УДК 517.9

С. А. Плакса (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ПОТЕНЦИАЛА В ОДНОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ МЕРИДИАННОЙ ПЛОСКОСТИ *

We develop a method of reduction of the Dirichlet problem for axially symmetric potential in a simply connected domain of the meridional plane to the Cauchy singular integral equation. In the case of a smooth domain boundary satisfying some additional conditions, we perform the regularization of the mentioned singular integral equation.

Розроблено метод редукції задачі Діріхле для осесиметричного потенціалу в однозв'язній області меридіанної площини до сингулярного інтегрального рівняння Коші. У випадку гладкої межі області, що задовольняє деякі додаткові умови, здійснено регуляризацію вказаного сингулярного інтегрального рівняння.

Известно, что в меридианной плоскости xOy пространственного потенциального соленоидального поля, симметричного относительно оси Ox, потенциал поля $\varphi(x, y)$ не является гармонической функцией, а удовлетворяет уравнению

$$y\Delta\varphi(x, y) + \frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial y} = 0, \tag{1}$$

где $\Delta := \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа.

Как отмечено в монографии [1, с. 18], количественная теория решений уравнения (1) развита в значительно меньшей степени, чем для гармонических функций на плоскости, что естественным образом связано с вырождением уравнения (1) на оси Ox.

В работах [2 – 5] разрабатывались методы решения краевой задачи Дирихле для осесимметричного потенциала с учетом его специфических особенностей. В частности, в [4] решение задачи Дирихле для уравнения, обобщающего уравнение (1), в области, граница которой является кривой Ляпунова, с помощью потенциала двойного слоя, ассоциированного с этим уравнением, редуцировано к решению интегрального уравнения Фредгольма.

В данной работе при решении задачи Дирихле для осесимметричного потенциала $\varphi(x, y)$ используются интегральные представления решений уравнения (1), полученные в работах [6 – 8]. Предлагается новый метод решения этой задачи путем ее редукции к сингулярному интегральному уравнению с ядром Коши. Для областей более общего, чем в работе [4], вида осуществлена регуляризация полученного сингулярного уравнения.

1. Постановка задачи и предварительные замечания. Пусть D — область меридианной области xOy, симметричная относительно оси Ox. Замыкание области D обозначим через $\overline{D}$, а ее границу — ∂D.

Рассмотрим задачу Дирихле для осесимметричного потенциала о нахождении непрерывной в $\overline{D}$ функции $\varphi(x, y)$ которая в области D удовлетворяет уравнению (1), а на границе ∂D принимает заданные значения $\varphi_{\partial D}(x, y)$, т. е. удовлетворяет равенству $\varphi(x, y) = \varphi_{\partial D}(x, y)$ при всех $(x, y) \in \partial D$.

Через $\mathbb{R}$ обозначим вещественную прямую комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Область плоскости $\mathbb{C}$, конгруэнтную области D меридианной плоскости xOy при соответствии $z = x + iy$, $(x, y) \in D$, будем обозначать через D_z, ее замыка-

* Выполнена при частичной поддержке Международного научного фонда INTAS, грант № 99-00089.

ние — $\overline{D_z}$, а границу — ∂D_z. Положительным направлением обхода границы ∂D_z будем считать такое направление, при котором область D_z остается слева.

В дальнейшем в качестве области D_z рассматриваются области, граница которых является замкнутой жордановой спрямляемой кривой γ, симметричной относительно вещественной оси. При этом через D_z^+ обозначим ограниченную область, а через D_z^- — неограниченную область, общей границей которых является кривая γ. Заметим, что в соответствии с принятым выше соглашением границы ∂D_z^+ и ∂D_z^- имеют противоположную ориентацию. Обозначим через b_1 и b_2 точки, в которых кривая γ пересекает вещественную прямую, при этом $b_1 < b_2$.

Как и в работе [6], зададим в области D_z гомотопическое семейство $\{\Gamma_{z\overline{z}}\}$ жордановых спрямляемых кривых, каждая кривая $\Gamma_{z\overline{z}}$ которого симметрична относительно вещественной прямой $\mathbb{R}$ и соединяет точки z и $\overline{z}$ при $\operatorname{Im} z \neq 0$. В случае $D_z = D_z^-$ условимся также, что все кривые $\Gamma_{z\overline{z}}$ пересекают вещественную ось на интервале $(-\infty, b_1)$.

Если $z \in D_z$, $\operatorname{Im} z \neq 0$, то $\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}$ понимаем как непрерывную ветвь аналитической функции $G(t) = \sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}$ с разрезом вдоль кривой $\Gamma_{z\overline{z}}$ такую, что $G(t) > 0$ при всех $t \in \mathbb{R}: t > \max_{z \in \Gamma_{z\overline{z}}} \operatorname{Re} z$.

Определим также $\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}$ при $z \in \gamma$, $\operatorname{Im} z \neq 0$. В этом случае рассмотрим разрез плоскости $\mathbb{C}$ вдоль разомкнутой кривой $\Gamma_{z\overline{z}}^{\gamma}$ с концами z и $\overline{z}$ такой, что $\Gamma_{z\overline{z}}^{\gamma} \subset \gamma$ и $b_1 \in \Gamma_{z\overline{z}}^{\gamma}$. Теперь $\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}$ будем понимать как непрерывную ветвь аналитической функции $G(t) = \sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}$ с разрезом вдоль кривой $\Gamma_{z\overline{z}}^{\gamma}$ такую, что $G(t) > 0$ при всех $t \in \mathbb{R}: t > \max_{z \in \Gamma_{z\overline{z}}^{\gamma}} \operatorname{Re} z$. Введем также обозначение $\left(\sqrt{(\tau-z)(\tau-\overline{z})}\right)^{\pm} := \lim_{t \to \tau, t \in D_z^{\pm}} \sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}$ при $\tau \in$ $\in \gamma \setminus \{z, \overline{z}\}$.

Введем в рассмотрение гельдеровские классы функций. Функция $g(z)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\alpha \in (0;1]$ на множестве E, $E \subset$ $\subset \mathbb{C}$, если

$$|g(z_1) - g(z_2)| \leq c|z_1 - z_2|^{\alpha} \quad \forall z_1, z_2 \in E \tag{2}$$

и постоянная c не зависит от z_1 и z_2. Пусть теперь $\mathcal{H}_{\alpha}$ обозначает класс функций $g: \partial D_z \to \mathbb{C}$, которые на кривой ∂D_z удовлетворяют условию Гельдера с показателем α. Через $\tilde{\mathcal{H}}_{\alpha}$ обозначим класс функций $g: \partial D_z \to \mathbb{C}$, для каждой из которых при фиксированном $\alpha \in (0;1]$ существует $\nu \in [0;\alpha)$ такое, что выполняется условие

$$|g(z_1) - g(z_2)| \leq c(\max\{|z_1 - b_1||z_1 - b_2|, |z_2 - b_1||z_2 - b_2|\})^{-\nu}|z_1 - z_2|^{\alpha}$$
$$\forall z_1, z_2 \in \partial D_z,$$

где постоянная c не зависит от z_1, z_2. Очевидно, что $\tilde{\mathcal{H}}_{\alpha} \subset \mathcal{H}_{\alpha-\nu}$, т.е. функции класса $\tilde{\mathcal{H}}_{\alpha}$ удовлетворяют условию Гельдера, но при этом показатель в условии Гельдера (2) при $z_1 = b_j$, $j = 1, 2$, вообще говоря, меньше, чем для точек z_1, z_2, находящихся вне произвольной фиксированной окрестности точек b_1 и b_2.

Класс функций $g_{\partial D}: \partial D \to \mathbb{R}$, для каждой из которых функция g, определяемая равенством $g(x+iy) := g_{\partial D}(x,y) \quad \forall (x,y) \in \partial D$, принадлежит классу $\tilde{\mathcal{H}}_\alpha$, будем обозначать через $\tilde{\mathcal{H}}_\alpha(\partial D)$.

Если функция φ_* удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\alpha > 1/2$ на отрезке $[a_1, a_2]$ и интегрируема на отрезке $[a, a_1]$, то по стандартной схеме [9, с. 573] при любом $\xi \in (a_1, a_2)$ получаем равенство

$$\frac{d}{d\xi}\int_a^\xi \frac{s\,\varphi_*(s)}{\sqrt{(\xi^2 - s^2)(s^2 - a^2)}}ds = -\,\xi\int_a^\xi \frac{s\,(\varphi_*(s) - \varphi_*(\xi))}{(\xi^2 - s^2)^{3/2}\sqrt{s^2 - a^2}}ds. \tag{3}$$

При тех же предположениях о функции φ_* легко устанавливается равенство

$$\lim_{\tau\to\xi}\int_\tau^\xi \frac{s\,\varphi_*(s)}{\sqrt{(\xi^2 - s^2)(s^2 - \tau^2)}}ds = \frac{\pi}{2}\varphi_*(\xi) \quad \forall \xi \in (a_1, a_2]. \tag{4}$$

Обозначим через $C(\mathbb{R})$ банахово пространство функций $g_* : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, непрерывных на расширенной вещественной прямой $\mathbb{R} \bigcup \{\infty\}$, с нормой $\|g_*\|_{C(\mathbb{R})} := \sup\limits_{\tau\in\mathbb{R}} |g_*(\tau)|$. При этом введем в рассмотрение модуль непрерывности

$$\omega_{\mathbb{R}}(g_*, \varepsilon) := \sup_{\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}, |\tau_1 - \tau_2| \le \varepsilon} |g_*(\tau_1) - g_*(\tau_2)|,$$

а также локальный центрированный (относительно бесконечно удаленной точки) модуль непрерывности

$$\omega_{\mathbb{R},\infty}(g_*, \varepsilon) := \sup_{\tau\in\mathbb{R}, |\tau| \ge 1/\varepsilon} |g_*(\tau) - g_*(\infty)|$$

функции $g_* \in C(\mathbb{R})$. Теперь через $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ обозначим класс функций $g_* \in C(\mathbb{R})$, модули непрерывности которых удовлетворяют условиям Дини

$$\int_0^1 \frac{\omega_{\mathbb{R}}(g_*, \eta)}{\eta}d\eta < \infty, \quad \int_0^1 \frac{\omega_{\mathbb{R},\infty}(g_*, \eta)}{\eta}d\eta < \infty. \tag{5}$$

Рассмотрим также модуль непрерывности

$$\omega(g, \varepsilon) := \sup_{|Z_1| = |Z_2| = 1, |Z_1 - Z_2| \le \varepsilon} |g_*(Z_1) - g_*(Z_2)|$$

функции $g(Z)$, заданной на единичной окружности.

