УДК 517.9

В. І. Скрипник (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО ЕВОЛЮЦІЙНИЙ ОПЕРАТОР ГРАДІЄНТНОЇ ДИФУЗІЙНОЇ ІЄРАРХІЇ ДЛЯ ПЛОСКИХ РОТАТОРІВ

By using a high-temperature cluster expansion, we construct an evolution operator of the gradient diffusion BBGKY-type hierarchy for plane rotators, which interact via a summable pair potential, in a Banach space containing the Gibbs (stationary) correlation functions. We prove the convergence of the expansion for sufficiently short time interval. As a result, we prove that weak solutions of the hierarchy exist in the same Banach space. If initial correlation functions are the locally perturbed Gibbs correlation functions, then these solutions are defined on an arbitrary time interval.

За допомогою високотемпературного кластерного розкладу побудовано еволюційний оператор градієнтної дифузійної ієрархії типу ББГКІ для плоских ротаторів, що взаємодіють завдяки сумовному парному потенціалу, у банаховому просторі, до якого належать гіббсівські (стаціонарні) кореляційні функції. Збіжність розкладу доведено для достатньо малого часового проміжку. В результаті доведено, що в цьому ж банаховому просторі існують слабкі розв'язки ієрархії. Якщо початкові кореляційні функції є локально гіббсівськими кореляційними функціями, то ці розв'язки визначені на довільному часовому проміжку.

1. Вступ та основний результат. Динаміка в системі скінченного числа плоских броунівських ротаторів, у яких одновимірні координати $\varphi_x \in [0, 2\pi]$ індексуються вузлами x d-вимірної гратки $\mathbb{Z}^d$, що взаємодіють завдяки парному потенціалу, визначається рівнянням Смолуховського для густини $\rho^0(\varphi_\Lambda; t)$ розподілу ймовірності, $\varphi_\Lambda = (\varphi_x; x \in \Lambda) \in [0, 2\pi]^{|\Lambda|}$, $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, $|\Lambda| < \infty$ ($|\Lambda|$ — кількість вузлів Λ),

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho^0(\varphi_\Lambda; t) = \sum_{x\in\Lambda} \partial_x \{\beta^{-1}\partial_x \rho^0(\varphi_\Lambda; t) + \rho^0(\varphi_\Lambda; t)\partial_x U(\varphi_\Lambda)\}, \tag{1.1}$$

$$U(\varphi_\Lambda) = \sum_{x, y\in\Lambda} u_{x-y}(\varphi_x, \varphi_y), \tag{1.2}$$

де

$$u_{x-y}(\varphi_x, \varphi_y) = J_0(|x-y|)\cos(\varphi_x - \varphi_y) + J_1(|x-y|)\cos(\varphi_x + \varphi_y),$$

$$\bar{J} = \|J\|_1, \quad |J_x| \le J,$$

β — обернена температура, $\partial_x = \dfrac{\partial}{\partial\varphi_x}$, значення кореляційних функцій на обох кінцях інтервалу $[0, 2\pi]$ збігаються для кожної ротаторної змінної, тобто ми вимагаємо, щоб справджувалася періодична гранична умова за кожною змінною, $\|J\|_p = \sum_x |J(|x|)|^p$ (підсумовування ведеться по всій гратці). Якщо $J_1 = 0$, то система ізотропна.

Співвідношення (1.1) є прямим рівнянням Колмогорова для стохастичних рівнянь

$$\dot{\varphi}_x(t) = -\partial_x U^0(\varphi_\Lambda(t)) + \beta^{-1/2}\dot{w}_x(t), \quad x \in \Lambda,$$

де $\dot{w}_x(t)$, $x \in \mathbb{Z}^d$, — незалежні процеси білого шуму на колі S^1.

Метод форм Діріхле для опису розв'язків цих рівнянь можна знайти в [1, 2].

Вінерівський процес на S^1 породжується ядром, тобто густиною перехідної ймовірності,

$$P_0^t(\varphi, \varphi') = (4\pi t)^{-1/2} \sum_n e^{-\frac{(\varphi - \varphi' - 2\pi n)^2}{4t}},$$

де підсумовування ведеться по $\mathbb{Z}^d$.

Як буде показано далі, рівняння Смолуховського зводиться до рівняння теплопровідності і розв'язується за допомогою формули Фейнмана – Каца.

