УДК 512.552.12

Б. В. Забавський (Львів. нац. ун-т)

ФАКТОРІАЛЬНИЙ АНАЛОГ ДИСТРИБУТИВНИХ ОБЛАСТЕЙ БЕЗУ

We investigate the Bézout domains in which an arbitrary maximally nonprincipal right ideal is two-sided. In the case of $At(R)$ Bézout domains,we show that an arbitrary maximally nonprincipal right ideal which is two-sided is also a maximally nonprincipal left ideal.

Досліджуються області Безу, в яких довільний максимально неголовний правий ідеал є двобічним. У випадку $At(R)$ областей Безу показано, що довільний максимально неголовний правий ідеал, який є двобічним, є максимально неголовним лівим ідеалом.

Важливу роль в теорії кілець відіграють дистрибутивні кільця. В даний час як „елементарні" об'єкти, до яких зводиться вивчення більш складних, у багатьох випадках використовуються дистрибутивні кільця. Хоча слід відмітити, що у випадку некомутативних кілець класи некомутативних дистрибутивних кілець є дуже вузькими і спеціальними. Наприклад, праві дистрибутивні області Безу можна визначити як області Безу, в яких довільний максимальний правий ідеал є двобічним [1]. Звідси ми бачимо, що область головних ідеалів, взагалі кажучи, не є дистрибутивною.

В даній статті автор розглядає класи кілець, які узагальнюють дистрибутивні області Безу, на основі вивчення структури максимально неголовних правих ідеалів.

П. Кон в [2] вивчав праві головні області Безу, які справа є областями головних правих ідеалів. А в роботі [3] побудовано приклади таких областей. Хоча, як відмічається в [4], такі області є або областями головних лівих ідеалів, або лівими і правими примітивними кільцями. Ці результати спричинили автора на дослідження наведеного узагальнення дистрибутивних кілець, тобто розгляду областей Безу, в яких довільний максимально неголовний правий ідеал є двобічним.

У роботі [1] описано дистрибутивні області Безу як області Безу, в яких довільний максимальний правий ідеал є двобічним, а також показано, що в таких дистрибутивних областях довільний максимальний правий ідеал є максимальним лівим ідеалом і, навпаки, довільний максимальний лівий ідеал таких областей є двобічним і максимальним правим ідеалом. У даній статті досліджуються області Безу, в яких довільний максимально неголовний правий ідеал є двобічним, а також показано, що у випадку квазіатомної області Безу довільний максимально неголовний правий ідеал, який є двобічним, є максимально неголовним лівим ідеалом.

Наведемо необхідні означення і факти. Під кільцем будемо розуміти асоціативне кільце з одиницею $1 \neq 0$. Кільце називається *правим* (*лівим*) *кільцем Безу*, якщо довільний скінченнопороджений правий (лівий) ідеал цього кільця є головним правим (лівим) ідеалом. Кільце, яке є лівим і правим кільцем Безу, називається *кільцем Безу*. Кільцем Безу без дільників нуля називається область Безу. Елемент кільця називається *атомом*, якщо він незворотний і не зображається у вигляді добутку двох незворотних елементів. Якщо довільний неодиничний елемент області R має атом як правий множник, то область R називається *квазіатомною* [5] (така область позначається як $At(R)$ [2]). Ненульовий елемент a області R назвемо *лівим скінченним*, якщо довільний власний дільник елемента a є одиницею або він має атомний розклад. Назвемо елемент *скінченним*, якщо він є лівим і правим скінченним. Ненульовий елемент області R називається *лівим нескінченним*, якщо він не є одиницею області і не має атомних лівих дільників, тобто довільний скінченний лівий множник елемента a є одиницею області R. Аналогічно визначається правий нескінченний елемент. *Нескінченний елемент* визначається як елемент, який є правим і лівим нескінченним.

Праві кільця Безу відрізняються від кілець головних правих ідеалів наявністю неголовних правих ідеалів. Оскільки множина неголовних правих ідеалів індуктивна стосовно порядку включення правих ідеалів, то ми можемо говорити на підставі леми Цорна про максимальні серед неголовних правих ідеалів. Правий (лівий) ідеал, який є максимальним в множині правих (лівих) неголовних ідеалів, назвемо *максимально неголовним правим* (*лівим*) *ідеалом* [6]. Якщо область Безу містить максимально неголовні праві ідеали і вони є двобічними, то такі області Безу мають багато аналогічних характеризацій, які відомі для дистрибутивних областей, що і показується в даній статті. Спочатку наведемо відомий результат про двобічні максимально неголовні праві ідеали областей Безу. Двобічний ідеал P кільця R назвемо *цілком простим*, якщо фактор-кільце R/P є кільцем без дільників нуля.

