УДК 519.41/47

П. П. Барышовец (Киев. ун-т инж. гражд. авиации)

О ДОПОЛНЯЕМОСТИ НЕМЕТАЦИКЛИЧЕСКИХ ПОДГРУПП В КОНЕЧНЫХ A-ГРУППАХ

We study groups G that satisfy the following conditions: 1) G is a finite solvable group with not prime metacyclic second derived subgroup; 2) all Sylow subgroups of G are elementary Abelian subgroups. We describe the structure of groups of this sort with complementable nonmetacyclic subgroups.

Вивчаються групи G, які задовольняють такі умови: 1) G — скінченна розв'язна група з непримарним метациклічним другим комутантом; 2) всі силовські підгрупи з G елементарні абелеві. Наведено опис будови таких груп з доповнюваними неметациклічними підгрупами.

Подгруппа A группы G называется дополняемой в G, если существует такая подгруппа $B \subset G$, что $G = AB$ и $A \cap B = 1$. Конечные группы, в которых дополняемы все подгруппы, изучались еще в 1937 г. В. Холлом [1]. Полное описание произвольных (как конечных, так и бесконечных) групп с таким свойством, получивших название вполне факторизуемых, получено несколько позднее, в 1953 г., Н. В. Баевой [2] (см. также [3]). В работах С. Н. Черникова [4] и Ю. М. Горчакова [5] показано, что произвольные вполне факторизуемые группы совпадают с группами, в которых дополняемы все абелевы подгруппы. При этом оказалось, что в случае конечных групп вполне факторизуемость следует уже из условия дополняемости одних только элементарных абелевых подгрупп [4] или даже циклических элементарных абелевых подгрупп [5]. В связи с этими результатами по инициативе С. Н. Черникова были выделены и изучались группы с теми или иными системами дополняемых нециклических подгрупп. Так, О. Н. Зуб [6] рассмотрела группы с дополняемыми нециклическими подгруппами, Я. П. Сысак [7] — группы с дополняемыми абелевыми нециклическими подгруппами, автор [8] — неабелевы группы с дополняемыми неабелевыми подгруппами. Вопрос о строении групп из двух последних классов поставлен С. Н. Черниковым в работе [9]. Одним из следующих шагов в этом направлении естественно считать изучение неметациклических групп с дополняемыми неметациклическими подгруппами. При этом метациклической называется всякая группа, являющаяся расширением циклической (в частности, единичной) группы с помощью циклической. Конечные неразрешимые группы со свойством дополняемости неметациклических подгрупп описаны автором в [10]. Конечные разрешимые группы с абелевыми силовскими подгруппами, имеющие это свойство, рассматривались в [11, 12]. Оказалось, что их ступень разрешимости не превышает числа 3 [12]. Группы такого рода с абелевым коммутантом описаны в [11], с неметациклическим вторым коммутантом — в [12]. В настоящей работе продолжается изучение таких групп. Рассмотрены те из них, у которых силовские подгруппы элементарные абелевы, а второй коммутант непримарен и метацикличен. Доказана следующая теорема.

Теорема. *В конечной группе с элементарными абелевыми силовскими подгруппами и непримарным метациклическим вторым коммутантом тогда и только тогда дополняемы все неметациклические подгруппы, когда она является группой одного из следующих типов*:

1) $G = ((G'' \leftthreetimes \langle b \rangle) \times C) \leftthreetimes \langle d \rangle$, *где* $G'' = \langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle$, $|a_1| = |a_2|$ — *составное число*, $|b| = q$, $|d| = 2$, q — *простое число*, $q \neq 2$, $(|a_1|, 30) = 1$, $(|G''|, [G: G'']) = 1$, $b^{-1}\langle a_1 \rangle b = \langle a_1 \rangle$, $b^{-1}\langle a_2 \rangle b = \langle a_2 \rangle$, $d^{-1}a_1 d = a_2$, $d^{-1}a_2 d = a_1$, $\langle b, d \rangle' = \langle b \rangle$, $[a_1 a_2, b] \neq 1$, $C\langle d \rangle$ — *вполне факторизуемая, а* C — *метациклическая группа и, если* P — *силовская подгруппа из* G'', *то* $\langle P, b, d \rangle$ — *минимальная не вполне факторизуемая группа*;