Кореляційні функції, які визначають стан системи в канонічному ансамблі, задаються таким чином:

$$\rho^\Lambda(\varphi_X; t) = \Xi_\Lambda^{-1} \int \rho^0(\varphi_\Lambda; t) d\varphi_{\Lambda \setminus X}, \quad \Xi_\Lambda = \int \rho^0(\varphi_\Lambda; t) d\varphi_\Lambda, \quad \rho^0 \geq 0, \tag{1.3}$$

де інтегрування ведеться відповідно по $[0, 2\pi]^{\Lambda \setminus X}$ і $[0, 2\pi]^{|\Lambda|}$. Взагалі, ρ^0 та U можуть залежати від Λ.

Статистична сума Ξ_Λ не залежить від часу, тому що рівняння Смолуховського має градієнтний характер, а також має місце періодична гранична умова.

У великому канонічному ансамблі кореляційні функції визначаються так:

$$\rho^0(\varphi_X; t) = \Xi_\Lambda^{-1} \sum_{Y \subseteq \Lambda \setminus X} \int \rho^0(\varphi_{X \cup Y}; t) d\varphi_Y, \quad \Xi_\Lambda = \sum_{Y \subseteq \Lambda} \int \rho^0(\varphi_Y; t) d\varphi_Y, \tag{1.4}$$

де z — активність, велика статистична сума Ξ_Λ також не залежить від часу.

Обидві послідовності кореляційних функцій задовольняють наступну скінченно об'ємну дифузійну ієрархію:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho^\Lambda(\varphi_X; t) = \sum_{x \in X} \partial_x \Big\{ \beta^{-1} \partial_x \rho^\Lambda(\varphi_X; t) + \rho^\Lambda(\varphi_X; t) \partial_x U(\varphi_X) +$$
$$+ \sum_{y \in \Lambda \setminus X} \int_0^{2\pi} \left(\partial_x u_{x-y}\right)\left(\varphi_x, \varphi_y\right) \rho^\Lambda\left(\varphi_{X \cup y}; t\right) d\varphi_y \Big\}. \tag{1.5}$$

Еволюція у нескінченній системі $\left(\Lambda = \mathbb{Z}^d\right)$ визначається за допомогою дифузійної ієрархії

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\varphi_X; t) = \sum_{x \in X} \partial_x \Big\{ \beta^{-1} \partial_x \rho(\varphi_X; t) + \rho^\Lambda(\varphi_X; t) \partial_x U(\varphi_X) +$$
$$+ \sum_{y \in X'} \int_0^{2\pi} \left(\partial_x u_{x-y}\right)\left(\varphi_x, \varphi_y\right) \rho\left(\varphi_{X \cup y}; t\right) d\varphi_y \Big\} \tag{1.6}$$

чи

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\varphi_X; t) = \sum_{x \in X} \partial_x \Big\{ \beta^{-1} \partial_x \rho(\varphi_X; t) + \rho(\varphi_X; t) \partial_x U(\varphi_X) -$$
$$- \sum_{y \in X'} \Big[J_0(x-y) \int_0^{2\pi} \sin\left(\varphi_x - \varphi_y\right) \rho\left(\varphi_{X \cup y}; t\right) d\varphi_y +$$
$$+ J_1(x-y) \int_0^{2\pi} \sin\left(\varphi_x + \varphi_y\right) \rho\left(\varphi_{X \cup y}; t\right) d\varphi_y \Big] \Big\}, \tag{1.7}$$

де підсумовування по y ведеться по множині $X^c = \mathbb{Z}^d \setminus X$ та

$$\rho(\varphi_X; t) = \lim_{\Lambda^c \to \varnothing} \rho^\Lambda(\varphi_X; t), \quad \Lambda^c = \mathbb{Z}^d \setminus \Lambda.$$

Нехай $\mathbb{L}^1(\mathbb{Z}^d)$ — простір послідовностей f неперервних функцій f: $Y \times [0, 2\pi]^{|Y|} \to \mathbb{R}$ з періодичними граничними умовами за кожною зі змінних з інтервалу $[0, 2\pi]$ та нормою $\|f\| = \sum_Y |f|_Y$, де

$$|f|_Y = \int |f(Y, \varphi_Y)| d\varphi_Y$$

та підсумовування ведеться по $\mathbb{Z}^d$.

