УДК 517.5

В. И. Рукасов, С. О. Чайченко (Славян. пед. ин-т)

ПРИБЛИЖЕНИЕ $\overline{\psi}$-ИНТЕГРАЛОВ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ СУММАМИ ВАЛЛЕ ПУССЕНА (НЕБОЛЬШАЯ ГЛАДКОСТЬ)

We study the asymptotic behavior exhibited by upper bounds of deviations of linear means of the Fourier classes from the classes C_∞^{ψ}. In particular, we obtain asymptotic equalities that are a solution of the Kolmogorov – Nikol'skii problem for the de la Vallée-Poussin sums in the classes $C_\infty^{\overline{\psi}}$.

Вивчається асимптотична поведінка верхніх меж відхилень лінійних середніх рядів Фур'є від класів C_∞^{ψ}. Зокрема, одержано асимптотичні рівності, які є розв'язком задачі Колмогорова – Нікольського для сум Валле Пуссена на класах $C_\infty^{\overline{\psi}}$.

В работе А. И. Степанца [1] введены новые классы периодических функций следующим образом. Пусть $f(x)$ — непрерывная 2π-периодическая функция, ряд Фурье которой имеет вид

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f, x). \tag{1}$$

Пусть, далее, пара $\overline{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ произвольных фиксированных систем чисел $\psi_1(k)$ и $\psi_2(k)$, $k = 1, 2, \ldots$; $\psi_1(0) = 1$, $\psi_2(0) = 0$, удовлетворяет условию

$$\overline{\psi}^2(k) = \psi_1^2(k) + \psi_2^2(k) \neq 0, \quad k \in N.$$

Если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_1(k)}{\overline{\psi}^2(k)} A_k(f, x) - \frac{\psi_2(k)}{\overline{\psi}^2(k)} \tilde{A}_k(f, x),$$

в котором

$$\tilde{A}_k(f, x) = a_k \sin kx - b_k \cos kx,$$

является рядом Фурье некоторой суммируемой функции $\varphi(\cdot)$, то $\varphi(\cdot)$, следуя А. И. Степанцу, назовем $\overline{\psi}$-производной функции f и будем писать $\varphi(\cdot) = f^{\overline{\psi}}(\cdot)$.

Подмножество функций $f \in C$ (C — пространство непрерывных 2π-периодических функций), у которых существуют $\overline{\psi}$-производные, обозначим через $C^{\overline{\psi}}$. Если $f \in C^{\overline{\psi}}$ и при этом $\operatorname{ess\,sup}\left|f^{\overline{\psi}}(\cdot)\right| \leq 1$, то пишем $f \in C_\infty^{\overline{\psi}}$.

Пусть $\Lambda = \left\|\lambda_k^{(n)}\right\|$, $k, n = 0, 1, 2, \ldots$, $\lambda_0^{(n)} = 1$, $\lambda_k^{(n)} = 0$ при $k \geq n$, — произвольная бесконечная треугольная матрица чисел. Каждой функции $f \in C_\infty^{\overline{\psi}}$ с рядом Фурье (1) с помощью матрицы Λ сопоставим последовательность полиномов

$$U_n(f, x, \Lambda) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k^{(n)}(a_k \cos kx + b_k \sin kx). \tag{2}$$

В частности, если $p \in N$, $p < n$, и

$$\lambda_k^{(n)} = \begin{cases} 1, & 1 \leq k \leq n-p, \\ 1 - (k-n+p)/p, & n-p < k \leq n, \end{cases}$$

то полиномы (2) совпадают с суммами Валле Пуссена $V_{n,\,p}(f, x)$ [2].

В дальнейшем будем считать, что системы чисел $\psi_1(k)$, $\psi_2(k)$, $k = 1, 2, \ldots$, являются сужениями на множестве натуральных чисел некоторых функций $\psi_1(k)$, $\psi_2(k)$ непрерывного аргумента, а матрицы Λ определяются последовательностью функций $\lambda_i(x) = \lambda_i^{(n)}(x)$, $0 \leq x < \infty$, $i = 1, 2$, таких, что $\lambda_i^{(n)}(k/n) = \lambda_k^{(n)}$.

Пусть, далее,

$$\tau_i^{(n)}(x) = \tau_i(x) = \begin{cases} \left(1 - \lambda_i^{(n)}(x)\psi_i(nx)\right), & 0 \leq x \leq 1, \\ \psi_i(nx), & 1 < x;\ i = 1, 2. \end{cases} \tag{3}$$

Если функции $\tau_1(x)$ и $\tau_2(x)$ непрерывны при всех $x \geq 0$ и их преобразования Фурье

$$\hat{\tau}_{1+}(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \tau_1(x)\cos tx\,dx, \qquad \hat{\tau}_{2-}(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \tau_2(x)\sin tx\,dx$$

суммируемы на всей числовой оси, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\hat{\tau}_{1+}(t)\right| dt < \infty, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \left|\hat{\tau}_{2-}(t)\right| dt < \infty,$$

то, как показано в [1], для каждой функции $f \in C_\infty^{\overline{\psi}}$ в каждой точке $x \in R^1$ справедливо равенство

$$f(x) - U_n(f, x, \Lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f^{\overline{\psi}}\left(x - \frac{t}{n}\right)\hat{\tau}_n(t)\,dt, \tag{4}$$

где $\hat{\tau}_n(t) = \hat{\tau}_{1+}(t) + \hat{\tau}_{2-}(t)$ и интеграл понимается в смысле главного значения.