Теорема 1 [6]. *Якщо максимально неголовний правий ідеал області Безу є двобічним, то він цілком простий.*

Твердження 1. *Нехай R — область Безу, в якій довільний максимально неголовний правий ідеал є двобічним. Тоді має місце така властивість: якщо $\sum_{i=1}^{n} a_i R = fR$, де елемент f не належить жодному максимально неголовному правому ідеалу, то це можливо тоді і лише тоді, коли $\sum_{i=1}^{n} R a_i = R\varphi$, де елемент φ не належить жодному максимально неголовному правому ідеалу.*

Доведення. Нехай $\sum_{i=1}^{n} R a_i = R f$. Оскільки R — область Безу, то $\sum_{i=1}^{n} a_i R = \varphi R$. Припустимо, що φ належить деякому максимально неголовному правому ідеалу M. Оскільки M — двобічний ідеал, то $a_i \in M$, $i = 1, \ldots, n$, а значить, $\sum_{i=1}^{n} R a_i = R f \subset M$, що неможливо, оскільки елемент f не належить жодному максимально неголовному правому ідеалу.

Нехай $\sum_{i=1}^{n} a_i R = \varphi R$, де елемент φ не належить жодному максимально неголовному правому ідеалу. Оскільки R — область Безу, то $\sum_{i=1}^{n} R a_i = Rf$. Припустимо, що f належить деякому максимально неголовному правому ідеалу M. Оскільки $R a_i \subset R f$, то $a_i = r_i f$, $r_i \in R$, $i = 1, \ldots, n$. Оскільки M — двобічний ідеал, то $\varphi R = \sum_{i=1}^{n} r_i f R \subset M$, що неможливо внаслідок визначення елемента φ.

Теорема 2. *Нехай R — область Безу і M — довільний максимально неголовний правий (лівий) ідеал R, який є двобічним. Тоді M — неголовний лівий (правий) ідеал.*

Доведення. Проведемо доведення для випадку максимально неголовного правого ідеалу. Припустимо, що M є головним лівим ідеалом, тобто $M = Rm$. Покажемо спочатку, що M — максимальний правий ідеал R. Нехай це не так. Тоді існує власний правий ідеал N такий, що $M \subset N$ і $N \neq M$. Згідно з визначенням M маємо $N = nR$. Оскільки $M \subset N$, то $m = nx, x \in R$. Зважаючи на те, що R — область Безу, одержуємо, що M — цілком простий ідеал R. Оскільки $n \notin M$, то $x \in M$, і, отже, $x = ym, y \in R$. Звідси $m = nym$. З огляду на те, що R — область і $m \neq 0$, маємо $ny = 1$. Звідси $N = nR = R$, що суперечить вибору правого ідеалу N. Отже, ми показали, що M — максимальний правий ідеал. Більше того, покажемо, що M — максимальний лівий ідеал. Для цього досить показати, що для довільного $a \notin M$ $M + Ra = R$. Оскільки M — максимальний правий ідеал, то $M + aR = R$, тобто $n + ab = 1$ для деяких $n \in \in M$, $b \in R$. Звідси $bn + bab = b$, а отже, $bn = (1 - ba)b$. Оскільки $n \in M$ і M — двобічний ідеал, то $(1 - ba)b \in M$. Як вже відмічалося, M — цілком простий ідеал, тоді $b \in M$ або $1 - ba \in M$. Випадок $b \in M$ неможливий, оскільки у противному разі $1 = n + ab \in M$. Значить, $1 - ba \in M$. Звідси $M + + Ra = R$, що й потрібно було довести.

Отже, ми довели, що якщо M є головним лівим ідеалом, то він є максимальним правим і лівим ідеалом. Оскільки $M = Rm$ і M — двобічний ідеал, то $mR \subset M = Rm$. Нехай x — довільний елемент R, тоді $mR + xmR = dR$ для деякого $d \in R$. Звідси $d = mu + xmv$. Оскільки $mR \subset Rm$, то існують елементи $u', v' \in R$ такі, що $mu = u'm$, $mv = v'm$. Звідси $d = u'm + xv'm$. Отже, $Rd \subset Rm$. На підставі того, що $mR + xmR = dR$, маємо $mR \subset dR$, тобто $m = dt$ і $Rm \subset Rt$. Оскільки $M = Rm$ — максимальний лівий ідеал, то можливі випадки $Rt = R$ або $Rt = Rm$. Якщо $Rt = R$, то t — правий дільник одиниці, а оскільки R — область, то t — дільник одиниці. Звідси $mt^{-1} = d$, тобто $mR = = dR$. Зважаючи на те, що $mR + xmR = dR$, одержуємо $xmR \subset dR = mR$. В силу довільності елемента $x \in R$ $Rm \subset mR$. А оскільки $mR \subset Rm$, то $M = = Rm = mR$, що суперечить тому, що M — головний правий ідеал. Якщо ж $Rt = = Rm$, то $t = ym$ для деякого $y \in R$. На підставі того, що $m = dt$, маємо $m = = dym$. Оскільки R — область, $m \neq 0$, то це можливо, коли $dy = 1$, тобто коли d — лівий дільник одиниці, а значить, коли d — дільник одиниці. Ми показали, що $Rd \subset Rm$, а це можливо, якщо m — лівий дільник одиниці, що суперечить вибору ідеалу M.