Символом $\mathbb{E}_\xi(\mathbb{Z}^d)$ ми позначимо простір послідовностей f з нормою

$$\|f\|_\xi = \sup_Y \xi^{-|Y|} |f|_Y,$$

де Y — підмножина $\mathbb{Z}^d$.

Якщо $\rho^0 \in \mathbb{E}_\xi(\mathbb{Z}^d)$ та $\xi < 1$, то ми можемо перейти до термодинамічної границі безпосередньо в (1.4) та зробити висновок, що $\rho \in \mathbb{E}_\xi(\mathbb{Z}^d)$.

Послідовність гіббсівських канонічних кореляційних функцій належить до простору $\mathbb{E}_\xi(\mathbb{Z}^d)$ при $\xi \geq 1$ (щоб це довести, потрібно використати метод з [3, 4]).

Отже, нам необхідно ставити задачу Коші для дифузійної ієрархії на нескінченній гратці, тобто в термодинамічній границі, у просторі $\mathbb{E}_\xi(\mathbb{Z}^d)$ для $\xi \geq 1$.

Справедливе наступне співвідношення: $\mathbb{E}_\xi(\mathbb{Z}^d) \subset \mathbb{L}^1(\mathbb{Z}^d)$, $\xi \leq 1/2$ (оператор вкладення неперервний). Це випливає з нерівності

$$\|\psi\| = \sum_Y |f|_Y \leq \|\psi\|_\xi \sum_Y \xi^{|Y|} =$$

$$= \|\psi\|_\xi \sum_{n>0} \left(\sum_{Y \in \Lambda_{n+1}} \xi^{|Y|} - \sum_{Y \in \Lambda_n} \xi^{|Y|} \right) \leq \|\psi\|_\xi \sum_{n>0} \sum_{Y \in \Lambda_{n+1}} \xi^{|Y|},$$

де Λ_n — гіперкуб, для якого $|\Lambda_n| = n$, $\Lambda_0 = \varnothing$.

Отже, виконуються співвідношення

$$\|\psi\| = \|\psi\|_\xi \sum_{n>0} \xi^n \sum_{Y \in \Lambda_{n+1}} 1 = 2\|\psi\|_\xi \sum_{n>0} (2\xi)^n = 2(1-2\xi)^{-1} \|\psi\|_\xi.$$

Означимо тепер обмежені оператори d_x, d_X, d_Y у введених просторах та обмежений оператор D в $\mathbb{L}^1(\mathbb{Z}^d)$:

$$(d_x f)(Y, \varphi_Y) = \int_0^{2\pi} f\left(Y \cup x, \varphi_{Y \cup x}; t\right) d\varphi_x, \quad x \notin Y; \quad (d_x f)(Y, \varphi_Y) = 0, \quad x \in Y;$$

$$d_X = \prod_{x \in X} d_x, \quad d_\Lambda = \prod_{x \in \Lambda} d_x, \quad D = \sum_x d_x,$$

де підсумовування ведеться по вузлах гратки $\mathbb{Z}^d$.

Очевидно, що

$$\prod_{x \in \Lambda} (1 + d_x) = \sum_{Y \subseteq \Lambda} d_Y, \quad \prod_{x \in \Lambda} (1 - d_x) = \sum_{Y \subseteq \Lambda} (-1)^{|Y|} d_Y, \tag{1.8}$$

$$d_x^2 = 0, \quad \prod_{x \in \Lambda} (1 + d_x) = e^{D_\Lambda}, \quad \prod_{x \in \Lambda} (1 - d_x) = e^{-D_\Lambda}. \tag{1.9}$$

Як наслідок маємо, що послідовність канонічних кореляційних функцій $\rho_t^\Lambda = \left\{\rho^\Lambda(\varphi_X; t),\ X \in \Lambda\right\}$ може бути подана таким чином:

$$\rho_t^\Lambda = \Xi_\Lambda^{-1} e^{D_\Lambda} j_\Lambda \rho_t^0, \quad j_\Lambda f(X;\varphi_X) = \delta_{X,\Lambda} f(X;\varphi_X).$$

Це подання приводить до подання у термінах напівгрупи $\pi_\Lambda^t : \rho_t^\Lambda = \pi_\Lambda^t \rho^\Lambda$, де

$$\pi_\Lambda^t = e^{D_\Lambda} P^t e^{-D_\Lambda} = \sum_{Y,Y' \subseteq \Lambda} (-1)^{|Y'|} \pi_{Y,Y'}^t, \quad \pi_{Y,Y'}^t = d_Y P^t d_{Y'},$$