Следуя А. И. Степанцу [3], через $\mathfrak{M}$ обозначим множество непрерывных неотрицательных невозрастающих при $x \geq 0$ функций $\psi(x)$, выпуклых вниз и имеющих ограниченную одностороннюю производную при $x \geq 1$, а также удовлетворяющих условию $\lim_{x \to \infty} \psi(x) = 0$. Через $\mathfrak{M}'$ обозначим множество функций $\psi \in \mathfrak{M}$, для которых

$$\int_1^\infty \frac{\psi(t)}{t}\,dt < \infty. \tag{5}$$

Пусть $\psi \in \mathfrak{M}$ и $\eta(t) = \eta(\psi, t)$ — функция, связанная с $\psi(t)$ равенством

$$\psi(\eta(t)) = \frac{\psi(t)}{2}, \quad t \geq 1.$$

Положим

$$\mu(t) = \mu(\psi, t) = \frac{t}{\eta(t) - t}, \quad t \geq 1.$$

К множеству $\mathfrak{M}_0$ отнесем все функции $\psi \in \mathfrak{M}$, для которых величина $\mu(\psi, t)$ ограничена сверху и неограничена снизу никаким положительным числом, к множеству $\mathfrak{M}_C$ — функции $\psi \in \mathfrak{M}$, для которых существуют положительные числа $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ (вообще говоря, зависящие от $\psi_1(v)$) такие, что $0 < \mathcal{K}_1 < \mu(t) < \mathcal{K}_2 < \infty$, а к множеству $\mathfrak{M}_\infty$ — все функции $\psi \in \mathfrak{M}$, для которых $\mu(t)$ при $t \to \infty$ монотонно возрастает и неограничена сверху. Положим $\mathfrak{M}'_0 = \mathfrak{M}_0 \cap \mathfrak{M}'$.

В настоящей работе изучается при $n \to \infty$ асимптотическое поведение величины

$$\mathcal{E}\left(C_{\infty}^{\overline{\psi}}; U_n\right) = \sup_{f \in C_{\infty}^{\overline{\psi}}} \| f(x) - U_n(f, x, \Lambda) \|_C. \tag{6}$$

При определенных ограничениях на функции $\psi_i(x)$, $\lambda_i(x)$, $\tau_i(x)$, $i = 1, 2$, для величины (6) при $n \to \infty$ найдены асимптотические формулы. В качестве примера применения полученных результатов к конкретным методам суммирования из них выводятся асимптотические равенства, которые в ряде важных случаев дают решение задачи Колмогорова – Никольского [3] для сумм Валле Пуссена на классах $C_{\infty}^{\overline{\psi}}$.

При $\psi_1(n) = \psi(n)\cos(\beta\pi/2)$, $\psi_2(n) = \psi(n)\sin(\beta\pi/2)$, $\beta \in R^1$, $\psi(n) = 1/n^r$, $r > 0$, такие результаты получены С. А. Теляковским [4, 5], для классов $C_{\beta,\infty}^{\psi}$ — А. И. Степанцом [6] и В. И. Рукасовым [7].

Поведение величины (6) впервые изучено в работах [1, 8, 9] в случае, когда $U_n(f; x; \Lambda) \equiv S_{n-1}(f; x)$, где $S_{n-1}(f; x)$ — частные суммы порядка $n-1$ ряда Фурье функции $f(x)$.

Поведение этой величины в случае, когда $U_n(f; x; \Lambda) \equiv V_{n,p}(f; x)$, причем $\lim(p/n)$ существует и равен Θ, $0 < \Theta < 1$, и $\psi_i \in \mathfrak{M}_C$, $i = 1, 2$, рассмотрено в [10], а в случае $0 \le \Theta < 1$ $\psi_i \in \mathfrak{M}_C \cup \mathfrak{M}_{\infty}$, $i = 1, 2$, — в работе [11].

В данной статье мы изучаем поведение величины (6) в случае, когда $U_n(f; x; \Lambda) \equiv V_{n,p}(f; x)$, причем $0 \le \Theta < 1$, $\psi_i \in \mathfrak{M}'_0$, $i = 1, 2$.

Вспомогательные утверждения. Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть функции* $\tau_i(x)$, $i = 1, 2$, *заданы и абсолютно непрерывны на отрезке* $[0, 1]$, *удовлетворяют следующим условиям:* $\tau_i(0) = \tau_i(1) = 0$, $i = 1, 2$, *а производные* $\tau'_i(x)$, $i = 1, 2$, *в тех точках отрезка* $[0, 1]$, *где они не существуют, можно доопределить так, чтобы интегралы* $\int_0^1 x(1-x)|d\tau'_i(x)|$, $i = 1, 2$, *сходились. Пусть, далее,*

$$I \overset{\mathrm{df}}{=} \int_{-N}^{N} \left| \int_0^1 (\tau_1(x)\cos tx + \tau_2(x)\sin tx)\, dx \right| dt.$$

Тогда при всех $N \ge 1$ *выполняется оценка*

$$\left| \frac{1}{\pi} I - \frac{4}{\pi^2} \int_{1/N}^{1} \xi\left(\tau_2(x), \sqrt{\tau_1^2(1-x) + \tau_2^2(1-x)}\right) \frac{dx}{x} \right| \le$$

$$\le K \left(\int_0^1 x(1-x)|d\tau'_1(x)| + \int_0^1 x(1-x)|d\tau'_2(x)| \right), \tag{7}$$

где функция $\xi(x, y)$ *определяется следующим образом* [5]:

$$\xi(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}|x|, & |x| \ge |y|, \\ |x|\arcsin\left|\dfrac{x}{y}\right| + \sqrt{y^2 - x^2}, & |x| < |y|, \end{cases} \tag{8}$$

а K — *абсолютная постоянная.*

Отметим, что при $\tau_1(x) = \tau(x)\cos(\beta\pi/2)$, $\tau_2(x) = \tau(x)\sin(\beta\pi/2)$, $\beta \in R^1$, утверждение леммы 1 совпадает с результатом леммы 4 из [5].