2) $G = ((G'' \leftthreetimes \langle b \rangle) \times C) \leftthreetimes \langle d \rangle$, *где* $G'' = \langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle$, $|a_1| = |a_2|$ — *составное число*, $|d| = 2$, $d^{-1}a_1 d = a_2$, $d^{-1}a_2 d = a_1$, $\langle b, d \rangle' = \langle b \rangle$, $d^{-1}Cd = C$, $(|G''|, [G: G'']) = 1$, *неединичные элементы из* $\langle b \rangle$ *действуют на силовских подгруппах из* G'' *неприводимо*, $\langle G'', C, d \rangle$ — *метациклическая*, $\langle b, C, d \rangle$ — *вполне факторизуемая группа.*

1. В метациклической группе, имеющей свойство: любая неметациклическая подгруппа дополняема, все неметациклические подгруппы и неметациклические фактор-группы имеют то же свойство. Кроме того, фактор-группа такой группы по ее неметациклическому нормальному делителю вполне факторизуема. В данной работе используются теоремы, описывающие строение вполне факторизуемых групп [13] и минимальных не вполне факторизуемых групп [14].

Конечные разрешимые группы с абелевыми силовскими подгруппами называются A-группами [15]. В A-группах пересечение центра с коммутантом тривиально и коммутанты всех нормальных делителей дополняемы [15].

Ниже рассматриваются только A-группы. Поэтому силовские p-подгруппы коммутантов H' и H'' будем обозначать через H'_p и H''_p.

Лемма. *Пусть* G — *конечная* A-*группа с дополняемыми неметациклическими подгруппами. Если второй коммутант* G'' *группы* G *метацикличен и непримарен, то он является холловской подгруппой группы* G *и его централизатор в группе* G *совпадает с централизатором в* G *любой силовской подгруппы из* G''.

Доказательство. В леммах 1 и 2 из [12] G'' разлагается в прямое произведение

$$G'' = K_1 \times K_2 \times \ldots \times K_n \tag{1}$$

минимальных нормальных делителей группы G, причем $|K_i| = p_i^2$, $i = 1, 2, \ldots, n$, p_i — различные простые числа, $p_i > 3$. Поскольку G'' — непримарная группа, то $n > 1$.

Покажем, что,

$$C_G(K) = C_G(G'') \tag{2}$$

для любого множителя K разложения (1). Пусть L — произведение множителей из разложения (1), отличных от K. Рассмотрим фактор-группу $H = G/L$. Так как $H'' = G''/L \neq 1$, то H — неметациклическая группа с дополняемыми неметациклическими подгруппами. В силу леммы 3 [12] $H = (B \times C) \leftthreetimes D$, где $B' = H''$, $C_H(G'') = H'' \times C$ и $C \lhd H$. Рассмотрим прообраз J подгруппы C в группе G. Так как $J \lhd G$, то и $K \cap J \lhd G$. В силу минимальности нормального делителя K группы G $J \cap K = 1$ или $J \cap K = K$. Если $K \subset J$, то $KL = G'' \subset J$ и $H'' = (G/L)'' \subset J/L = C$. Из полученного противоречия следует, что $J \cap K = 1$ и, значит, $[J, K] = 1$. Тогда $J \subset C_G(K)$ и $J \times K \subset C_G(K)$. Если $C_G(K) \neq J \times K$, то $C_G(K)/L \neq KJ/L = G''/L \times J/L = H'' \times C$. Так как $C_G(K)/L \subseteq C_H(H'')$, то из полученного противоречия следует $C_G(K) = K \times J$. Тогда фактор-группа G/J имеет неабелев коммутант и, значит, не вполне факторизуема [13]. Поэтому J — метациклическая группа. Но если M — множитель из разложения (1), отличный от K, то $M \cap J = T \lhd G$. Поскольку M — минимальный нормальный делитель группы G, то $T = 1$ или $T = M$. В первом случае, очевидно, $[M, J] = 1$. Предположим, что $T = M$, т. е. $M \subset J$. Так как J' — циклическая группа и $J' \lhd G$, то $M \cap J' = 1$.