Справедливо следующее утверждение, которое устанавливается аналогично лемме 1 из [5].

Лемма 1. *Если функция* g_* *принадлежит классу* $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, *то модуль непрерывности функции* $g(Z) := g_*(\xi)$, *где* $Z = (\xi - i)/(\xi + i) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$, *удовлетворяет условию Дини*

$$\int_0^1 \frac{\omega(g, \eta)}{\eta}d\eta < \infty.$$

2. Редукция задачи Дирихле к сингулярному интегральному уравнению. В теореме 3 работы [6] установлено, что каждой голоморфной в области D_z функции F соответствует решение $\varphi(x,y)$ уравнения (1) в области D, задаваемое формулой

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\Gamma}\dfrac{F(t)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}dt & \text{при } y\neq 0; \\ F(x) \quad \text{при } y=0, & \text{если } b_1<x<b_2 \quad \text{или } x<b_1<b_2; \\ -F(x)+2F(\infty) \quad \text{при } y=0, & \text{если } b_1<b_2<x. \end{cases} \tag{6}$$

Здесь $(x,y)\in D$, $z=x+iy$, Γ — произвольная замкнутая жорданова спрямляемая кривая, ограничивающая область D'_z такую, что $\Gamma_{z\bar{z}}\subset D'_z$ и $\overline{D'_z}\subset D_z$.

Справедливо также обратное утверждение.

Теорема 1. *Для каждого четного по переменной y осесимметричного потенциала $\varphi(x,y)$ в ограниченной области D существует единственная голоморфная в области D_z функция $F\colon D_z\to\mathbb{C}$, удовлетворяющая условию*

$$F(\bar{z}) = \overline{F(z)} \qquad \forall z\in D_z, \tag{7}$$

такая, что справедливо равенство (6) *для всех* $(x,y)\in D$.

Доказательство теоремы 1 будет приведено ниже. Заметим, что в [7, 8] при некоторых дополнительных предположениях для области D и функции $\varphi(x,y)$ голоморфная функция F найдена в явном виде.

В работе [6] также показано, что при естественных предположениях о функции F и границе области D_z интеграл в формуле (6) может быть заменен таким же интегралом по границе ∂D_z.

Основываясь на указанных результатах из [6], решение задачи Дирихле для осесимметричного потенциала будем искать в виде

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} \varphi_{\partial D}(b_2,0)+\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\partial D_z}\dfrac{F(t)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}dt & \text{при } y\neq 0; \\ \varphi_{\partial D}(b_2,0)+F(x) \quad \text{при } y=0, & \text{если } b_1<x<b_2 \quad \text{или } x<b_1<b_2; \\ \varphi_{\partial D}(b_2,0)-F(x) \quad \text{при } y=0, & \text{если } b_1<b_2<x, \end{cases} \tag{8}$$

где функция F голоморфна в области D_z и является решением интегрального уравнения

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_z^+}\frac{F(t)}{\left(\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}\right)^-}dt = \varphi_{\partial D}(x,y)-\varphi_{\partial D}(b_2,0), \tag{9}$$

$$z = x+iy \in \partial D_z^+\setminus\{b_1,b_2\},$$

в случае задачи Дирихле для ограниченной области (внутренней задачи Дирихле) или решением интегрального уравнения

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_z^-}\frac{F(t)}{\left(\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}\right)^+}dt = \varphi_{\partial D}(x,y)-\varphi_{\partial D}(b_2,0), \tag{10}$$

$$z = x+iy \in \partial D_z^-\setminus\{b_1,b_2\},$$

в случае задачи Дирихле для неограниченной области (внешней задачи Дирихле). При этом ограничимся отысканием голоморфной функции F, удовлетворяющей условию (7).

При решении внутренней задачи Дирихле будем использовать некоторое конформное отображение $\sigma_+(Z)$ единичного круга $\{Z\in\mathbb{C}: |Z|<1\}$ на область D_z^+ такое, что $\sigma_+(-1)=b_1$, $\sigma_+(1)=b_2$, и образом полукруга $\{Z\in\mathbb{C}: |Z|<1,\ \operatorname{Im}Z>0\}$ при отображении $\sigma_+(Z)$ является область $\{z\in D_z^+:$

$\operatorname{Im} Z > 0\}$. Легко видеть, что такое отображение существует и при всех $Z \in \{Z \in \mathbb{C} : |Z| \le 1\}$ удовлетворяет условию $\sigma_+(\overline{Z}) = \overline{\sigma_+(Z)}$.

Введем при этом в рассмотрение функцию

$$M_+(Z, T) := \sqrt{\frac{(T-Z)(T-\overline{Z})}{(\sigma_+(T)-\sigma_+(Z))(\sigma_+(T)-\sigma_+(\overline{Z}))}},$$

которую при каждом фиксированном $Z \ne -1$ будем понимать как непрерывную ветвь функции, аналитической в единичном круге по переменной T, такую, что $M_+(Z, -1) > 0$.

При решении внешней задачи Дирихле аналогично будем использовать конформное отображение $\sigma_-(Z)$ единичного круга $\{Z \in \mathbb{C} : |Z| < 1\}$ на область D_z^-, удовлетворяющее условиям нормировки $\sigma_-(0) = \infty$ и $\sigma_-(-1) = b_1$. Заметим, что образом полукруга $\{Z \in \mathbb{C} : |Z| < 1,\ \operatorname{Im} Z > 0\}$ при отображении $\sigma_-(Z)$ является область $\{z \in D_z^- : \operatorname{Im} Z < 0\}$ и при всех $Z \in \{Z \in \mathbb{C} : |Z| \le 1\}$ выполняется равенство $\sigma_-(\overline{Z}) = \overline{\sigma_-(Z)}$. Действительно, существует единственное конформное отображение указанного полукруга на область $\{z \in D_z^- : \operatorname{Im} Z < 0\}$, отображающее точки $-1, 0, 1$ соответственно в точки b_1, ∞, b_2. Его аналитическим продолжением на единичный круг в соответствии с принципом симметрии [10, с. 148] является отображение $\sigma_-(Z)$.

Введем также в рассмотрение функцию

$$M_-(Z, T) := \sqrt{\frac{(T-Z)(T-\overline{Z})}{T^2(\sigma_-(T)-\sigma_-(Z))(\sigma_-(T)-\sigma_-(\overline{Z}))}},$$

которую при каждом фиксированном Z таком, что $Z \ne -1$ и $Z \ne 0$, будем понимать как непрерывную ветвь функции, аналитической в единичном круге по переменной T, такую, что $M_-(Z, -1) > 0$.

В следующей теореме установлены достаточные условия редукции интегральных уравнений (9), (10) задачи Дирихле для осесимметричного потенциала к сингулярному интегральному уравнению на вещественной прямой. При этом сингулярные интегралы понимаются в смысле главного значения.

Теорема 2. *Пусть функция* $\varphi_{\partial D}$ *принадлежит классу* $\tilde{\mathcal{H}}_\alpha(\partial D)$, $1/2 < \alpha \le 1$, *и удовлетворяет условию*

$$\varphi_{\partial D}(x, -y) = \varphi_{\partial D}(x, y) \qquad \forall (x, y) \in \partial D. \tag{11}$$

Пусть при этом отображение $\sigma_\pm(Z)$ *дифференцируемо в точках* $Z \in \{Z \in \mathbb{C} : |Z| = 1,\ Z \ne \pm 1\}$, *функция* $\sigma'_\pm(Z)$ *в тех же точках непрерывна и не равна нулю, а в окрестности точек* $Z = \pm 1$ *удовлетворяет оценке*

$$|\sigma'_\pm(Z)| \le c\left(|Z-1|^{-\beta} + |Z+1|^{-\beta}\right),$$

где $\beta \in (0;1)$ *и постоянная* c *не зависит от* Z. *Пусть, кроме того, функция* $M_\pm(Z, T)$ *при любых* $A_1, A_2 \in (-1;1)$, $A_1 < A_2$, *удовлетворяет условию*

$$\begin{gathered} |M_\pm(Z_1, T) - M_\pm(Z_2, T)| \le c|Z_1 - Z_2|^{\alpha'} \\ \forall T, Z_1, Z_2 \in \{Z \in \mathbb{C} : |Z| = 1\} : \quad -1 < \operatorname{Re} T < A_1 < \operatorname{Re} Z_1 < \operatorname{Re} Z_2 < A_2, \\ \operatorname{Im} Z_1 \operatorname{Im} T > 0, \qquad \operatorname{Im} Z_2 \operatorname{Im} T > 0, \end{gathered} \tag{12}$$

где $1/2 < \alpha' \le 1$ *и постоянная* c *не зависит от* Z_1 *и* Z_2.