Доказательство. Введем обозначения:

$$E = [-N, -1] \cup [1, N], \qquad I_i = \int_0^1 x(1-x)|d\tau_i'(x)|, \qquad i = 1, 2.$$

Следуя [4], полагаем

$$\tau_{i,0}(x) = \begin{cases} \tau_i(x), & 0 \le x < 1/3, \\ 2\tau_i(1/3) - 3\tau_i(1/3)x, & 1/3 \le x < 2/3, \\ 0, & 2/3 \le x < 1, \qquad i = 1, 2, \end{cases} \tag{9}$$

и

$$\tau_{i,1}(x) = \tau_i(1-x) - \tau_{i,0}(1-x), \qquad i = 1, 2. \tag{10}$$

Тогда, используя свойства функций $\tau_i(x)$, $\tau_{i,0}(x)$, $\tau_{i,1}(x)$, $i = 1, 2$, и рассуждения, с помощью которых доказано соотношение (2.14) из работы [4], получаем

$$\left| I - \int_E \left| \int_0^1 T(x,t) \sin tx \, dx \right| dt \right| \le K(I_1 + I_2), \tag{11}$$

где

$$T(x,t) = \tau_{2,0}(x) + \tau_{1,1}(x)\sin t - \tau_{2,1}(x)\cos t.$$

Определим функцию $\gamma(x)$ с помощью равенств [4]

$$\gamma(x) = \begin{cases} x, & |x| \le 1, \\ \operatorname{sign} x, & |x| > 1. \end{cases}$$

Рассуждая так же, как при получении соотношения (2.7) из [4], находим

$$\left| I - \int_E \left| \int_0^1 \frac{\gamma(tx)}{t^2} d_x T_x'(x,t) \right| dt \right| \le K(I_1 + I_2). \tag{12}$$

Пусть N' — наименьшее целое число, для которого $N \le 2\pi(N' + 1)$. Используя определение функции $\gamma(x)$ и свойства интеграла, выводим

$$\left| \int_1^N \left| \int_0^1 \frac{\gamma(tx)}{t^2} d_x T_x'(x,t) \right| dt - \sum_{k=1}^{N'} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \left| \int_0^1 \frac{\gamma(tx)}{t^2} d_x T_x'(x,t) \right| dt \right| \le K(I_1 + I_2). \tag{13}$$

В каждом из отрезков $[2k\pi, 2(k+1)\pi]$, $k = 1, 2, \ldots, N'$, выберем по точке c_k таким образом [5], чтобы выполнялось равенство

$$\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \xi\left(\frac{\tau_{2,0}(1/t)}{t}, \frac{\sqrt{\tau_{1,1}^2(1/t) + \tau_{2,1}^2(1/t)}}{t} \right) dt =$$

$$= \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \xi\left(\frac{\tau_{2,0}(1/c_k)}{c_k}, \frac{\sqrt{\tau_{1,1}^2(1/c_k) + \tau_{2,1}^2(1/c_k)}}{c_k} \right) dt. \tag{14}$$

Это всегда возможно сделать в силу непрерывности функции $\xi(x, y)$ и теоремы о среднем для определенного интеграла.

Используя рассуждения, аналогичные тем, с помощью которых доказано соотношение (2.23) из работы [4], находим

$$\left| \int_1^N \left| \int_0^1 \frac{\gamma(tx)}{t^2} d_x T_x'(x,t) \right| dt - \sum_{k=1}^{N'} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \left| \frac{T(1/c_k, t)}{c_k} \right| dt \right| \le K(I_1 + I_2). \tag{15}$$

Согласно лемме 3 из [5] имеем

$$\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \left| \frac{T(1/c_k, t)}{c_k} \right| dt = \frac{2}{\pi} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \xi\left(\frac{\tau_{2,0}(1/c_k)}{c_k}, \frac{\sqrt{\tau_{1,1}^2(1/c_k) + \tau_{2,1}^2(1/c_k)}}{c_k} \right) dt. \tag{16}$$

Учитывая равенства (14) и (16), из соотношения (15) получаем

$$\left| \int_1^N \left| \int_0^1 \frac{\gamma(tx)}{t^2} d_x T_x'(x,t) \right| dt - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{N'} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \xi\left(\frac{\tau_{2,0}(1/t)}{t}, \frac{\sqrt{\tau_{1,1}^2(1/t) + \tau_{2,1}^2(1/t)}}{t} \right) dt \right| \le$$
$$\le K(I_1 + I_2). \tag{17}$$

Принимая во внимание также соотношение (13) и равенство

$$\int_E \xi\left(\frac{\tau_{2,0}(1/t)}{t}, \frac{\sqrt{\tau_{1,1}^2(1/t) + \tau_{2,1}^2(1/t)}}{t} \right) dt = 2 \int_{1/N}^1 \xi\left(\tau_{2,0}(x), \sqrt{\tau_{1,1}^2(x) + \tau_{2,1}^2(x)} \right) \frac{dx}{x},$$

из соотношения (17) находим

$$\left| \int_1^N \left| \int_0^1 \frac{\gamma(tx)}{t^2} d_x T_x'(x,t) \right| dt - \frac{2}{\pi} \int_{1/N}^1 \xi\left(\tau_{2,0}(x), \sqrt{\tau_{1,1}^2(x) + \tau_{2,1}^2(x)} \right) \frac{dx}{x} \right| \le K(I_1 + I_2). \tag{18}$$

Из равенств (9) и (10) следует

$$\tau_{2,0}(x) = \tau_2(x), \qquad \tau_{1,1}(x) = \tau_1(1-x),$$
$$\tau_{2,1}(x) = \tau_2(1-x), \qquad x \in \left[0, \frac{1}{3}\right]. \tag{19}$$

Учитывая свойства функции $\xi(x, y)$ и лемму 1 из работы [4], имеем

$$\int_{1/3}^1 \xi\left(\tau_{2,0}(x), \sqrt{\tau_{1,1}^2(x) + \tau_{2,1}^2(x)} \right) \frac{dx}{x} \le K(I_1 + I_2) \tag{20}$$

и

$$\int_{1/3}^1 \xi\left(\tau_2(x), \sqrt{\tau_1^2(1-x) + \tau_2^2(1-x)} \right) \frac{dx}{x} \le K(I_1 + I_2). \tag{21}$$

Объединяя соотношения (12), (18) и аналогичное соотношение для $t \in [-N, -1]$, получаем

$$\left| \frac{1}{\pi} I - \frac{4}{\pi^2} \int_{1/N}^1 \xi\left(\tau_{2,0}(x), \sqrt{\tau_{1,1}^2(x) + \tau_{2,1}^2(x)} \right) \frac{dx}{x} \right| \le K(I_1 + I_2). \tag{22}$$

Утверждение леммы следует из формулы (22) с учетом равенств (19) и оценок (20), (21). Лемма 1 доказана.