Тогда $M \subset Z(J)$, т. е. $[J, M] = 1$. Значит, в любом случае $C_G(K)/L \subseteq C_G(M)$. Ввиду произвольности выбора подгруппы K из разложения (1) отсюда следует (2).

Покажем теперь, что G'' — холловская подгруппа группы G. В самом деле, пусть $p/|G''|$ и $p/|G/G''|$. Тогда силовская p-подгруппа P группы G неметациклическая и $P \subset C_G(G''_p) = C_G(G'')$, где G''_p — силовская p-подгруппа группы G''. Пусть $\langle x \rangle$ — подгруппа из G'' порядка q, $q \neq p$. Тогда подгруппа $\langle P, x \rangle = P \times \langle x \rangle$ дополняема в G. Если V — ее дополнение, то для силовской q-подгруппы G''_q коммутанта G'' пересечение $G''_q \cap V = V_1$ имеет порядок q, причем $V_1 \lhd V$. Так как группа $\langle G''_q, P \rangle$ абелева в силу соотношения $P \subset \subset C_G(G''_p) = C_G(G'')$ и содержит V_1, то $V_1 \lhd G = \langle G''_q, P, W \rangle$. Если $V_1 \subset \subset G''_q$, то это противоречит минимальности нормального делителя G''_q группы G. Если $V_1 \notin G''$, то подгруппа $X = G''_q \times V_1$ — неметациклический нормальный делитель группы G и, значит, фактор-группа G/X вполне факторизуема, что противоречит непримарности группы G''. Отсюда следует, что $(|G''|, [G: G'']) = 1$. Лемма доказана.

2. ***Доказательство теоремы.*** *Необходимость.* Пусть G — конечная группа с элементарными абелевыми силовскими подгруппами и непримарным метациклическим вторым коммутантом G'', в которой все неметациклические подгруппы дополняемы. Тогда имеет место разложение (1) со свойством (2). В силу леммы 3 [12] получаем

$$G = (B \times C) \leftthreetimes D, \tag{3}$$

где D — абелева группа, $B \lhd G$, $C \lhd G$, $G'' \subset B \subseteq G'$ и $C_G(G'') = G'' \times C$. Пусть U — дополнение подгруппы G'' в BD, K — любой множитель из (1), $|K| = p^2$. Тогда U можно отождествить с подгруппой группы $GL(2, p)$. Так как K — минимальный нормальный делитель группы G, то U — неприводимая подгруппа из $GL(2, p)$. Обозначим $H = KU$.

1. U — импримитивная подгруппа группы $GL(2, p)$, т. е. существует разложение $K = \langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle$ с $|a_1| = |a_2| = p$ и для любого элемента $x \in U$ подгруппа $x^{-1}\langle a_i \rangle x$ совпадает или с $\langle a_1 \rangle$ или с $\langle a_2 \rangle$. Тогда, как показано в [6, с. 149], U содержит абелеву подгруппу N индекса 2, являющуюся нормализатором подгрупп $\langle a_1 \rangle$ и $\langle a_2 \rangle$ в U. Так как силовские подгруппы группы G элементарные абелевы, то $U = N \leftthreetimes \langle d \rangle$, где $|d| = 2$. При этом N — абелева вполне факторизуемая группа, и значит, U — вполне факторизуемая группа в силу [14]. Тогда N разлагается в прямое произведение

$$N = \langle b_1 \rangle \times \langle b_2 \rangle \times \ldots \times \langle b_k \rangle \tag{4}$$

подгрупп простых порядков, нормальных в U. При этом $K\langle b_i \rangle \lhd KU$ и, значит, $(K\langle b_i \rangle)' \lhd KU$. Так как $(K\langle b_i \rangle)' \subseteq K$, а K — минимальный нормальный делитель группы H, то $(K\langle b_i \rangle)' = 1$ или

$$(K\langle b_i \rangle)' = K. \tag{5}$$

При этом случай $(K\langle b_i \rangle)' = 1$ невозможен, иначе $b_i \in C_G(K)$, и, значит, ввиду леммы $b_i \in C_G(G'') = G'' \times S$, а $b_i \notin G''$. Ввиду произвольности выбора подгруппы K из разложения (1) соотношение (5) имеет место для любого множителя K из разложения (1) и любого множителя $\langle b_i \rangle$ из разложения (4).