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если функция F *голоморфна в области* D_z^+, *непрерывна на множестве* $\overline{D_z^+}$, *удовлетворяет условию* (7) *и является решением интегрального уравнения* (9), *то функция*

$$U_*(\xi) = \operatorname{Re}\frac{iF\left(\sigma_+\left(\dfrac{\xi-i}{\xi+i}\right)\right)\sigma'_+\left(\dfrac{\xi-i}{\xi+i}\right)}{2(\xi+i)} \quad \forall\xi>0$$

является решением сингулярного интегрального уравнения

$$A(\xi,\xi)U_*(\xi) + \frac{2\xi B(\xi,\xi)}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{U_*(\tau)}{\tau^2-\xi^2}d\tau - \frac{2\xi}{\pi}\int\limits_0^\xi U_*(\tau)\int\limits_\tau^\xi \frac{s(A(s,\tau)-A(\xi,\tau))}{\left(\xi^2-s^2\right)^{3/2}\sqrt{s^2-\tau^2}}ds\,d\tau -$$

$$-\frac{4\xi}{\pi^2}\int\limits_0^\xi\left(\int\limits_\tau^\xi \frac{s(B(s,\tau)-B(\xi,\tau))}{\left(\xi^2-s^2\right)^{3/2}\sqrt{s^2-\tau^2}}ds\int\limits_0^\infty \frac{\tau U_*(\eta)}{\eta^2-\tau^2}d\eta\right)d\tau = f_*(\xi) \qquad \forall\xi>0, \qquad (13)$$

в котором

$$A(\xi,\tau) := 2\operatorname{Re} m(\xi,\tau), \qquad B(\xi,\tau) := 2\operatorname{Im} m(\xi,\tau), \qquad (14)$$

$$f_*(\xi) := \varphi_*(\xi) - \xi\int\limits_0^\xi \frac{s(\varphi_*(s)-\varphi_*(\xi))}{(\xi^2-s^2)^{3/2}}ds; \qquad (15)$$

здесь

$$m(\xi,\tau) = M_+\left(\frac{\xi-i}{\xi+i}, \frac{\tau-i}{\tau+i}\right),$$

а функция φ_* *выражается через заданную функцию* $\varphi_{\partial D}$ *равенством*

$$\varphi_*(\xi) := \frac{1}{\sqrt{\xi^2+1}}(\varphi_{\partial D}(x,y) - \varphi_{\partial D}(b_2,0)), \qquad (16)$$

где $x+iy = \sigma_+\left(\dfrac{\xi-i}{\xi+i}\right)$;

2) *если в сингулярном интегральном уравнении* (13) *функции* A, B, f_* *определены равенствами* (14), (15) *и функция* U_* *является таким его решением, что функция*

$$F(z) = -\frac{2(\xi+i)}{\pi\sigma'_+\left(\dfrac{\xi-i}{\xi+i}\right)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{U_*(|\tau|)}{\tau-\xi}d\tau \quad , \quad z = \sigma_+\left(\frac{\xi-i}{\xi+i}\right) \in D_z^+, \quad \operatorname{Im}\xi>0, \quad (17)$$

непрерывно продолжается из области D_z^+ *на границу* ∂D_z^+, *то граничные значения функции* (17) *удовлетворяют интегральному уравнению* (9);

3) *если функция* F *голоморфна в области* D_z^-, *непрерывна на множестве* $\overline{D_z^-}$, *обращается в нуль на бесконечности, удовлетворяет условию* (7) *и является решением интегрального уравнения* (10), *то функция*

$$U_*(\xi) = \operatorname{Re}\frac{i(\xi-i)F\left(\sigma_-\left(\dfrac{\xi-i}{\xi+i}\right)\right)\sigma'_-\left(\dfrac{\xi-i}{\xi+i}\right)}{2(\xi+i)^2} \quad \forall\xi>0$$

является решением сингулярного интегрального уравнения (13), *в котором функции* $A(\xi,\tau)$, $B(\xi,\tau)$, f_* *определяются соотношениями* (14), (15), *при этом* $m(\xi,\tau) = M_-\left(\dfrac{\xi-i}{\xi+i}, \dfrac{\tau-i}{\tau+i}\right)$ *и* $x+iy = \sigma_-\left(\dfrac{\xi-i}{\xi+i}\right)$ *для точки* (x,y) *в* (16);

4) *если в сингулярном интегральном уравнении* (13) *функции* A, B, f_* *определены соотношениями* (14), (15), *при этом* $m(\xi,\tau) = M_-\left(\frac{\xi-i}{\xi+i}, \frac{\tau-i}{\tau+i}\right)$ *и* $x+iy = \sigma_-\left(\frac{\xi-i}{\xi+i}\right)$ *для точки* (x,y) *в* (16), *а функция* U_* *является таким его решением, что функция*

$$F(z) = -\frac{2(\xi+i)^2}{\pi(\xi-i)\sigma'_-\left(\frac{\xi-i}{\xi+i}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U_*(|\tau|)}{\tau-\xi}\, d\tau, \quad z = \sigma_-\left(\frac{\xi-i}{\xi+i}\right) \in D_z^-, \quad \operatorname{Im}\xi > 0, \tag{18}$$

непрерывно продолжается из области D_z^- *на границу* ∂D_z^-, *то граничные значения функции* (18) *удовлетворяют интегральному уравнению* (10).

Доказательство. Выполним ряд преобразований интегральных уравнений (9), (10). С учетом теоремы Коши получаем равенства

$$\int_{\Gamma_{z\bar z}^{\gamma}} \frac{F(t)}{\left(\sqrt{(t-z)(t-\bar z)}\right)^{\mp}}\, dt = -\int_{\Gamma_{z\bar z}^{\gamma}} \frac{F(t)}{\left(\sqrt{(t-z)(t-\bar z)}\right)^{\pm}}\, dt =$$

$$= \int_{\partial D_z^{\pm} \setminus \Gamma_{z\bar z}^{\gamma}} \frac{F(t)}{\left(\sqrt{(t-z)(t-\bar z)}\right)^{\pm}}\, dt = \int_{\partial D_z^{\pm} \setminus \Gamma_{z\bar z}^{\gamma}} \frac{F(t)}{\left(\sqrt{(t-z)(t-\bar z)}\right)^{\mp}}\, dt.$$

Следовательно, интегральные уравнения (9), (10) приводятся к уравнению

$$\frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_{z\bar z}^{\gamma}} \frac{F(t)}{\left(\sqrt{(t-z)(t-\bar z)}\right)^{\mp}}\, dt = (\varphi_{\partial D}(x,y) - \varphi_{\partial D}(b_2,0)). \tag{19}$$

Используя конформное отображение $z = \sigma_\pm(Z)$ единичного круга на область $D_z^{\pm}$ и обозначая через $C_{z\bar z}$ прообраз дуги $\Gamma_{z\bar z}^{\gamma}$ при этом отображении, преобразуем уравнение (19) к виду

$$\frac{1}{\pi i} \int_{C_{z\bar z}} \frac{F(\sigma_\pm(T))\,\sigma'_\pm(T)}{\left(\sqrt{(\sigma_\pm(T)-\sigma_\pm(Z))(\sigma_\pm(T)-\sigma_\pm(\bar Z))}\right)^{\mp}}\, dT =$$

$$= \varphi_{\partial D}(\operatorname{Re}\sigma_\pm(Z), \operatorname{Im}\sigma_\pm(Z)) - \varphi_{\partial D}(b_2,0). \tag{20}$$

Введем в рассмотрение непрерывную ветвь $\sqrt{(T-Z)(T-\bar Z)}$ аналитической функции $Q(T) = \sqrt{(T-Z)(T-\bar Z)}$ с разрезом вдоль кривой $C_{z\bar z}$ такую, что $Q(T)>0$ при всех $T\in\mathbb{R}: T>-1$. При $T\in C_{z\bar z}$ выражение $\sqrt{(T-Z)(T-\bar Z)}$ понимаем как значение функции $Q(T)$ на правом краю разреза, т. е.

$$\sqrt{(T-Z)(T-\bar Z)} := \lim_{W\to T\in C_{z\bar z},\, |W|>1} \sqrt{(W-Z)(W-\bar Z)}.$$

Легко устанавливаются равенства

$$\left(\sqrt{(\sigma_+(T)-\sigma_+(Z))(\sigma_+(T)-\sigma_+(\bar Z))}\right)^{-} = \frac{\sqrt{(T-Z)(T-\bar Z)}}{M_+(Z,T)},$$

$$\left(\sqrt{(\sigma_-(T)-\sigma_-(Z))(\sigma_-(T)-\sigma_-(\bar Z))}\right)^{+} = \frac{\sqrt{(T-Z)(T-\bar Z)}}{T\,M_-(Z,T)},$$

с учетом которых уравнение (20) приводится к виду

$$\frac{1}{\pi i} \int_{C_{z\bar z}} \frac{F_\pm(T)\,\sigma'_\pm(T)\,M_\pm(Z,T)}{\sqrt{(T-Z)(T-\bar Z)}}\, dT = \varphi_{\partial D}(\operatorname{Re}\sigma_\pm(Z), \operatorname{Im}\sigma_\pm(Z)) - \varphi_{\partial D}(b_2,0), \tag{21}$$

где $F_+(T) := F(\sigma_+(T))$ и $F_-(T) := T\,F(\sigma_-(T))$.