Асимптотические формулы для верхних граней уклонений линейных средних рядов Фурье. В принятых обозначениях справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $\psi_i \in \mathfrak{M}'_0$, $i = 1, 2$; *функции* $\tau_i(x)$, $i = 1, 2$, *определены с помощью соотношений* (3), *причем* $\tau_i(x) \equiv 0$, $x \in [0, 1 - m/n]$ *и число* $m = m(n)$ *определяется таким образом*: $m < n$, $\lim_{n\to\infty}(m/n) = \Theta$, $0 < \Theta < 1$, *являются абсолютно непрерывными на отрезке* $[0, 1]$ *и выполнены следующие условия*:

$$\int\limits_0^1 \frac{|\tau_i(x)|}{x}dx < \infty, \qquad \int\limits_0^1 \frac{|\lambda_i(x)|}{1-x}dx < \infty, \qquad i = 1, 2,$$

функции $\tau'_i(x)$, $i = 1, 2$, *в точках, где они не существуют, можно доопределить таким образом, чтобы интегралы* $\int_0^1 x(1-x)|d\tau'_i(x)|$, $i = 1, 2$, *сходились.*

Тогда при $n \to \infty$ *имеют место асимптотические равенства*

$$\mathcal{E}\left(C_\infty^{\overline{\psi}}; U_n\right) = \frac{4}{\pi^2}\int\limits_0^1 \xi\left(\tau_2(x), \sqrt{[\psi_1(n)\lambda_1(1-x)]^2 + [\psi_2(n)\lambda_2(1-x)]^2}\right)\frac{dx}{x} +$$

$$+ O\left(\int\limits_n^\infty \frac{\psi_2(t)}{t}dt + \int\limits_0^{2/n\pi} \xi\left(\tau_2(x), \sqrt{[\psi_1(n)\lambda_1(1-x)]^2 + [\psi_2(n)\lambda_2(1-x)]^2}\right)\frac{dx}{x} + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^1 x(1-x)|d\tau'_1(x)| + \int\limits_0^1 x(1-x)|d\tau'_2(x)| + \overline{\psi}(n)\right) \tag{23}$$

и

$$\mathcal{E}\left(C_\infty^{\overline{\psi}}; U_n\right) = \frac{2}{\pi}\int\limits_n^\infty \frac{\psi_2(t)}{t}dt + O\left(\int\limits_0^1 x(1-x)|d\tau'_1(x)| + \int\limits_0^1 x(1-x)|d\tau'_2(x)| + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^1 \xi\left(\tau_2(x), \sqrt{[\psi_1(n)\lambda_1(1-x)]^2 + [\psi_2(n)\lambda_2(1-x)]^2}\right)\frac{dx}{x} + \overline{\psi}(n)\right). \tag{24}$$

Следует отметить, что при $\psi_1(x) = \psi(x)\cos(\beta\pi/2)$, $\psi_2(x) = \psi(x)\sin(\beta\pi/2)$, $\beta \in R^1$, и $\lambda_1(x) = \lambda_2(x)$, $x \in [0, 1]$, первое утверждение теоремы 1 совпадает с результатом теоремы 1 из [7], а формула (24) здесь, по-видимому, приводится впервые.

Доказательство. Положим

$$\nu_i^{(m,n)}(x) = \nu_i(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1 - m/n, \\ (n(x-1)/m + 1)\psi_i(n), & 1 - m/n \le x < 1, \\ \psi_i(nx), & 1 < x, \qquad\qquad i = 1, 2. \end{cases}$$

Используя рассуждения, проведенные при доказательстве леммы 3 из работы [7], при каждом $n = 1, 2, \ldots$ получаем

$$A_n(\tau_1, \tau_2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\int\limits_0^\infty (\tau_1(x)\cos tx + \tau_2(x)\sin tx)dx\right|dt < \infty. \tag{25}$$

Изучим теперь интеграл

$$A_n(\nu_1,\nu_2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\int\limits_0^{\infty}(\nu_1(x)\cos tx + \nu_2(x)\sin tx)\,dx\right|dt. \tag{26}$$

Пусть

$$P_n(x) = \begin{cases}\psi_1'(n)(nx-n)+\psi_1(n), & 0\le x<1,\\ \psi_1(nx), & 1\le x.\end{cases}$$

Очевидно,

$$A_n(\nu_1,\nu_2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\int\limits_0^{\infty}(\nu_1(x)\cos tx + \nu_2(x)\sin tx)\,dx\right|dt =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\int\limits_0^{\infty}\nu_2(x)\sin tx\,dx\right|dt + O\left(\int\limits_0^{\infty}\left|\int\limits_0^{\infty}P_n(x)\cos tx\,dx\right|dt +\right.$$

$$\left.+\int\limits_0^{\infty}\left|\int\limits_0^{\infty}(P_n(x)-\nu_1(x)\cos tx)\,dx\right|dt\right) = I_3 + O(I_4+I_5). \tag{27}$$