Предположим, что N — группа непростого порядка, т. е. $k>1$. Рассмотрим подгруппу $X=(K\times K_1)\leftthreetimes(\langle b_1\rangle\times\langle b_2\rangle)\leftthreetimes\langle d\rangle$, где $\langle b_1\rangle$ и $\langle b_2\rangle$ — множители из разложения (1). Если $\overline{K}$ — подгруппа порядка p из K, нормализуемая элементом b_1, то подгруппа $\langle\overline{K}, K_1, b_1\rangle$ неметациклична и, значит, дополняема в X. Ее дополнение S имеет порядок $2pq$, где $q=|b_2|$, $(p, 2q)=1$. Силовская p-подгруппа S_p группы S нормальна в S. Согласно теореме Машке [16, с. 122] существует прямое разложение группы K: $K=\langle c_1\rangle\times\langle c_2\rangle$ с $\langle c_1\rangle = S_p$, множители которого нормальны относительно p-дополнения $S_{p'}$ группы S. Так как фактор-группы группы $K\leftthreetimes S_{p'}$ по централизаторам подгрупп $\langle c_1\rangle$ и $\langle c_2\rangle$ абелевы и подгруппа K является пересечением этих централизаторов, то $S_{p'}$ — абелева группа. Далее,

$$X = (K_1\overline{K}\langle b_1\rangle)\cdot(\langle c_1\rangle\leftthreetimes S_{p'}) = \langle b_1\rangle(K_1K\leftthreetimes S_{p'}) \text{ и } \langle b_1\rangle\cap(K_1KS_{p'}) = 1.$$

Следовательно, $T=\langle b_1, b_2, d\rangle=\langle b_1\rangle\cdot X_1$, где $X_1 = T\cap(K_1KS_{p'})$. При этом $\langle b_1\rangle\cap X_1 = 1$ и X_1 содержится в холловской $\{p, p_1\}$-подгруппе $\overline{X}$ из $K_1KS_{p'}$, где $|K|=p^2$, $|K_1|=p_1^2$. Так как подгруппа $\overline{X}$ изоморфна (абелевой) группе $S_{p'}$, то и X_1 — абелева группа. Итак, подгруппа $\langle b_1\rangle$ имеет в T абелево дополнение X_1. Аналогично убеждаемся, что подгруппа $\langle b_2\rangle$ имеет в T абелево дополнение X_2. Значит, фактор-группы $T/\langle b_1\rangle$ и $T/\langle b_2\rangle$ абелевы. Тогда и группа $T/\langle b_1\rangle\cap\langle b_2\rangle\simeq T$ будет абелевой. Таким образом, $X/K\times K_1$ — абелева группа, что противоречит условию $G'\neq 1$. Значит, $|N|=q$, q — простое число, причем, очевидно, $q\neq 2$, $(q,|G''|)=1$. Обозначим $N=\langle b\rangle$.

Так как $C\lhd G$, а $G/C\simeq BD$ — группа с неабелевым коммутантом, то C — метациклическая группа. Группа $\langle b, C, d\rangle$ в силу леммы 6 [12] вполне факторизуема. Таким образом, как нетрудно убедиться, G — группа типа 1 теоремы.

2. U — примитивная подгруппа группы $GL(2, p)$. Рассмотрим снова подгруппу $H=KU$. Согласно лемме 6 [12] U — вполне факторизуемая группа. В силу леммы 4 [12] $U=N\leftthreetimes\langle d\rangle$, где $d^2=1$, N — абелева группа.