Выполним теперь конформное отображение $\xi = i\dfrac{1+Z}{1-Z}$ комплексной плоскости. При этом отображении образом дуги $C_{z\bar z}$ является отрезок $[-|\xi|, |\xi|]$, причем точки $T, \overline{T}$ дуги $C_{z\bar z}$, симметричные относительно вещественной прямой, отображаются соответственно в точки τ и $-\tau$ отрезка $[-|\xi|, |\xi|]$, симметричные относительно точки 0. С учетом равенства

$$\sqrt{(T-Z)(T-\overline{Z})} = -\frac{2i}{(\tau+i)\sqrt{\xi^2+1}}\sqrt{\xi^2-\tau^2} \qquad \forall T \in C_{z\bar z},$$

в котором соответствующие точки $T \in C_{z\bar z}$ и $\tau \in [-|\xi|, |\xi|]$ связаны соотношением $T = \dfrac{\tau-i}{\tau+i}$, указанным конформным отображением плоскости уравнение (21) приводится к интегральному уравнению

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_{-|\xi|}^{|\xi|} \frac{F_*(\tau)\,m(\xi,\tau)}{\sqrt{\xi^2-\tau^2}}\,d\tau = \varphi_*(\xi) \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \tag{22}$$

где функция $F_*(\tau) := \dfrac{iF_\pm(T)\,\sigma'_\pm(T)}{2(\tau+i)}$ голоморфна в полуплоскости $\{\tau \in \mathbb{C}: \operatorname{Im}\tau > 0\}$, непрерывно продолжается на $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ и обращается в нуль на бесконечности.

Ввиду четности функции φ_* уравнение (22) равносильно уравнению

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\xi} \frac{F_*(\tau)\,m(\xi,\tau) + F_*(-\tau)\,m(\xi,-\tau)}{\sqrt{\xi^2-\tau^2}}\,d\tau = \varphi_*(\xi) \qquad \forall \xi > 0. \tag{23}$$

Полагая в последнем равенстве $\xi = s$, а затем умножая обе его части на $s(\xi^2-s^2)^{-1/2}$ и, наконец, интегрируя по переменной s на отрезке $[0,\xi]$, получаем соотношение

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\xi} \frac{s}{\sqrt{\xi^2-s^2}} \int\limits_{0}^{s} \frac{F_*(\tau)\,m(s,\tau) + F_*(-\tau)\,m(s,-\tau)}{\sqrt{s^2-\tau^2}}\,d\tau\,ds = \int\limits_{0}^{\xi} \frac{s\,\varphi_*(s)}{\sqrt{\xi^2-s^2}}\,ds.$$

Изменяя порядок интегрирования в повторном интеграле, из этого равенства имеем

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\xi}\int\limits_{\tau}^{\xi} \frac{s\left(F_*(\tau)\,m(s,\tau) + F_*(-\tau)\,m(s,-\tau)\right)}{\sqrt{(\xi^2-s^2)(s^2-\tau^2)}}\,ds\,d\tau = \int\limits_{0}^{\xi} \frac{s\,\varphi_*(s)}{\sqrt{\xi^2-s^2}}\,ds. \tag{24}$$

Далее, дифференцируя равенство (24) по переменной ξ и учитывая при этом равенства (3), (4), получаем

$$-\frac{2\xi}{\pi}\int\limits_{0}^{\xi}\int\limits_{\tau}^{\xi} \frac{s\left[F_*(\tau)\big(m(s,\tau) - m(\xi,\tau)\big) + F_*(-\tau)\big(m(s,-\tau) - m(\xi,-\tau)\big)\right]}{(\xi^2-s^2)^{3/2}\sqrt{s^2-\tau^2}}\,ds\,d\tau +$$
$$+ F_*(\xi)\,m(\xi,\xi) + F_*(-\xi)\,m(\xi,-\xi) = f_*(\xi). \tag{25}$$

Очевидно, что при всех $\tau \in \mathbb{R}$ выполняется равенство

$$m(\xi,-\tau) = \overline{m(\xi,\tau)}. \tag{26}$$

Функция F_*, в свою очередь, удовлетворяет соотношению

$$F_*(-\tau) = \overline{F_*(\tau)} \qquad \forall \tau \in \mathbb{R}\setminus\{0\}. \tag{27}$$

Действительно, рассматривая отображение $\mu_{\pm}(\tau):=\sigma_{\pm}\left(\frac{\tau-i}{\tau+i}\right)$ полуплоскости $\{\tau\in\mathbb{C}:\ \operatorname{Im}\tau\geq 0\}$ на множество $\overline{D_z^{\pm}}$, замечаем, что образом точек τ и $-\tau$ прямой $\mathbb{R}$ при этом отображении являются соответственно точки t и $\bar{t}$ границы $\partial D_z^{\pm}$, симметричные относительно вещественной прямой. Поэтому выполняется равенство

$$\mu'_{\pm}(-\tau) = -\overline{\mu'_{\pm}(\tau)} \qquad \forall\,\tau\in\mathbb{R}\setminus\{0\}. \tag{28}$$

Теперь с учетом тождества

$$\sigma'_{\pm}(T) = \frac{(\tau+i)^2}{2i}\mu'_{\pm}(\tau) \qquad \forall\,\tau\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

преобразуем выражение $F_*(\tau)$ к виду

$$F_*(\tau) = \frac{1}{4}F_{\pm}\left(\frac{\tau-i}{\tau+i}\right)\mu'_{\pm}(\tau)(\tau+i)$$

и, как следствие соотношений (7), (28), получаем равенство (27).

Введем в рассмотрение функции $U_*(\xi):=\operatorname{Re}F_*(\xi)$, $V_*(\xi):=\operatorname{Im}F_*(\xi)$ и, учитывая соотношения (26), (27), перепишем равенство (25) в виде

$$A(\xi,\xi)U_*(\xi) - B(\xi,\xi)V_*(\xi) - \frac{2\xi}{\pi}\int\limits_0^{\xi}U_*(\tau)\int\limits_{\tau}^{\xi}\frac{s\,(A(s,\tau)-A(\xi,\tau))}{\left(\xi^2-s^2\right)^{3/2}\sqrt{s^2-\tau^2}}\,ds\,d\tau\,+$$

$$+\frac{2\xi}{\pi}\int\limits_0^{\xi}V_*(\tau)\int\limits_{\tau}^{\xi}\frac{s\,(B(s,\tau)-B(\xi,\tau))}{\left(\xi^2-s^2\right)^{3/2}\sqrt{s^2-\tau^2}}\,ds\,d\tau = f_*(\xi). \tag{29}$$

Используя формулу Гильберта для обращения сингулярного интеграла Коши [9, с. 93], с учетом четности функции U_* получаем равенства

$$V_*(\xi) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{U_*(\tau)}{\tau-\xi}\,d\tau = -\frac{2\xi}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{U_*(\tau)}{\tau^2-\xi^2}\,d\tau \qquad \forall\,\xi>0.$$

Наконец, подставляя полученное для функции V_* выражение в (29), получаем сингулярное интегральное уравнение (13) для нахождения функции U_*. Таким образом, утверждения 1, 3 теоремы доказаны, а для завершения доказательства утверждения 2 (или утверждения 4) остается заметить, что функция F выражается через функцию U_* по формуле (17) (или соответственно по формуле (18)) в результате решения задачи Шварца для полуплоскости [10, с. 209].

Отметим, что в случае, когда границей области D является единичная окружность $\{(x,y):\ x^2+y^2=1\}$, выполняются тождества $M_{\pm}(Z,T)\equiv 1$ и уравнение (23) является уравнением Абеля, которое разрешимо в явном виде относительно функции U_*, а именно: $U_*(\xi)=f_*(\xi)/2$ при всех $\xi>0$. В случае внутренней задачи Дирихле для единичного круга это установлено в работе [5]. Теперь становится очевидным, что и в случае внешней задачи Дирихле, когда область D является дополнительной к замыканию единичного круга, справедлив почти дословный аналог теоремы 4 из [5].

3. Регуляризация сингулярного интегрального уравнения задачи Дирихле. Установим теперь условия на границу области $D_z^{\pm}$, достаточные для регуляризации сингулярного интегрального уравнения (13).

При указанной регуляризации используется перестановка порядка интегрирования в повторных интегралах, которые являются композицией сингулярного и регулярного интегралов. В монографиях [9, 11] доказана возможность изменения порядка интегрирования в этом случае при классических предположениях о кривой интегрирования, плотности сингулярного интеграла и ядре регулярного интеграла. В [12, 13] аналогичные результаты получены на замкнутом жордановом спрямляемом контуре интегрирования при более общих предположениях о заданных функциях. Нам понадобится следующий результат об изменении порядка интегрирования в повторных интегралах по вещественной прямой, который не следует непосредственно из результатов работ [9, 11 – 13].

Лемма 2. *Пусть функция* U_* *принадлежит классу* $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ *и обращается в нуль в бесконечно удаленной точке, а для функции* $\tilde{m}(\xi,\tau)$ *справедливы оценки*

$$|\tilde{m}(\xi,\tau)| \leq \Omega(\xi,\tau) \quad \forall \xi,\tau:\ 0<\tau<\xi, \tag{30}$$

$$|\tilde{m}(\xi,s)-\tilde{m}(\xi,\tau)| \leq \Omega(\xi,\tau)\left(\frac{s-\tau}{\xi-\tau}\right)^{\beta} \quad \forall \xi,s,\tau:\ 0<\tau<s<\xi, \tag{31}$$

где $\beta\in(0;1]$ *и функция* $\Omega(\xi,\tau)$ *удовлетворяет условиям*

$$\sup_{\tau:\,\eta\le\xi-\tau\le2\eta}\Omega(\xi,\tau) \leq c(\xi)\sup_{\tau:\,\nu\eta\le\xi-\tau\le2\nu\eta}\Omega(\xi,\tau) \quad \forall \nu\in(0;1), \tag{32}$$

$$\int_0^{\xi}\sup_{\tau:\,\eta\le\xi-\tau\le2\eta}\Omega(\xi,\tau)\ln\frac{\xi}{\eta}\,d\eta \leq c(\xi), \tag{33}$$

в которых постоянная $c(\xi)$ *зависит только от* ξ.