Отже, ми показали, що M не може бути головним лівим ідеалом, що й потрібно було довести.

Оскільки в даній роботі розглядається аналог дистрибутивних областей Безу, то ми свій розгляд обмежимо випадком областей Безу, в яких довільний максимально неголовний правий ідеал є двобічним ідеалом, але не є максимальним правим ідеалом, тобто таких областей Безу, в яких довільний максимальний правий ідеал є головним.

Теорема 3. *Нехай R — квазіатомна область Безу, в якій довільний максимально неголовний правий ідеал є двобічним. Тоді в R довільний максимально неголовний правий ідеал є максимально неголовним лівим ідеалом.*

Доведення. Нехай M — довільний максимально неголовний правий ідеал, який є двобічним ідеалом. За теоремою 1 M — неголовний лівий ідеал. Припустимо, що існує максимально неголовний лівий ідеал N такий, що $M \subset N$, $N \neq M$. Розглянемо двобічний ідеал NR. Можливі випадки $NR = N$ або $M \subset \subset NR, N \neq NR$. Якщо $NR = N$, то N — двобічний ідеал, а оскільки $M \subset N, N \neq \neq M$, то це можливо, коли N — головний правий ідеал, що неможливо внаслідок теореми 2 для випадку лівих ідеалів.

Розглянемо випадок, коли $N \subset NR$, $N \neq NR$. Із включень $M \subset N \subset NR$ одержуємо, що це можливо, коли $NR = fR$, де елемент f не належить жодному максимально неголовному правому ідеалу. Тоді існують такі елементи $n_i \in N$, $r_i \in R$, $i = 1, 2, \ldots, k$, що $\sum_{i=1}^{k} n_i r_i = f$, тобто $\sum_{i=1}^{k} n_i R = fR$. Звідси внаслідок твердження 1 маємо $\sum_{i=1}^{k} R n_i = R\varphi$, де φ не належить жодному максимально неголовному правому ідеалу. Оскільки для довільного $i = 1, \ldots$ $\ldots, n$ $n_i \in N$, то $\varphi \in N$. Тобто ми довели, що в N існує елемент φ, який не належить жодному максимально неголовному правому ідеалу. Згідно з твердженням 3.2 [2] і тим фактом, що φ не належить жодному неголовному правому ідеалу, φ можна зобразити у вигляді $\varphi = ab$, де a — правий нескінченний, b — скінченний елементи. Оскільки R — квазіатомна область Безу, то це можливо лише тоді, коли φ — скінченний елемент. Тобто ми довели, що в R існує максимально неголовний лівий ідеал N, який містить скінченний елемент φ, що неможливо внаслідок твердження 1 із [4]. Отже, $N = NR$, що й потрібно було довести.

1. *Brungs H. H.* Bezout domains and rings with a distributive lattice of right ideals // Can. J. Math. – 1986. – **38**, № 2. – P. 286–303.
2. *Cohn P. M.* Right principal Bezout domains // J. London Math. Soc. – 1987. – **35**. – P. 251–262.
3. *Cohn P. M., Schofield A. H.* Two examples of principal ideal domains // Bull. London Math. Soc. – 1985. – **17**. – P. 25–28.
4. *Beauregard R. A.* Left Ore principal right ideal domains // Proc. Amer. Math. Soc. – 1988. – **102**, № 3. – P. 459–462.
5. *Комарницкий М. Я.* Решетка левых идеалов ультрапроизведения V-областей Безу и ее элементарные свойства // Мат. студ. – 1995. – **6**. – С. 1–16.
6. *Забавский Б. В.* О некомутативных кольцах элементарных делителей // Укр. мат. журн. – 1987. – **39**, № 4. – С. 440–444.

Одержано 07.07.2000