Предположим, что KN — вполне факторизуемая группа. Тогда K разлагается в прямое произведение нормальных в группе KN подгрупп простых порядков [3]: $K=\langle a_1\rangle\times\langle a_2\rangle$, $|a_1|=|a_2|=p$ и $\langle a_1\rangle\lhd KN$, $\langle a_2\rangle\lhd KN$. Пусть $1\neq x\in N$, тогда $dxd^{-1}=y\in N$. Далее, $x^{-1}d^{-1}\langle a_1\rangle dx = d^{-1}y^{-1}\langle a_1\rangle yd = d^{-1}\langle a_1\rangle d$. Поскольку $\langle a_1\rangle\ntriangleleft H$, то $d^{-1}\langle a_1\rangle d\neq\langle a_1\rangle$. Если все элементы из N трансформируют a_1 и a_2 в одинаковые степени, то любая подгруппа из K нормальна в KN [17, с. 10]. Так как $K\langle d\rangle$ — вполне факторизуемая группа ввиду результатов [14], то в K есть подгруппы порядка p, нормальные относительно d. Тогда они будут нормальны и в группе H вопреки минимальности нормального делителя K в группе G, а значит, и в H. Поэтому в N есть элементы, трансформирующие a_1 и a_2 в разные степени. Тогда $\langle a_1\rangle$ и $\langle a_2\rangle$ — единственные N-допустимые подгруппы порядка p из K [17, с. 10]. Значит, $d^{-1}\langle a_1\rangle d = \langle a_2\rangle$, $d^{-1}\langle a_2\rangle d = \langle a_1\rangle$. Получили противоречие с примитивностью подгруппы U.

Поэтому KN — не вполне факторизуемая группа и KN содержит группу Миллера – Морено порядка p^2q, $q/|N|$. Тогда N — примитивная подгруппа группы $GL(2,p)$ и потому N — циклическая группа в силу леммы 7 [18] и цикличности мультипликативной группы конечного поля. Пусть (4) — разложение подгруппы N в прямое произведение нормальных в U подгрупп простых порядков. Обозначим через N_1 произведение тех из них, например $\langle x \rangle$, для которых $K\langle x \rangle$ — группа Миллера – Морено, а через N_2 — произведение остальных. Тогда, очевидно, KN_2 — вполне факторизуемая группа ввиду результатов [14]. Покажем, что $N_2 = 1$. В противном случае рассмотрим подгруппу $H_1 = (K \times K_1) \leftthreetimes (\langle x \rangle \times \langle y \rangle) \leftthreetimes \langle d \rangle$, где K_1 — множитель из разложения (1), отличный от K, $\langle x \rangle$ и $\langle y \rangle$ — подгруппы, нормальные в U и вошедшие соответственно в произведения N_1 и N_2. Тогда ввиду соотношения (5), которое имеет место в рассматриваемом случае, и полной факторизуемости группы $K\langle y \rangle$ подгруппа K содержит подгруппу $\overline{K}$ порядка p, нормализуемую элементом y, причем подгруппа $K_1\overline{K}\langle y \rangle$ неметациклична и, значит, дополняема в H_1. Ее дополнение T имеет порядок $2pq$ и числа 2, p и q, очевидно, все различны. Холловская $\{p, q\}$-подгруппа из T порядка pq содержится в холловской $\{p, q\}$-подгруппе из KN, которая имеет порядок p^2q и является группой Миллера – Морено. Противоречие. Следовательно, $N_2 = 1$. Обозначим $N = \langle b \rangle$.

В качестве K можно рассматривать любую силовскую подгруппу из G'', поэтому из доказанного выше следует, что все неединичные элементы из N действуют на силовских подгруппах из G'' неприводимо. Поскольку $C \cap G'' = 1$, то, как нетрудно убедиться, $[b, C] = 1$. Следовательно, $G = ((G'' \leftthreetimes \langle b \rangle) \times C) \leftthreetimes \langle d \rangle$. Образующие в силовских подгруппах можно выбрать так, чтобы элемент d переставлял их между собой. Отсюда следует, что $G'' = \langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle$ и $d^{-1}a_1d = a_2$, $d^{-1}a_2d = a_1$, где a_1 и a_2 — произведения соответствующих образующих из силовских подгрупп группы G''. Ввиду нерегулярности действия элемента d на силовских подгруппах из G'' коммутант $\langle G'', d \rangle'$ группы $\langle G'', d \rangle$ является циклической группой T_1 порядка $\sqrt{|G''|}$. Группа $C\langle d \rangle$ метациклична, в противном случае подгруппа $\left\langle \langle G''_p, d \rangle', C, d \right\rangle$, где G''_p — любая силовская подгруппа из G'', дополняема в G, что невозможно. Пусть $\langle C, d \rangle' = C_1$. Тогда C_1 — циклическая группа, $C_1 \lhd G$ и, значит, $[C_1, T_1] = 1$. Поэтому $T_1 \times C_1 = D'$, где $D = \langle G'', C, d \rangle$. Так как G'' — холловская подгруппа из G, то D' — циклическая группа. Нетрудно убедиться, что D / D' — циклическая группа. Значит, D — метациклическая группа. Группа $\langle b, C, d \rangle$ является, очевидно, вполне факторизуемой. Таким образом, G — группа типа 2 теоремы.