Тогда при всех $\xi>0$ *выполняется равенство*

$$\int_0^{\xi}\tilde{m}(\xi,\tau)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{U_*(s)}{s-\tau}\,ds\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty}U_*(s)\int_0^{\xi}\frac{\tilde{m}(\xi,\tau)}{s-\tau}\,d\tau\,ds. \tag{34}$$

Доказательство. Представим каждый из повторных интегралов, входящих в равенство (34), суммой интегралов:

$$I := \int_{-\infty}^{\infty}U_*(s)\int_0^{\xi}\frac{\tilde{m}(\xi,\tau)}{s-\tau}\,d\tau\,ds =$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{-N}+\int_N^{\infty}\right)U_*(s)\int_0^{\xi}\frac{\tilde{m}(\xi,\tau)}{s-\tau}\,d\tau\,ds + \int_{-N}^{N}U_*(s)\int_{\{\tau\in[0,\xi]:\,|\tau-s|>\varepsilon\}}\frac{\tilde{m}(\xi,\tau)}{s-\tau}\,d\tau\,ds +$$

$$+ \int_{-N}^{N}U_*(s)\int_{\{\tau\in[0,\xi]:\,|\tau-s|\le\varepsilon\}}\frac{\tilde{m}(\xi,\tau)}{s-\tau}\,d\tau\,ds =: I_1+I_2+I_3,$$

$$I^* := \int_0^{\xi}\tilde{m}(\xi,\tau)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{U_*(s)}{s-\tau}\,ds\,d\tau = \int_0^{\xi}\tilde{m}(\xi,\tau)\left(\int_{-\infty}^{-N}+\int_N^{\infty}\right)\frac{U_*(s)}{s-\tau}\,ds\,d\tau +$$

$$+ \int_0^{\xi}\tilde{m}(\xi,\tau)\left(\int_{-N}^{\tau-\varepsilon}+\int_{\tau+\varepsilon}^{N}\right)\frac{U_*(s)}{s-\tau}\,ds\,d\tau + \int_0^{\xi}\tilde{m}(\xi,\tau)\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon}\frac{U_*(s)}{s-\tau}\,ds\,d\tau =: I_1^*+I_2^*+I_3^*.$$

Согласно теореме Фубини выполняется равенство $I_2=I_2^*$. В силу соотношений (30), (33) и предположения о том, что $U_*\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ и $U_*(\infty)=0$, интегралы I_1, I_1^* стремятся к нулю при $N\to\infty$, а интеграл I_3^* стремится к нулю при $\varepsilon\to0$.

Покажем теперь, что I_3 также стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. С этой целью представим этот интеграл в виде

$$I_3 = \int_{\xi}^{\xi+\varepsilon} U_*(s) \int_{s-\varepsilon}^{\xi} \frac{\tilde{m}(\xi,\tau)}{s-\tau} d\tau\, ds + \int_{-\varepsilon}^{0} U_*(s) \int_{0}^{s+\varepsilon} \frac{\tilde{m}(\xi,\tau)}{s-\tau} d\tau\, ds +$$

$$+ \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi} U_*(s) \int_{s-\varepsilon}^{\xi} \frac{\tilde{m}(\xi,\tau)}{s-\tau} d\tau\, ds + \int_{0}^{\varepsilon} U_*(s) \int_{0}^{s+\varepsilon} \frac{\tilde{m}(\xi,\tau)}{s-\tau} d\tau\, ds + \int_{\varepsilon}^{8\varepsilon} U_*(s) \int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} \frac{\tilde{m}(\xi,\tau)}{s-\tau} d\tau\, ds +$$

$$+ \int_{\xi-8\varepsilon}^{\xi-\varepsilon} U_*(s) \int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} \frac{\tilde{m}(\xi,\tau)}{s-\tau} d\tau\, ds + \int_{8\varepsilon}^{\xi-8\varepsilon} U_*(s) \int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} \frac{\tilde{m}(\xi,\tau)}{s-\tau} d\tau\, ds =: \sum_{j=1}^{7} I_3^j .$$

Учитывая теорему Фубини, оценку (30) и условие (33), получаем

$$\left| I_3^1 \right| \le \|U_*\|_{C(\mathbb{R})} \int_{\xi}^{\xi+\varepsilon} \int_{s-\varepsilon}^{\xi} \frac{|\tilde{m}(\xi,\tau)|}{s-\tau} d\tau\, ds = \|U_*\|_{C(\mathbb{R})} \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi} |\tilde{m}(\xi,\tau)| \int_{\xi}^{\tau+\varepsilon} \frac{ds}{s-\tau} d\tau =$$

$$\le \|U_*\|_{C(\mathbb{R})} \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi} |\tilde{m}(\xi,\tau)| \ln \frac{\varepsilon}{s-\tau}\, d\tau \le$$

$$\le \|U_*\|_{C(\mathbb{R})} \int_{0}^{\varepsilon} \sup_{\tau:\, \eta \le \xi-\tau \le 2\eta} \Omega(\xi,\tau) \ln \frac{\varepsilon}{\eta}\, d\eta \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

Аналогично оценивается интеграл I_3^2.

Чтобы оценить интеграл I_3^3, введем в рассмотрение множества $e_1 := [s - (\xi - s)/4,\ s + (\xi - s)/4]$, $e_2 := ([s - 2(\xi - s),\ s - (\xi - s)/4] \cup [s + (\xi - s)/4,\ \xi]) \cap [s - \varepsilon,\ \xi]$, $e_3 := [s - \varepsilon,\ \xi] \setminus [s - 2(\xi - s),\ \xi]$ и представим I_3^3 суммой трех интегралов:

$$I_3^3 = \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi} U_*(s) \int_{e_1} \frac{\tilde{m}(\xi,\tau) - \tilde{m}(\xi,s)}{s-\tau} d\tau\, ds + \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi} U_*(s) \int_{e_2} \frac{\tilde{m}(\xi,\tau)}{s-\tau} d\tau\, ds +$$

$$+ \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi} U_*(s) \int_{e_3} \frac{\tilde{m}(\xi,\tau)}{s-\tau} d\tau\, ds =: i_1 + i_2 + i_3.$$

lерь с учетом оценки (31) и условия (33) получаем соотношения

$$|i_1| \le \|U_*\|_{C(\mathbb{R})} \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi} (\xi - s)^{-\beta} \sup_{\tau:\, 3(\xi-s)/4 \le \xi-\tau \le 5(\xi-s)/4} \Omega(\xi,\tau) \int_{e_1} |s-\tau|^{\beta-1} d\tau\, ds \le$$

$$\le \frac{2^{3-2\beta}}{3} \|U_*\|_{C(\mathbb{R})} \int_{0}^{4\varepsilon/3} \sup_{\tau:\, \eta \le \xi-\tau \le 2\eta} \Omega(\xi,\tau)\, d\eta \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

читывая оценку (30), теорему Фубини и условие (33), также имеем

$$|i_2| \le 4 \|U_*\|_{C(\mathbb{R})} \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi} \int_{e_2} \Omega(\xi,\tau)\, d\tau \frac{ds}{\xi - s} \le$$

$$\le 2 \|U_*\|_{C(\mathbb{R})} \int_{0}^{3\varepsilon/2} \int_{0}^{\eta_1} \sup_{\tau:\, \eta \le \xi-\tau \le 2\eta} \Omega(\xi,\tau)\, d\eta \frac{d\eta_1}{\eta_1} \le$$

$$\leq 2\|U_*\|_{C(\mathbb{R})} \int\limits_0^{3\varepsilon/2} \sup_{\tau:\,\eta\leq\xi-\tau\leq 2\eta} \Omega(\xi,\tau) \ln\frac{3\varepsilon}{2\eta}\,d\eta \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

При оценке интеграла i_3 используем неравенство (30) и условия (32), (33):

$$|i_3| \leq 2\|U_*\|_{C(\mathbb{R})} \int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi} \int\limits_{e_3} \frac{\Omega(\xi,\tau)}{\xi-\tau}\,d\tau\,ds \leq 2\|U_*\|_{C(\mathbb{R})} \int\limits_0^{\varepsilon}\int\limits_{\eta}^{\varepsilon} \sup_{\tau:\,\eta_1\leq\xi-\tau\leq 2\eta_1} \Omega(\xi,\tau)\frac{d\eta_1}{\eta_1}\,d\eta \leq$$

$$\leq 2c(\xi)\|U_*\|_{C(\mathbb{R})} \int\limits_0^{\varepsilon} \sup_{\tau:\,\eta\leq\xi-\tau\leq 2\eta} \Omega(\xi,\tau) \ln\frac{\varepsilon}{\eta}\,d\eta \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

Таким образом, $I_3^3 \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Аналогично устанавливается, что интегралы I_3^4, I_3^5, I_3^6 также стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$. И, наконец, подобно оценке интеграла i_1 получаем

$$\left|I_3^7\right| \leq \frac{1}{\beta}\left(\frac{8}{7}\right)^{1-\beta} \|U_*\|_{C(\mathbb{R})} \varepsilon^{\beta} \int\limits_{7\varepsilon}^{\xi-7\varepsilon} \sup_{\tau:\,\eta\leq\xi-\tau\leq 2\eta} \Omega(\xi,\tau)\frac{d\eta}{\eta^{\beta}} \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

Следствием полученных соотношений является равенство

$$\lim_{N\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}(I - I^*) = 0,$$

из которого в силу того, что интегралы I, I^* не зависят ни от N, ни от ε, следует равенство (34). Лемма доказана.