Функция $P_n(x)$ непрерывна при всех $x\in[0;\infty)$, монотонно не возрастает, $\lim_{x\to\infty}P_n(x) = 0$ и ее производная существует почти для всех $x\in[0;\infty)$. Поэтому

$$I_4 = \int\limits_0^{\infty}\left|\int\limits_0^{\infty}P_n(x)\cos tx\,dx\right|dt = \int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty}(-P_n'(x))\frac{\sin tx}{t}\,dx\,dt. \tag{28}$$

Учитывая равномерную сходимость интеграла, стоящего в правой части равенства (28), и изменяя на этом основании порядок интегрирования, находим

$$|I_4| = \left|\int\limits_0^{\infty}\left|\int\limits_0^{\infty}P_n(x)\cos tx\,dx\right|dt\right| \le K(\psi_1(n)+n|\psi_1'(n)|). \tag{29}$$

Далее имеем

$$I_5 = \int\limits_0^{\infty}\left|\int\limits_0^{\infty}(P_n(x)-\nu_1(x)\cos tx)\,dx\right|dt \le K(\psi_1(n)+n|\psi_1'(n)|). \tag{30}$$

Оценим теперь интеграл I_3 в соотношении (27). Пусть $a>0$. Тогда имеем

$$I_3 = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\int\limits_0^{\infty}\nu_2(x)\sin tx\,dx\right|dt = \int\limits_{-a}^{a}\left|\int\limits_1^{\infty}\psi_2(nx)\sin tx\,dx\right|dt +$$

$$+ O\left(\int\limits_{-a}^{a}\left|\int\limits_{1-m/n}^{1}\left(\frac{m}{n}(x-1)+1\right)\psi_2(n)\sin tx\,dx\right|dt +\right.$$

$$\left.+\int\limits_{|t|\ge a}\left|\int\limits_{1-m/n}^{1}\left(\frac{m}{n}(x-1)+1\right)\psi_2(n)\sin tx\,dx + \int\limits_1^{\infty}\psi_2(nx)\sin tx\,dx\right|dt\right) =$$

$$= \int\limits_{-a}^{a}\left|\int\limits_1^{\infty}\psi_2(nx)\sin tx\,dx\right|dt + O(I_6+I_7). \tag{31}$$

Понятно, что

$$I_6 = \int_{-a}^{a} \left| \int_{1-m/n}^{1} \left(\frac{m}{n}(x-1)+1\right)\psi_2(n)\sin tx\,dx \right| dt \le 2a\psi_2(n). \tag{32}$$

Интегрируя по частям, проводя элементарные преобразования и учитывая соотношение (П. 4. 22) из работы [3], получаем

$$I_7 = \int_{|t|\ge a} \left| \int_{1-m/n}^{1} \left(\frac{m}{n}(x-1)+1\right)\psi_2(n)\sin tx\,dx + \int_{1}^{\infty} \psi_2(nx)\sin tx\,dx \right| dt \le$$

$$\le \frac{K}{a}(\psi_2(n) + n|\psi_2'(n)|). \tag{33}$$

Выбирая число $a > 0$ с учетом леммы 8 из работы [8], используя рассуждения, с помощью которых доказано соотношение (102) в [9], и учитывая соотношения (31) – (33), находим

$$I_3 = \frac{2}{\pi}\int_{n}^{\infty} \frac{\psi_2(t)}{t}dt + O(\psi_2(n) + n|\psi_2'(n)|). \tag{34}$$

По условию теоремы $\psi_i \in \mathfrak{M}'_0$, $i = 1, 2$. Поэтому, сопоставляя соотношения (27), (29), (30) и (34), получаем

$$A_n(\nu_1, \nu_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{0}^{\infty} (\nu_1(x)\cos tx + \nu_2(x)\sin tx)\,dx \right| dt = \frac{2}{\pi}\int_{n}^{\infty} \frac{\psi_2(t)}{t}dt + O(\overline{\psi}(n)). \tag{35}$$

В работе [10] показано, что если интегралы $A_n(\tau_1, \tau_2)$ сходятся при каждом $n = 1, 2, \ldots$, то

$$\mathcal{E}\left(C_\infty^{\overline{\psi}}; U_n\right) = A_n(\tau_1, \tau_2) + O(a_n(\tau_1, \tau_2)), \quad n \to \infty, \tag{36}$$

где

$$a_n(\tau_1, \tau_2) \overset{\text{df}}{=} \int_{|t|\ge n\pi/2} \left| \int_{0}^{\infty} (\tau_1(x)\cos tx + \tau_2(x)\sin tx)\,dx \right| dt.$$

Из соотношения (25) следует, что для каждой функции $f \in C_\infty^{\overline{\psi}}$, $\psi_i \in \mathfrak{M}'_0$, $i = 1, 2$, в каждой точке $\beta \in R^1$ справедливо представление (4).

Учитывая соотношение (35), находим

$$\mathcal{E}\left(C_\infty^{\overline{\psi}}; U_n\right) = \frac{1}{\pi}\sup_{f\in C_\infty^{\overline{\psi}}} \left\| \int_{-\infty}^{\infty} f^{\overline{\psi}}(x-t) \int_{0}^{\infty} (\tau_1(x)\cos tx + \tau_2(x)\sin tx)\,dx\,dt \right\|_C =$$

$$= \frac{1}{\pi}\sup_{f\in C_\infty^{\overline{\psi}}} \left\| \int_{-\infty}^{\infty} f^{\overline{\psi}}(x-t) \int_{0}^{\infty} (\mu_1(x)\cos tx + \mu_2(x)\sin tx)\,dx\,dt \right\|_C +$$

$$+ O\left(\int_{n}^{\infty} \frac{\psi_2(t)}{t}dt + \overline{\psi}(n) \right). \tag{37}$$