Достаточность. Нетрудно убедиться, что у группы любого из указанных в теореме типов силовские подгруппы элементарные абелевы, а их порядки делят кубы соответствующих простых чисел.

1. Пусть G — группа типа 1. Если F — собственная подгруппа из G, то возможны следующие случаи.

а) $(|G'' \cap F|, [G'' : G'' \cap F]) = 1$, т. е. если $F \cap G'' \neq 1$ или $F \not\supset G''$, то $F \cap G''$ — холловская подгруппа из второго коммутанта G''. Тогда если X — такая холловская подгруппа из G'' (возможно, равная 1 или G''), что $F \cap X = 1$, $FX \supseteq G''$, то $FX \cdot \langle b, C, d \rangle = G$. Группа $\langle b, C, d \rangle$ вполне факторизуемая, следовательно, подгруппа FX (а значит, и F) дополняема в G.

б) $(|G'' \cap F|, [G'' : G'' \cap F]) \neq 1$. Рассмотрим тогда подгруппы $L = \langle G'', C, d \rangle$ и $T = \langle G'', b, C \rangle$. Они, очевидно, вполне факторизуемы. Если $FL = G$ или $FT = G$, то подгруппа F дополняема в G. Предположим, что

$FL \neq G$, $FT \neq G$. Поскольку T — нормальная подгруппа индекса 2 из G, то тогда $F \subset T$. Покажем, что и $L \supset F$. Действительно, любая холловская $\{2, q\}'$-подгруппа из F содержится в $G'' \times C$ и, значит, в L. Если F содержит элементы порядка 2, то из включения $F \subset T$ следует, что силовские 2-подгруппы из F содержатся в группе C и, значит, они содержатся и в $L \supset C$. Если G_q — любая силовская q-подгруппа группы G, то $C \cap G_q$ имеет в G_q индекс q. Поэтому если $|F| \vdots q$, то подгруппа индекса q из любой силовской q-подгруппы группы F содержится в C (а значит, и в L). Отсюда следует, что $F \subset L$ или $[L: (F \cap L)] = q$. Во втором случае произведение FL имеет

$$\frac{|F| \cdot |L|}{|F \cap L|} = \frac{|F| \cdot |L|}{|F| : q} = |L| \cdot q = |G|$$

различных элементов, т. е. $FL = G$. Из полученного противоречия следует, что $F \subset L$. Тогда $F \subset L \cap T = G''C \subset \langle G'', C, d \rangle$. Поскольку группа $\langle G'', C, d \rangle$ по условию метациклична, то и F — метациклическая группа. Отсюда следует дополняемость в группе G всех неметациклических подгрупп.

2. Пусть G — группа типа 2. Если F — собственная подгруппа из G, то снова рассмотрим следующие случаи.

а) $(|G'' \cap F|, [G'': G'' \cap F]) = 1$. Дополняемость подгруппы F в группе G доказываем аналогично случаю 1а).

