемо $\varphi^p(g)$:

$$\varphi^p(g) = \varphi^p(a_1^{\alpha_1} \dots a_t^{\alpha_t}) = \varphi^{p-1}((a_1 x)^{\alpha_1} \dots a_t^{\alpha_t}) = \dots (a_1 x^p)^{\alpha_1} \dots a_t^{\alpha_t} = g.$$

Доведемо, що φ — зовнішній. Припустимо, що φ — нетривіальний внутрішній, тобто існує $\nu \in G \backslash Z(G)$ такий, що $\varphi(g) = \nu^{-1} g \nu$ для всіх $g \in G$. Тоді оскільки $\varphi(h) = h$ для всіх $h \in H$, то $h^\nu = h$, тобто $\nu \in C(H) \backslash Z(G)$.

Проаналізуємо, яким в даній ситуації може бути нормалізатор $C(H)$. Можливі дві ситуації: $C(H) = Z(H)$ та $C(H) = \langle a, Z(H) \rangle = Z(G)$. Доведемо останню рівність. Якщо $a \in C(H)$, то a комутує з кожним елементом $h \in H$, а отже, і з $Z(H)$. Таким чином, $C(H) = \langle a, Z(H) \rangle$ — абелева група, всі елементи $C(H)$ комутують з a і з групою H, а отже, і з групою G, тому що $G = \langle a, H \rangle$.

У першому випадку $C(H) \backslash Z(G) = Z(H) \backslash Z(G)$, а в другому $C(H) \backslash Z(G) = Z(G) \backslash Z(G) = 1$. Отже, існування неодиничного елемента ν можливе лише у випадку $C(H) = Z(H)$. З іншого боку, $\varphi(a) = ax = \nu^{-1} a \nu$, звідки $x = [a, \nu]$, де $\nu \in Z(H) \backslash Z(G)$, що суперечить умові теореми. Отже, φ — зовнішній автоморфізм порядку p. Теорему доведено.

Наслідок. *Якщо регулярна p-група G задовольняє умови теореми* 1, *то вона задовольняє і умови теореми* 3.

Запис $\{c\}$ означає: якщо елемент c є в переліку твірних G, то він є і одним з твірних групи H. Групи $\Phi_{40}-\Phi_{43}$ беруться за списком О. Пилявської, інші — за списком Р. Джеймса.

Групи, де H і x вибираються дещо іншим чином, подано в табл. 3.

Таблиця 3

Сім'я	Група	H	x
Φ_5	$\Phi_5(2211)_a$	$H=\langle\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\beta\rangle$	$x=\alpha_4$
Φ_8	$\Phi_8(32)$	$H=\langle\alpha_2,\beta\rangle$	$x=\alpha_2{}^p$
	$\Phi_8(42)$	$H=\langle\alpha_1,\alpha_2^p,\beta\rangle$	$x=\alpha_2^{p^2}\beta^{-1}$
	$\Phi_8(33)$	$H=\langle\alpha_1,\alpha_2^p,\beta\rangle$	$x=\alpha_2^{p^2}$

Крім вказаних в табл. 3 існують ще 4 серії груп сімей Φ_8 порядку p^6: $\Phi_8(321)_b$, $\Phi_8(321)_{c_r}$, $\Phi_8(321)_{c_{p-1}}$, $\Phi_8(222)$. Ці групи задовольняють умови теореми 2: $|G/H|=p$, $Z(H)=\langle\gamma\rangle=Z(G)$, якщо H вибрати таким чином: $H=\langle\alpha_1^p,\alpha_2,\beta\rangle$ або $H=\langle\alpha_1^p,\alpha_2,\beta,\gamma\rangle$.

Відмітимо, що для $\Phi_5(2211)_a$ при перенумерації твірних $\alpha_1:=\alpha_3$, $\alpha_3:=\alpha_1$, $\alpha_2:=\alpha_4$, $\alpha_4:=\alpha_2$ задання підгрупи H та елемента x збігатимуться з загальним заданням H і x, вказаним вище для всієї сім'ї.

З порівняння таблиць 1 – 3 випливає, що всі неабелеві групи порядку p^6 $(p>3)$ задовольняють умови теореми 1 або теореми 3, і, таким чином, мають зовнішній автоморфізм порядку p.

1. *Коуровская тетрадь*. – Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1980. – 114 с.
2. *Боднарчук Л. Ю., Пилявська О. С.* Деякі класи p-груп з зовнішнім автоморфізмом порядку p // Наук. зап. НаУКМА. – 2000. – **18** (спец. випуск), ч. 2. – С. 372 – 374.
3. *Gashutz W.* Nichtabelshe p-Gruppen basitzen ausere p-automorphismen // J. Algebra. – 1966. – P. 1 – 2.
4. *Huppert B.* Endliche Gruppen, 1. – Berlin: Springer, 1967. – 798 p.
5. *James R.* The groups of order p^6 (p — an odd prime) // Math. Comp. – 1980. – **34**, № 150. – P. 613 – 637.
6. *Пилявская О.* Классификация групп порядка p^6, $p>3$. – М., 1983. – 63 с. – Деп. в ВИНИТИ, № 1877-83.
7. *Холл М.* Теория групп. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 468 с.
8. *Hall P.* The classification of prime power groups // J. Math. – 1940. – **182**. – P. 130 – 141.
9. *Easterfield T. A.* Classification of groups of order p^6: Ph. D Dissertation. – Cambridge, 1940.
10. *Нейман Х.* Многообразия групп. – М.: Мир, 1969. – 264 с.

Одержано 01.06.2000