Поскольку функции $\mu_i(x) \overset{\text{df}}{=} \tau_i(x) - \nu_i(x)$, $i = 1, 2$, абсолютно непрерывны и интегралы $A_n(\mu_1, \mu_2)$ сходятся, из равенства (36) следует, что при $n \to \infty$

$$\mathcal{E}\left(C_{\infty}^{\overline{\psi}}; U_n\right) = A_n(\mu_1, \mu_2) + O\left(a_n(\mu_1, \mu_2) + \int_n^{\infty} \frac{\psi_2(t)}{t} dt + \overline{\psi}(n) \right). \tag{38}$$

Для оценки величин $A_n(\mu_1, \mu_2)$ и $a_n(\mu_1, \mu_2)$ будем пользоваться леммой 1 (очевидно, что $\mu_i(x)$, $i = 1, 2$, удовлетворяют всем условиям указанной леммы). Применяя лемму 1 при $N \to \infty$, получаем

$$A_n(\mu_1, \mu_2) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^1 \xi\left(\mu_2(x), \sqrt{\mu_1^2(1-x) + \mu_2^2(1-x)}\right) \frac{dx}{x} +$$
$$+ O\left(\int_0^1 x(1-x) |d\mu_1'(x)| + \int_0^1 x(1-x) |d\mu_2'(x)| \right). \tag{39}$$

Ясно, что

$$\int_0^1 x(1-x)|d\mu_i'(x)| = \int_0^1 x(1-x)|d\tau_i'(x)|, \quad i = 1, 2. \tag{40}$$

Учитывая свойства функции $\xi(x, y)$ [5] и условия теоремы, после элементарных преобразований получаем

$$\int_0^1 \xi\left(\mu_2(x), \sqrt{\mu_1^2(1-x) + \mu_2^2(1-x)}\right) \frac{dx}{x} =$$
$$= \int_0^1 \xi\left(\tau_2(x), \sqrt{[\psi_1(n)\lambda_1(1-x)]^2 + [\psi_2(n)\lambda_2(1-x)]^2}\right) \frac{dx}{x} +$$
$$+ O\left(\int_0^1 x(1-x)|d\tau_1'(x)| + \int_0^1 x(1-x)|d\tau_2'(x)| + \right.$$
$$\left. + \sum_{i=1}^{2} \left(1 + \max_{x \in [0,1]} |\lambda_i(x)|\right) \int_{1-m/n}^{1} \frac{\psi_i(nx) - \psi_i(n)}{1-x} dx + \overline{\psi}(n) \right). \tag{41}$$

Рассуждая так же, как и при доказательстве леммы 5.5 из [3], и учитывая определение числа $m = m(n)$, находим

$$\int_{1-m/n}^{1} \frac{\psi_i(nx) - \psi_i(n)}{1-x} dx \le K\psi_i(n), \quad i = 1, 2. \tag{42}$$

Объединяя соотношения (39) – (42), получаем

$$A_n(\mu_1, \mu_2) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^1 \xi\left(\tau_2(x), \sqrt{[\psi_1(n)\lambda_1(1-x)]^2 + [\psi_2(n)\lambda_2(1-x)]^2}\right) \frac{dx}{x} +$$
$$+ O\left(\int_0^1 x(1-x)|d\tau_1'(x)| + \int_0^1 x(1-x)|d\tau_2'(x)| + \overline{\psi}(n) \right). \tag{43}$$

Оценим теперь величину $a_n(\mu_1, \mu_2)$. Имеем

$$a_n(\mu_1, \mu_2) = \frac{1}{\pi} \int_{|t| \ge n\pi/2} \left| \int_0^1 (\mu_1(x)\cos tx + \mu_2(x)\sin tx)\, dx \right| dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\int\limits_0^1 (\mu_1(x)\cos tx + \mu_2(x)\sin tx)\,dx\right|dt -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-n\pi/2}^{n\pi/2}\left|\int\limits_0^1 (\mu_1(x)\cos tx + \mu_2(x)\sin tx)\,dx\right|dt \stackrel{\mathrm{df}}{=} A_n(\mu_1,\mu_2) - \tilde{A}_n(\mu_1,\mu_2). \quad (44)$$

Для оценки величины $\tilde{A}_n(\mu_1,\mu_2)$ применим лемму 1, считая $N = n\pi/2$. Тогда

$$\tilde{A}_n(\mu_1,\mu_2) = \frac{4}{\pi^2}\int\limits_{2/n\pi}^{1}\xi\left(\mu_2(x), \sqrt{\mu_1^2(1-x)+\mu_2^2(1-x)}\right)\frac{dx}{x} +$$

$$+ O\left(\int\limits_0^1 x(1-x)|d\mu_1'(x)| + \int\limits_0^1 x(1-x)|d\mu_2'(x)|\right).$$

Рассуждая так же, как при доказательстве соотношения (43), и учитывая равенство (44), получаем

$$a_n(\mu_1,\mu_2) = \frac{4}{\pi^2}\int\limits_0^{2/n\pi}\xi\left(\tau_2(x), \sqrt{[\psi_1(n)\lambda_1(1-x)]^2+[\psi_2(n)\lambda_2(1-x)]^2}\right)\frac{dx}{x} +$$

$$+ O\left(\int\limits_0^1 x(1-x)|d\tau_1'(x)| + \int\limits_0^1 x(1-x)|d\tau_2'(x)| + \overline{\psi}(n)\right). \quad (45)$$

Первое утверждение теоремы следует из сопоставления формул (38), (43) и (45).