В дальнейшем предполагаем, что области D_z^+, D_z^- имеют гладкие границы ∂D_z^+, ∂D_z^- и такие, что конформное отображение $\sigma_\pm(Z)$ на границе единичного круга имеет непрерывную контурную производную. В этом случае при всех $T_0, T_1, Z_1, Z_0 \in \{Z\in\mathbb{C}: |Z|=1\}$ таких, что $-1 < \operatorname{Re}T_0 < \operatorname{Re}T_1 < \operatorname{Re}Z_1 < \operatorname{Re}Z_0 < 1$, $\operatorname{Im}T_1\operatorname{Im}T_0 > 0$, $\operatorname{Im}Z_1\operatorname{Im}T_0 > 0$ и $\operatorname{Im}Z_0\operatorname{Im}T_0 > 0$, справедливы оценки

$$\left|\frac{\sigma_\pm(T_0)-\sigma_\pm(Z_1)}{T_0-Z_1} - \frac{\sigma_\pm(T_0)-\sigma_\pm(Z_0)}{T_0-Z_0}\right| \leq c\,\frac{\omega(\sigma'_\pm, |T_0-Z_0|)}{|T_0-Z_0|}|Z_1-Z_0|, \tag{35}$$

$$\left|\frac{\sigma_\pm(T_1)-\sigma_\pm(Z_0)}{T_1-Z_0} - \frac{\sigma_\pm(T_0)-\sigma_\pm(Z_0)}{T_0-Z_0}\right| \leq c\,\frac{\omega(\sigma'_\pm, |T_0-Z_0|)}{|T_0-Z_0|}|T_1-T_0|, \tag{36}$$

где c — некоторая абсолютная постоянная.

С учетом того, что при сделанных предположениях об отображении $\sigma_\pm$ при всех $T, Z \in \{Z\in\mathbb{C}: |Z|=1\}$ выполняются неравенства

$$0 < c_1 \leq \left|\frac{\sigma_\pm(T)-\sigma_\pm(Z)}{T-Z}\right| \leq c_2,$$

из оценок (35), (36) следуют аналогичные оценки для функции $M_\pm(Z,T)$:

$$|M_\pm(Z_1,T_0) - M_\pm(Z_0,T_0)| \leq c\,\frac{\omega(\sigma'_\pm, |T_0-Z_0|)}{|T_0-Z_0|}|Z_1-Z_0|, \tag{37}$$

$$|M_\pm(Z_0,T_1) - M_\pm(Z_0,T_0)| \leq c\,\frac{\omega(\sigma'_\pm, |T_0-Z_0|)}{|T_0-Z_0|}|T_1-T_0| \tag{38}$$

$$\forall\, T_0, T_1, Z_1, Z_0 \in \{Z\in\mathbb{C}: |Z|=1\}: -1 < \operatorname{Re}T_0 < \operatorname{Re}T_1 < \operatorname{Re}Z_1 < \operatorname{Re}Z_0 < 1,$$

$$\operatorname{Im}T_1\operatorname{Im}T_0 > 0, \quad \operatorname{Im}Z_1\operatorname{Im}T_0 > 0, \quad \operatorname{Im}Z_0\operatorname{Im}T_0 > 0.$$

Здесь c, c_1, c_2 — некоторые абсолютные постоянные.

Очевидно, что из оценки (37) следует оценка (12). Оценки (37), (38) также существенно используются при доказательстве следующей леммы.

Лемма 3. *Пусть конформное отображение* $\sigma_{\pm}(Z)$ *имеет непрерывную контурную производную на границе единичного круга. Тогда для функции*

$$\tilde{m}(\xi,\tau) = \frac{2\xi}{\pi}\int_{\tau}^{\xi} \frac{s\big(m(s,\tau)-m(\xi,\tau)\big)}{(\xi^2-s^2)^{3/2}\sqrt{s^2-\tau^2}}\,ds$$

справедливы оценки

$$|\tilde{m}(\xi,\tau)| \le c\,\frac{\omega(\sigma'_{\pm},|T-Z|)}{|T-Z|}\,\frac{1}{(\xi+1)^{3/2}\sqrt{\tau+1}} \qquad \forall \xi > \tau > 0, \tag{39}$$

$$|\tilde{m}(\xi,\tau) - \tilde{m}(\xi-\varepsilon,\tau)| \le c\,\frac{\omega(\sigma'_{\pm},|T-Z|)}{|T-Z|}\,\frac{1}{(\xi+1)(\tau+1)}\,\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\xi-\tau}}, \tag{40}$$

$$|\tilde{m}(\xi,\tau+\varepsilon) - \tilde{m}(\xi,\tau)| \le c\,\frac{\omega(\sigma'_{\pm},|T-Z|)}{|T-Z|}\,\frac{1}{\tau^2+1}\,\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\xi-\tau}} \tag{41}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall \tau > 0 \quad \forall \xi > \tau + 3\varepsilon.$$

Здесь $T = \dfrac{\tau-i}{\tau+i}$, $Z = \dfrac{\xi-i}{\xi+i}$ *и* c *— некоторая абсолютная постоянная.*

Доказательство. С учетом неравенства (37) легко получаем оценку (39). Для доказательства оценки (40) представим приращение функции $\tilde{m}(\xi,\tau)$ по первой переменной в виде

$$\tilde{m}(\xi,\tau) - \tilde{m}(\xi-\varepsilon,\tau) = \frac{2\xi}{\pi}\int_{\xi-2\varepsilon}^{\xi} \frac{s\big(m(s,\tau)-m(\xi,\tau)\big)}{(\xi^2-s^2)^{3/2}\sqrt{s^2-\tau^2}}\,ds \; -$$

$$- \; \frac{2(\xi-\varepsilon)}{\pi}\int_{\xi-2\varepsilon}^{\xi-\varepsilon} \frac{s\big(m(s,\tau)-m(\xi-\varepsilon,\tau)\big)}{((\xi-\varepsilon)^2-s^2)^{3/2}\sqrt{s^2-\tau^2}}\,ds \; +$$

$$+ \; \frac{2}{\pi}\int_{\tau}^{\xi-2\varepsilon} \frac{s\big(m(s,\tau)-m(\xi,\tau)\big)}{\sqrt{s^2-\tau^2}}\left(\frac{\xi}{(\xi^2-s^2)^{3/2}} - \frac{\xi-\varepsilon}{((\xi-\varepsilon)^2-s^2)^{3/2}}\right)ds \; -$$

$$- \; \frac{2(\xi-\varepsilon)\big(m(\xi,\tau)-m(\xi-\varepsilon,\tau)\big)}{\pi}\int_{\tau}^{\xi-2\varepsilon} \frac{s\,ds}{((\xi-\varepsilon)^2-s^2)^{3/2}\sqrt{s^2-\tau^2}}.$$

Теперь, оценивая интегралы в правой части этого равенства и используя при этом неравенство (37), получаем оценку (40). Аналогично с учетом оценок (37), (38) доказывается оценка (41). Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть конформное отображение* $\sigma_{\pm}(Z)$ *на границе единичного круга имеет непрерывную контурную производную, модуль непрерывности которой удовлетворяет условию*

$$\int_0^1 \frac{\omega(\sigma'_{\pm},\eta)}{\eta}\ln\frac{1}{\eta}\,d\eta < \infty, \tag{42}$$

а для функции $\tilde{m}(\xi,\tau)$ *справедливы оценки* (39) – (41). *Тогда для функции*

$$m_p(\xi,\tau) = \int_0^{\xi} \frac{|\tilde{m}(\xi,s)|}{s-\tau}\,ds$$

справедливы оценки

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|m_p(\xi,\tau)|}{\sqrt{\tau^2+1}}d\tau \le c\frac{\ln(\xi+1)}{(\xi+1)^{3/2}}\int\limits_0^2 \frac{\omega(\sigma'_\pm,\eta)}{\eta}\frac{\ln(3/\eta)}{(\xi+1)^{-1/2}\ln(\xi+1)+\sqrt{\eta}\ln(3/\eta)}d\eta \quad \forall\xi\ge 1, \tag{43}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|m_p(\xi,\tau)|}{\sqrt{\tau^2+1}}d\tau \le c\int\limits_0^{\xi} \frac{\omega(\sigma'_\pm,\eta)}{\eta}\ln\frac{3}{\eta}\,d\eta, \tag{44}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|m_p(\xi+\varepsilon,\tau)-m_p(\xi,\tau)|}{\sqrt{\tau^2+1}}d\tau \le$$

$$\le c\frac{1}{\xi+1}\sqrt{\varepsilon}\ln\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^2 \frac{\omega(\sigma'_\pm,\eta)}{\eta}\frac{\ln(3/\eta)}{\sqrt{\varepsilon}\ln(1/\varepsilon)+\sqrt{\eta}\ln(3/\eta)}d\eta \ \forall\xi>0,\ \forall\varepsilon\in\left(0,\min\left\{\frac{1}{2},\xi\right\}\right), \tag{45}$$

где c — некоторая абсолютная постоянная.