б) $(|G'' \cap F|, [G'': G'' \cap F]) \neq 1$. Тогда F содержит подгруппу $\langle z \rangle$ простого порядка (например, p), нормальную в F. Если $(|F|, |b|) \neq 1$ и π — множество простых чисел, делящих $|b|$, то для холловской π-подгруппы F_π группы F $[z, F_\pi] = 1$ ввиду неприводимости действия $\langle b \rangle$ на силовских подгруппах из G''. Но тогда и $[K, F_\pi] = 1$, где K — силовская p-подгруппа второго коммутанта G''. Значит, $F_\pi \dot{\subset} C_G(K) = C_G(G'') = G'' \times C$. Так как $(|G''|, |C|) = 1$ и $(|b|, |G''|) = 1$, то отсюда следует, что $F_\pi \subset C$. Поскольку $C \lhd G$, то отсюда получаем, что C содержит все холловские π-подгруппы из F. Из разрешимости группы G следует, что $F = F_\pi \cdot F_{\pi'}$, где F_π и $F_{\pi'}$ — некоторые холловские π- и π'-подгруппы группы F соответственно. Пусть $G_{\pi'}$ — холловская π'-подгруппа из G, содержащая группу $F_{\pi'}$. Поскольку подгруппа $L = \langle G'', C, d \rangle$ имеет в G индекс, равный $|b|$, то L содержит некоторую холловскую π'-подгруппу $L_{\pi'}$ порядка, равного $|G_{\pi'}|$. Подгруппы $L_{\pi'}$ и $G_{\pi'}$ сопряжены в G. Пусть $L_{\pi'} = u^{-1} G_{\pi'} u$. Тогда $F_1 = u^{-1} F u = u^{-1} F_\pi \cdot F_{\pi'} u = u^{-1} F_\pi u \cdot u^{-1} F_{\pi'} u$ и $u^{-1} F_\pi u \subseteq C \subseteq L$, $u^{-1} F_{\pi'} u = u^{-1} G_{\pi'} u = L_{\pi'} \subset L$. Значит, метациклическая группа L содержит подгруппу F_1, сопряженную с F. Тогда и F — метациклическая группа. Отсюда следует дополняемость в группе G всех неметациклических подгрупп. Теорема доказана.

1. *Hall Ph.* Complemented groups // J. London Math. Soc. – 1937. – **12**. – P. 201 – 204.
2. *Баева Н. В.* Вполне факторизуемые группы // Докл. АН СССР. – 1953. – **92**, № 5. – С. 877 – 880.
3. *Черникова Н. В.* Группы с дополняемыми подгруппами // Мат. сб. – 1956. – **39**. – С. 273 – 292.
4. *Черников С. Н.* Группы с системами дополняемых подгрупп // Там же. – 1954. – **35**. – С. 93 – 128.
5. *Горчаков Ю. М.* Примитивно факторизуемые группы // Групы с ограничениями для подгрупп // Уче. зап. Перм. ун-та. – 1960. – **17**, вып. 2. – С. 15 – 31.
6. *Зуб О. Н.* Группы, нециклические подгруппы которых дополняемы // Группы с ограничениями для подгрупп. – Киев: Наук. думка, 1971. – С. 134 – 158.

7. *Сысак Я. П.* Конечные элементарно факторизуемые группы // Укр. мат. журн. – 1977. – **29**, № 1. – С. 67 – 76.
8. *Барышовец П. П.* Неабелевы группы с дополняемыми неабелевыми подгруппами // Там же. – 1980. – **32**, № 1. – С. 99 – 101.
9. *Черников С. Н.* Исследование групп с заданными свойствами подгрупп // Там же. – 1969. – **21**, № 2. – С. 193 – 209.
10. *Барышовец П. П.* Конечные неразрешимые группы с дополняемыми неметациклическими подгруппами // Там же. – 1987. – **39**, № 5. – С. 547 – 551.
11. *Барышовец П. П.* О конечных *A*-группах, в которых все неметациклические подгруппы дополняемы // Там же. – 1988. – **40**, № 3. – С. 297 – 302.
12. *Барышовец П. П.* О конечных *A*-группах, в которых дополняемы неметациклические подгруппы // Там же. – 1995. – **47**, № 9. – С. 1162 – 1169.
13. *Черникова Н. В.* К основной теореме о вполне факторизуемых группах // Группы с системами дополняемых подгрупп. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1972. – С. 49 – 58.
14. *Маланьина Г. А., Хлебутина В. И., Шевцов Г. С.* Конечные минимальные не вполне факторизуемые группы // Мат. заметки. – 1972. – **12**, № 12. – С. 157 – 162.
15. *Taunt D.* On *A*-groups // Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1949. – **45**, № 1. – P. 24 – 42.
16. *Huppert B.* Endliche Gruppen. I. – Berlin etc.: Springer, 1967. – 793 S.
17. *Зайцев Д. И.* Нормально факторизуемые группы // Группы с системами дополняемых подгрупп. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1972. – С. 5 – 34.
18. *Супруненко Д. А.* Разрешимые и нильпотентные линейные группы. – Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1958. – 97 с.

Получено 06.06.2000,
после доработки — 30.10.2000