Для доказательства равенства (24) заметим, что

$$\mathcal{E}\left(C_\infty^{\overline{\psi}}; U_n\right) = \frac{1}{\pi}\sup_{f\in C_\infty^{\overline{\psi}}}\left\|\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{\overline{\psi}}(x-t)\int\limits_0^{\infty}(\tau_1(x)\cos tx + \tau_2(x)\sin tx)\,dx\,dt\right\|_C =$$

$$= \frac{1}{\pi}\sup_{f\in C_\infty^{\overline{\psi}}}\left\|\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{\overline{\psi}}(x-t)\int\limits_0^{\infty}(\nu_1(x)\cos tx + \nu_2(x)\sin tx)\,dx\,dt\right\|_C +$$

$$+ O(A_n(\mu_1,\mu_2)). \quad (46)$$

На основании соотношения (36) из равенства (46) получаем

$$\mathcal{E}\left(C_\infty^{\overline{\psi}}; U_n\right) = A_n(\nu_1,\nu_2) + O(a_n(\nu_1,\nu_2) + A_n(\mu_1,\mu_2)), \quad n\to\infty. \quad (47)$$

Полагая в (33) $a = n\pi/2$, находим

$$a_n = \int\limits_{|t|\ge n\pi/2}\left|\int\limits_{1-m/n}^{1}\left(\frac{m}{n}(x-1)+1\right)\psi_2(n)\sin tx\,dx + \int\limits_1^{\infty}\psi_2(nx)\sin tx\,dx\right|dt \le$$

$$\le \frac{K}{n}(\psi_2(n) + n|\psi_2'(n)|). \quad (48)$$

Сопоставляя соотношения (35), (43), (47) и (48), получаем второе утверждение теоремы. Теорема 1 доказана.

Приближение суммами Валле Пуссена. Суммирующие функции $\lambda_i(x)$, $i = 1, 2$, для сумм $V_{n,p}(f;x)$ определим равенствами

$$\lambda_i(x) = \lambda(p, x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1 - p/n, \\ \dfrac{n}{p}(1-x), & 1 - p/n \le x \le 1, \\ 0, & 1 \le x < \infty, \qquad i = 1, 2. \end{cases} \tag{49}$$

Функции $\tau_i(x)$, $i = 1, 2$, для сумм Валле Пуссена согласно равенствам (3) и (49) имеют вид

$$\tau_i(x) = \tau_i(p, x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le 1 - p/n, \\ \dfrac{x - (1 - p/n)}{p/n}\psi_i(nx), & 1 - p/n \le x \le 1, \\ \psi_i(nx), & 1 \le x < \infty, \qquad i = 1, 2. \end{cases} \tag{50}$$

Изучим поведение величин $\mathcal{E}\left(C_\infty^{\overline{\psi}}; V_{n,p}\right)$ при $n \to \infty$.

Теорема 2. *Пусть* $\lim_{n\to\infty}(p/n) = \Theta$, $0 \le \Theta < 1$, *и* $\psi_i \in \mathfrak{M}'_0$, $i = 1, 2$. *Тогда при* $n \to \infty$ *выполняется асимптотическое равенство*

$$\mathcal{E}\left(C_\infty^{\overline{\psi}}; V_{n,p}\right) = \frac{4}{\pi^2}\overline{\psi}(n)\ln\frac{n}{p} + O\left(\int_n^\infty \frac{\psi_2(t)}{t}dt + \overline{\psi}(n)\right). \tag{51}$$

Равенство (51) является решением задачи Колмогорова – Никольского для сумм $V_{n,p}(f, x)$ на классах $C_\infty^{\overline{\psi}}$, если

$$\int_n^\infty \frac{\psi_2(t)}{t}dt = o\left(\overline{\psi}(n)\ln\frac{n}{p}\right), \qquad n \to \infty, \tag{52}$$

и $\Theta = 0$.

Условие (52) выполнено, например, для функций $\psi_1^*(n) = 1/\ln^\alpha n$, $\psi_2^*(n) = 1/\ln^\beta n$, $\alpha > \beta > 1$. Заметим при этом, что $\psi_i^*(n) \in \mathfrak{M}'_0 \setminus \mathfrak{M}_C$, $i = 1, 2$.

Если же $\psi_2(n) \in \mathfrak{M}_C$, то

$$\int_n^\infty \frac{\psi_2(t)}{t}dt = O(\psi_2(n)), \qquad n \to \infty,$$

и формула (51) принимает вид

$$\mathcal{E}\left(C_\infty^{\overline{\psi}}; V_{n,p}\right) = \frac{4}{\pi^2}\overline{\psi}(n)\ln\frac{n}{p} + O(\overline{\psi}(n)). \tag{53}$$

Тогда равенство (53) является решением задачи Колмогорова – Никольского для сумм Валле Пуссена на классах $C_\infty^{\overline{\psi}}$ для любой функции $\psi_1 \in \mathfrak{M}'_0$ и $\Theta = 0$.

Доказательство. На основании соотношений (49) получаем

$$\int_0^1 \frac{|\lambda(p, x)|}{1-x}dx = \int_0^{1-p/n} \frac{dx}{1-x}dx + \int_{1-p/n}^1 \frac{n(1-x)/p}{1-x}dx = \ln\frac{n}{p} + 1. \tag{54}$$

Пусть $p \in [1, m] \cap N$. Учитывая равенства (50) и то, что функции $\psi_i \in \mathfrak{M}'_0$, $i = 1, 2$, находим

$$\int_0^1 \frac{|\tau_i(p,x)|}{x}dx = \int_{1-p/n}^{1} \frac{\left(\dfrac{x-(1-p/n)}{p/n}\right)\psi_i(nx)}{x}dx \le K\psi_i(n), \qquad i = 1, 2, \qquad (55)$$

и

$$\int_0^1 x(1-x)|d\tau_i'(p,x)| \le K\psi_i(n), \qquad i = 1, 2. \qquad (56)$$

На основании соотношений (54) – (56), а также условий $\psi_i \in \mathfrak{M}_0'$, $i = 1, 2$, заключаем, что для функций $\psi_i(x)$, $\lambda(p,x)$ и $\tau_i(p,x)$, $i = 1, 2$, выполнены все условия теоремы 1. В силу того, что для каждого $x \in [0, 1]$

$$\tau_2(x) \le \sqrt{[\psi_1(n)\lambda_1(1-x)]^2 + [\psi_2(n)\lambda_2(1-x)]^2} = \overline{\psi}(n)\lambda(p, 1-x),$$