Доказательство. Для доказательства неравенства (43) используем равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|m_p(\xi,\tau)|}{\sqrt{\tau^2+1}}d\tau = \left(\int\limits_{-\infty}^{-2\xi}+\int\limits_{2\xi}^{\infty}\right)\frac{|m_p(\xi,\tau)|}{\sqrt{\tau^2+1}}d\tau + \int\limits_{-2\xi}^{0}\frac{|m_p(\xi,\tau)|}{\sqrt{\tau^2+1}}d\tau +$$

$$+\int\limits_{\xi}^{2\xi}\frac{|m_p(\xi,\tau)|}{\sqrt{\tau^2+1}}d\tau + \int\limits_{\xi/2}^{\xi}\frac{|m_p(\xi,\tau)|}{\sqrt{\tau^2+1}}d\tau + \int\limits_{0}^{\xi/2}\frac{|m_p(\xi,\tau)|}{\sqrt{\tau^2+1}}d\tau =: \sum_{j=4}^{8} I_j$$

и оценим интегралы $I_4, I_5, \ldots, I_8$ при любом $\xi\ge 1$.

С учетом оценки (39) получаем соотношения

$$I_4 \le c\left(\int\limits_{-\infty}^{-2\xi}+\int\limits_{2\xi}^{\infty}\right)\frac{d\tau}{\tau^2+1}\int\limits_0^{\xi}|\tilde m(\xi,s)|ds \le c\frac{1}{(\xi+1)^{5/2}}\int\limits_0^2\frac{\omega(\sigma'_\pm,\eta)}{\eta}\frac{d\eta}{(\xi+1)^{-3/2}+\eta^{3/2}} \le$$

$$\le c\frac{\ln(\xi+1)}{(\xi+1)^{3/2}}\int\limits_0^2 \frac{\omega(\sigma'_\pm,\eta)}{\eta}\frac{\ln(3/\eta)}{(\xi+1)^{-1/2}\ln(\xi+1)+\sqrt{\eta}\ln(3/\eta)}d\eta.$$

Здесь и далее в доказательстве через c обозначены абсолютные постоянные, значения которых, вообще говоря, различны даже в пределах одной цепочки неравенств.

Интегралы I_5, I_6 оцениваются с помощью теоремы Фубини и соотношения (39) подобно оценке модуля интеграла I_3^1 при доказательстве леммы 2. Также аналогично оценке интеграла I_3^3 оценивается интеграл I_7, при этом используются неравенства (39), (41).

Наконец, введем в рассмотрение множества $e'_1 := [\tau-\tau^3/\xi^2,\ \tau+\tau^3/\xi^2]$, $e'_2 :=$ $:= [0, \tau-\tau^3/\xi^2]\cup[\tau+\tau^3/\xi^2,\ 3\xi/4]$, $e'_3 := [3\xi/4,\ \xi]$ и оценим интеграл I_8 суммой трех интегралов:

$$I_8 \le \int\limits_0^{\xi/2}\int\limits_{e'_1}\frac{|\tilde m(\xi,s)-\tilde m(\xi,\tau)|}{|s-\tau|}ds\frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2+1}} + \int\limits_0^{\xi/2}\int\limits_{e'_2}\frac{|\tilde m(\xi,s)|}{|s-\tau|}ds\frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2+1}} +$$

$$+\int\limits_0^{\xi/2}\int\limits_{e'_3}\frac{|\tilde m(\xi,s)|}{s-\tau}ds\frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2+1}} =: i'_1 + i'_2 + i'_3.$$

Теперь интегралы i'_1, i'_3 оцениваются аналогично тому, как при доказательстве леммы 2 оценены интегралы i_1, i_3, а оценивая интеграл i_2, с учетом оценки (39) и свойств модуля непрерывности (см., например, [14]) получаем

$$i_2' \le c\frac{1}{(\xi+1)^{3/2}}\int_0^{\xi/2}\frac{\omega(\sigma_\pm', |T-Z|)}{|T-Z|}\int_{e_2'}\frac{ds}{|s-\tau|\sqrt{s+1}}\frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2+1}} \le$$

$$\le c\frac{1}{(\xi+1)^{3/2}}\int_0^{\xi/2}\frac{\omega(\sigma_\pm', |T-Z|)\sqrt{\tau+1}}{|T-Z|}\ln\frac{\xi}{\tau}\frac{d\tau}{\tau^2+1} \le$$

$$\le c\frac{1}{(\xi+1)^{3/2}}\left(\omega(\sigma_\pm', 2)\int_0^{1/2}\ln\frac{\xi}{\tau}d\tau + \ln(\xi+1)\int_{\xi/(\xi^2+4)}^{2}\frac{\omega(\sigma_\pm', \eta)}{\eta^{3/2}}d\eta\right) \le$$

$$\le c\frac{\ln(\xi+1)}{(\xi+1)^{3/2}}\int_0^2\frac{\omega(\sigma_\pm', \eta)}{\eta}\frac{\ln(3/\eta)}{(\xi+1)^{-1/2}\ln(\xi+1)+\sqrt{\eta}\ln(3/\eta)}d\eta.$$

Таким образом, неравенство (43) доказано. Аналогично устанавливаются оценки (44), (45). Лемма доказана.

Обозначим через $C_e(\mathbb{R})$ подпространство банахова пространства $C(\mathbb{R})$, состоящее из четных функций, а через $\mathcal{D}_e(\mathbb{R})$ — множество четных функций класса $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Введем в рассмотрение функции

$$\tilde{m}(\xi,\tau) := \begin{cases} \dfrac{2\xi}{\pi}\displaystyle\int_\tau^\xi \frac{s(m(s,\tau)-m(\xi,\tau))}{(\xi^2-s^2)^{3/2}\sqrt{s^2-\tau^2}}ds & \text{при} \quad \xi\tau>0, \quad |\tau|<|\xi|; \\ 0 & \text{при} \quad \xi\tau<0 \quad \text{или} \quad \xi\tau>0, \ |\tau|>|\xi|, \end{cases}$$

$$\tilde{A}(\xi,\tau) := 2\operatorname{Re}\tilde{m}(\xi,\tau), \qquad \tilde{B}(\xi,\tau) := 2\operatorname{Im}\tilde{m}(\xi,\tau),$$

$$k_p(\xi,\tau) := -\frac{\xi}{|\xi|}\tilde{A}(\xi,\tau) + \frac{1}{\pi}\int_0^\xi\frac{\tilde{B}(\xi,\eta)}{\eta-\tau}d\eta,$$

$$\tilde{f}_*(\tau) := \begin{cases} f_*(\tau) & \text{при} \quad \tau\ge 0; \\ f_*(-\tau) & \text{при} \quad \tau<0 \end{cases}$$

и интегральные операторы

$$(k_p f)(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty}\frac{k_p(\xi,\tau)}{\sqrt{\tau^2+1}}f(\tau)d\tau,$$

$$(Rf)(\xi) := \sqrt{\xi^2+1}\left(\frac{A(\xi,\xi)}{(A(\xi,\xi))^2+(B(\xi,\xi))^2}f(\xi) + \frac{P_\pm(\xi)}{4\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{(\tau^2+1)\left|\operatorname{Im}\sigma_\pm\left(\frac{\tau-i}{\tau+i}\right)\right|}{2|\tau|}}\frac{f(\tau)}{\tau-\xi}d\tau\right),$$

где

$$P_+(\xi) := \sqrt{\sigma_+'\left(\frac{\xi-i}{\xi+i}\right)} - \sqrt{\sigma_+'\left(\frac{\xi+i}{\xi-i}\right)},$$

$$P_-(\xi) := \sqrt{-\left(\frac{\xi-i}{\xi+i}\right)^2\sigma_-'\left(\frac{\xi-i}{\xi+i}\right)} - \sqrt{-\left(\frac{\xi+i}{\xi-i}\right)^2\sigma_-'\left(\frac{\xi+i}{\xi-i}\right)},$$

при этом значения корней положительны при $\xi=0$.

В следующей теореме приведены условия, достаточные для регуляризации сингулярного интегрального уравнения (13).

Теорема 3. *Пусть функция* $\varphi_{\partial D}$ *принадлежит классу* $\tilde{\mathcal{H}}_\alpha(\partial D)$, $1/2 < \alpha \leq \leq 1$, *и удовлетворяет условию* (11), *а конформное отображение* $\sigma_\pm(Z)$ *на границе единичного круга имеет непрерывную контурную производную, модуль непрерывности которой удовлетворяет условию*

$$\int_0^1 \frac{\omega(\sigma'_\pm, \eta)}{\eta} \ln^3 \frac{1}{\eta}\, d\eta < \infty. \tag{46}$$

Тогда каждое решение сингулярного интегрального уравнения (13) *вида*

$$U_*(\xi) = \frac{U_0(\xi)}{\sqrt{\xi^2+1}}, \tag{47}$$

где $U_0 \in \mathcal{D}_e(\mathbb{R})$, *может быть получено в результате решения интегрального уравнения Фредгольма*

$$U_0(\xi) + (R(k_p U_0))(\xi) = (R\tilde{f}_*)(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \tag{48}$$

в котором оператор Rk_p *компактен в пространстве* $C_e(\mathbb{R})$. *При этом уравнение* (48) *имеет единственное решение в пространстве* $C_e(\mathbb{R})$, *которое принадлежит классу* $\mathcal{D}_e(\mathbb{R})$.