получаем

$$\int_0^1 \xi\left(\tau_2(x), \sqrt{[\psi_1(n)\lambda_1(1-x)]^2 + [\psi_2(n)\lambda_2(1-x)]^2}\right)\frac{dx}{x} =$$

$$= \int_0^1 \xi(\tau_2(x), \overline{\psi}(n)\lambda(p,1-x))\frac{dx}{x} = \overline{\psi}(n)\int_0^1 \frac{|\lambda(p,1-x)|}{x}\sqrt{1-\frac{\tau_2^2(p,x)}{\overline{\psi}^2(n)\lambda^2(p,1-x)}}dx \; +$$

$$+ \int_0^1 \frac{|\tau_2(p,x)|}{x}\arcsin\left(\frac{\tau_2(p,x)}{\overline{\psi}(n)\lambda(p,1-x)}\right)dx. \qquad (57)$$

Учитывая представление

$$\sqrt{1-\frac{\tau_2^2(p,x)}{\overline{\psi}^2(n)\lambda^2(p,1-x)}} = 1 + O(1)\left(\frac{\tau_2(p,x)}{\overline{\psi}(n)\lambda(p,1-x)}\right)^2,$$

из соотношения (57) находим

$$\int_0^1 \xi\left(\tau_2(x), \sqrt{[\psi_1(n)\lambda_1(1-x)]^2 + [\psi_2(n)\lambda_2(1-x)]^2}\right)\frac{dx}{x} =$$

$$= \overline{\psi}(n)\int_0^1 \frac{|\lambda(p,x)|}{1-x}dx + O\left(\int_0^1 \frac{|\tau_2(p,x)|}{x}dx\right). \qquad (58)$$

Применяя теперь теорему 1 и учитывая при этом соотношения (54) – (56), а также равенство (58), получаем равенство (51). Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Пусть выполнены все условия теоремы* 2. *Тогда при* $n \to \infty$ *справедливо асимптотическое равенство*

$$\mathcal{E}\left(C_\infty^{\overline{\psi}}; V_{n,p}\right) = \frac{2}{\pi}\int_n^\infty \frac{\psi_2(t)}{t}dt + O\left(\overline{\psi}(n)\ln\frac{n}{p}\right). \qquad (59)$$

Теорема 3 дополняет теорему 2 в случае, когда условие (52) не выполняется.

Равенство (59) является решением задачи Колмогорова – Никольского для сумм $V_{n,p}(f,x)$ на классах $C_\infty^{\overline{\psi}}$, если

$$\int_n^\infty \frac{\psi_2(t)}{t}dt \asymp \overline{\psi}(n)\ln n, \qquad n \to \infty, \qquad (60)$$

и $0 < \Theta < 1$.

Условие (60), в частности, выполняется для функций $\psi_1(n)=\psi_2(n)=\psi_1^*(n)$. Понятно, что если

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{\psi}(n)\ln n}{\int\limits_n^\infty(\psi_2(t)/t)\,dt}=0, \tag{61}$$

то равенство (59) также будет решением Колмогорова – Никольского для сумм Валле Пуссена на классах $C_\infty^{\overline{\psi}}$ в случае, когда $0\le\Theta<1$.

Условие (61) выполнено, например, для функций

$$\psi_i^{**}(n)=\frac{1}{\ln n\ln^{\gamma_i}\ln n},\quad \gamma_i>1,\quad \gamma_2-\gamma_1<1,\quad i=1,2.$$

Доказательство. Формула (59) получается из сопоставления второго утверждения теоремы 1, соотношений (54) – (56) и равенства (58).

1. *Степанец А. И.* Приближение $\overline{\psi}$-интегралов периодических функций суммами Фурье. – Киев, 1996. – 70 с. – (Препринт / НАН Украины. Ин-т математики; 96.11).
2. *Ch. La Valle Poussin.* Sur la meilleure approximation des fonction d'une variable reelle par des expressions d'order donne // C. r. Acad. sci. – 1918. – **166**. – P. 799 – 802.
3. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
4. *Теляковский С. А.* О нормах тригонометрических полиномов и приближении дифференцируемых функций линейными средними их рядов Фурье. I // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1961. – **62**. – С. 61 – 97.
5. *Теляковский С. А.* О нормах тригонометрических полиномов и приближении дифференцируемых функций линейными средними их рядов Фурье. II // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1963. – **27**, № 2. – С. 253 – 272.
6. *Степанец А. И.* Классы периодических функций и приближение их элементов суммами Фурье. – Киев, 1983. – 57 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.10).
7. *Рукасов В. И.* Приближение периодических функций линейными средними их рядов Фурье. – Киев, 1983. – 55 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.62).
8. *Степанец А. И.* Приближение $\overline{\psi}$-интегралов периодических функций суммами Фурье (небольшая гладкость). I // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 2. – С. 274 – 291.
9. *Степанец А. И.* Приближение $\overline{\psi}$-интегралов периодических функций суммами Фурье (небольшая гладкость). II // Там же. – № 3. – С. 388 – 400.
10. *Рукасов В. И., Чайченко С. О.* Приближение $\overline{\psi}$-интегралов 2π-периодических функций суммами Валле Пуссена // Ряди Фур'є: теорія і застосування: Зб. наук. пр. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1998. – С. 242 – 254.
11. *Рукасов В. И., Новиков О. А., Чайченко С. О.* Приближение классов $C_\infty^{\overline{\psi}}$ суммами Валле Пуссена // Междунар. конф. по теории приближения функций и ее применениям, посвященная памяти В. К. Дзядыка (Киев, 26–30 мая 1999 г.): Тез. докл. – 1999. – С. 71 – 72.

Получено 21.03.2000