Доказательство. Из оценок (39), (41) следует, что для функции $\tilde{B}(\xi,\tau)$ выполняются неравенства вида (30), (31) при $\Omega(\xi,\tau) = c\,\omega(\sigma'_\pm, |T-Z|)|T-Z|^{-1}$, где c — некоторая абсолютная постоянная, и $\beta = 1/2$. Поэтому с учетом леммы 2 перепишем сингулярное интегральное уравнение (13) в виде

$$A(\xi,\xi)U_*(\xi) + \frac{iB(\xi,\xi)}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{U_*(\tau)}{\tau-\xi}d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} k_p(\xi,\tau)U_*(\tau)d\tau = \tilde{f}_*(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}. \tag{49}$$

Здесь $\tilde{f}_* \in \mathcal{D}_e(\mathbb{R})$, что следует из условия $\varphi_{\partial D} \in \tilde{\mathcal{H}}_\alpha(\partial D)$ и леммы 4 работы [6]. Заметим, что ввиду того, что обе части уравнения (49) являются четными функциями, уравнения (49) и (13) эквивалентны.

Индекс [9, с. 176] сингулярного интегрального уравнения (49)

$$\kappa := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\arg\frac{\overline{m(\xi,\xi)}}{m(\xi,\xi)} = 0.$$

Это следует из основных свойств индекса [9, с. 101], а в случае $m(\xi,\tau) = M_+\left(\frac{\xi-i}{\xi+i}, \frac{\tau-i}{\tau+i}\right)$ — также из теоремы 4, гл. X, монографии [15]. Следовательно, оператор $(R_h f)(\xi) := \left(\sqrt{\xi^2+1}\right)^{-1}(Rf)(\xi)$ задает единственное решение характеристического уравнения, соответствующего уравнению (49).

Применяя метод Карлемана – Векуа [9, 11] регуляризации уравнения (49) решением соответствующего характеристического уравнения, получаем интегральное уравнение (48), равносильное уравнению (49).

Из лемм 3, 4 и условия (46) с учетом четности функции $(k_p U_0)(\xi)$ следует выполнимость условий Дини вида (5) для модуля непрерывности и локального центрированного относительно бесконечно удаленной точки модуля непрерывности этой функции. При этом указанные условия выполняются равномерно по U_0 из единичного шара пространства $C_e(\mathbb{R})$. Отсюда с учетом леммы 1 и оценки Зигмунда для модуля непрерывности сингулярного интеграла Коши [16, 17] следует компактность оператора Rk_p в пространстве $C_e(\mathbb{R})$, а также вывод о том, что каждое решение уравнения (48) в пространстве $C_e(\mathbb{R})$ принадлежит классу $\mathcal{D}_e(\mathbb{R})$.

Покажем, что уравнение (48) имеет единственное решение в пространстве $C_e(\mathbb{R})$. С этой целью заметим, что однородное уравнение (48) с нулевой правой частью имеет в пространстве $C_e(\mathbb{R})$ только нулевое решение. Действительно, согласно теореме 2 это уравнение равносильно одному из уравнений (9), (10) с нулевой правой частью, которое в силу единственности решения задачи Дирихле для осесимметричного потенциала имеет единственное решение $F(z) \equiv 0$. Очевидно, этому решению уравнения (9) или (10) соответствует единственное решение $U_0(\xi) \equiv 0$ однородного уравнения (48). Следовательно, в соответствии с альтернативой Фредгольма уравнение (48) имеет единственное решение в пространстве $C_e(\mathbb{R})$, и доказательство завершено.

Сформулируем теперь в виде теоремы результат о разрешимости задачи Дирихле для осесимметричного потенциала, являющийся следствием теорем 2, 3.

Теорема 4. *Пусть выполняются условия теоремы* 3. *Тогда решение задачи Дирихле представляется формулой* (8), *в которой голоморфная функция* F *выражается равенством* (17) *в случае внутренней задачи Дирихле или равенством* (18) *в случае внешней задачи Дирихле. При этом функция* U_* *имеет вид* (47), *где* U_0 — *решение уравнения Фредгольма* (48) *в пространстве* $C_e(\mathbb{R})$.

Отметим, что условие (46) выполняется, в частности, в случае, когда граница области D является замкнутой жордановой кривой Ляпунова, что является очевидным следствием теоремы Келлога [15, с. 468]. Условие (46) также выполняется в более общем случае замкнутой гладкой жордановой границы ∂D, у которой угол $\theta(s)$ наклона касательной к положительному направлению оси Ox как функция дуговой координаты s имеет модуль непрерывности $\omega_{\mathbb{R}}(\theta, \varepsilon)$, удовлетворяющий условию

$$\int_0^1 \frac{\omega_{\mathbb{R}}(\theta, \eta)}{\eta} \ln^4 \frac{1}{\eta}\, d\eta < \infty.$$

Это следует из оценки модуля непрерывности производной конформного отображения единичного круга, приведенной в теореме 2 работы [18] (см. также [19]).

***Доказательство теоремы* 1.** Пусть $\varphi(x, y)$ — решение уравнения (1) в области D и $z = x + iy \in D_z^+$. Обозначим через γ_ρ образ окружности $\{Z \in \mathbb{C}: |Z| = \rho < 1\}$ при отображении $\sigma_+(Z)$, а через $D_{z,\rho}^+$ — область, ограниченную кривой γ_ρ. В качестве семейства $\{\Gamma_{z\bar{z}}\}$ выберем гомотопическое семейство дуг всевозможных кривых γ_ρ, $0 < \rho < 1$. Тогда очевидно, что с учетом теоремы Коши равенство (6) при $z \in \gamma_\rho$, $y \neq 0$, приводится к виду

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{F(t)}{\left(\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}\right)^-} dt = \varphi(x, y), \tag{50}$$

где

$$\left(\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}\right)^- := \lim_{\tau \to t,\, \tau \in \mathbb{C} \setminus \overline{D_{z,\rho}^+}} \sqrt{(\tau - z)(\tau - \bar{z})}.$$

Покажем, что существует единственная голоморфная в области D_z^+ функция F, удовлетворяющая условию (7) и уравнению (50) при всех $\rho \in (0;1)$ и всех $z \in \gamma_\rho$ таких, что $y \neq 0$. Действительно, в соответствии с теоремами 2, 3

существует единственная голоморфная в области $D^+_{z,\rho}$ функция F_ρ, удовлетворяющая уравнению (50) (при $F = F_\rho$) и условию вида (7) в области $D^+_{z,\rho}$. Заметим, что при этом также выполняется равенство $F_\rho(x) = \varphi(x, 0)$ при всех $x \in \overline{D^+_{z,\rho}} \cap \mathbb{R}$. С учетом последнего замечания становится очевидным, что функции F_ρ при различных значениях $\rho \in (0;1)$ являются сужением на область $D^+_{z,\rho}$ единственной функции F, голоморфной в области D^+_z.
Теорема доказана.

Автор признателен И. П. Мельниченко за полезные обсуждения результатов работы.

1. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели. – М.: Наука, 1977. – 408 с.
2. *Раджабов Н.* Некоторые краевые задачи для уравнения осесимметрической теории поля // Исследования по краевым задачам теории функций и дифференциальных уравнений. – Душанбе: АН ТаджССР, 1965. – С. 79 – 128.
3. *Михайлов Л. Г., Раджабов Н.* Аналог формулы Пуассона для некоторых уравнений второго порядка с сингулярной линией // Докл. АН ТаджССР. – 1972. – **15**, № 11. – С. 6 – 9.
4. *Раджабов Н.* Построение потенциалов и исследование внутренних и внешних граничных задач типа Дирихле и Неймана для уравнения Эйлера – Пуассона – Дарбу на плоскости // Там же. – 1974. – **17**, № 8. – С. 7 – 11.
5. *Плакса С. А.* Задачи Дирихле для осесимметричных потенциальных полей в круге меридианной плоскости. I // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 4. – С. 491 – 511.
6. *Плакса С. А.* Об интегральных представлениях осесимметричного потенциала и функции тока Стокса в областях меридианной плоскости. I // Там же. – 2001. – **53**, № 5. – С. 631 – 646.
7. *Мельниченко И. П., Плакса С. А.* Потенциальные поля с осевой симметрией и алгебры моногенных функций векторного аргумента. I // Там же. – 1996. – **48**, № 11. – С. 1518 – 1529.
8. *Мельниченко И. П., Плакса С. А.* Потенциальные поля с осевой симметрией и алгебры моногенных функций векторного аргумента. II // Там же. – 1996. – **48**, № 12. – С. 1695 – 1703.
9. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
10. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1987. – 688 с.
11. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 511 с.
12. *Плакса С. А.* О композиции сингулярного и регулярного интегралов на спрямляемой кривой // Совр. вопросы теории приближения и комплексн. анализа.– Киев: Ин-т математики АН УССР, 1990. – С. 104 – 112.
13. *Плакса С. А.* О повторных интегралах на спрямляемой кривой // Комплексный анализ и теория потенциала. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1992. – С. 82 – 100.
14. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. – М.: Физматгиз, 1960. – 540 с.
15. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Гостехиздат, 1952. – 540 с.
16. *Zygmund A.* Sur le module de continuite de la somme de la serie conjuguee de la serie de Fourier // Prace Matematyczno-Fizyczne. – 1924. – **33**. – P. 125 – 132.
17. *Магнарадзе Л. Г.* Об одном обобщении теоремы И. И. Привалова и его применение к некоторым граничным задачам теории функций и к сингулярным интегральным уравнениям // Докл. АН СССР. – 1949. – **68**, № 4. – С. 657 – 660.
18. *Геронимус Я. Л.* О некоторых свойствах функций, непрерывных в замкнутом круге // Там же. – 1954. – **98**, № 6. – С. 889 – 891.
19. *Warschawski S. E.* On differentiability at the boundary in conformal mapping // Proc. Amer. Math. Soc. – 1961. – **12**, № 4. – P. 614 – 620.

Получено 26.12.2000