$\delta_{X,Y}$ — символ Кронекера, $\rho_t^0 = \left\{ \rho^0(\varphi_X; t), X \subset \mathbb{Z}^d \right\}$, $\rho^\Lambda = \left\{ \rho^\Lambda(\varphi_X), X \subset \mathbb{Z}^d \right\}$ — послідовність початкових кореляційних функцій, P^t — діагональний оператор, визначений рівністю

$$\left(P^t f\right)(X, \varphi_X) = \int P^t\left(\varphi_X, \varphi'_X\right) f\left(\varphi'_X\right) d\varphi'_X,$$

та $P^t\left(\varphi_X, \varphi'_X\right)$ — ядро еволюційного оператора (1.1), що розв'язує класичну проблему Коші для (1.1) (див. лему останнього пункту).

При цьому потрібно скористатися рівностями

$$(d_Y j_\Lambda f)(X, \varphi_X) = \delta_{\Lambda, Y \cup X} \int f\left(X \cup Y, \varphi_{X \cup Y}\right) d\varphi_Y = \delta_{\Lambda, Y \cup X} \int f(\Lambda, \varphi_\Lambda) d\varphi_{\Lambda \setminus X}.$$

Таке ж подання має місце для кореляційних функцій великого канонічного ансамблю, якщо замінити оператор j_Λ та визначити його таким чином:

$$(j_\Lambda f)(X, \varphi_X) = (\chi_\Lambda f)(X, \varphi_X) = \chi_\Lambda(X) f(X, \varphi_X),$$

де $\chi_\Lambda(X) = 1$, $X \subseteq \Lambda$; $\chi_\Lambda(X) = 0$, $X \not\subset \Lambda$.

Із закону збереження ймовірності випливає, що P^t — сильно неперервна стискальна напівгрупа в $\mathbb{L}^1\left(\mathbb{Z}^d\right)$ та $\mathbb{E}_\xi\left(\mathbb{Z}^d\right)$. Це означає, що напівгрупа $\pi^t = e^D P^t e^{-D}$ та напівгрупа π_Λ^t — сильно неперервні напівгрупи відповідно у першому та другому просторах; π^t і π_Λ^t — еволюційні оператори відповідно ієрархій (1.5), (1.6) у тому розумінні, що вони розв'язують проблему Коші у відповідних банахових просторах [5]. Області визначення їх інфінітезимальних операторів містять скінченні послідовності двічі диференційовних функцій (див. лему в останньому пункті).

Справедливе наступне твердження (див. наступний пункт).

Твердження 1. *Нехай* $f \in \mathbb{E}_\xi$ *— фінітна послідовність. Тоді послідовність* $\pi_\Lambda^t f$ *задовольняє* (1.5). *Крім того, інфінітезимальний генератор напівгрупи* π_Λ^t *на підпросторі таких послідовностей f двічі диференційовних функцій визначається рівністю* $\mathcal{H}_\Lambda = H + [D_\Lambda, H]$, *де* H *— інфінітезимальний генератор напівгрупи* P^t, *тобто оператор, який міститься у правій частині послідовності рівнянь Смолуховського.*

Наша мета — знайти термодинамічну границю напівгрупи π_Λ^t в $\mathbb{E}_\xi\left(\mathbb{Z}^d\right)$ для $\xi \in \mathbb{R}$. Щоб зробити це, необхідно поміняти порядок підсумовування у виразі для π_Λ^t, а тоді відняти вирази, які перетворюються в нуль згідно з законом збереження ймовірності.

Для двох компактних множин таких, що $A \subset A'$, визначимо таку відстань $\operatorname{dist}\left\{A, A'^c\right\} = \operatorname{dist}\left\{S_A^+, S_{A'}^-\right\}$, де S_A^+ — мінімальна (гіпер)сфера, що містить A, та $S_{A'}^-$ — максимальна (гіпер)сфера, що міститься в A'.

Теорема 1. *Існує оператор* π^t, $t \geq 0$, *що відображає* $\mathbb{E}_\xi\left(\mathbb{Z}^d\right)$ *в* $\mathbb{E}_{\xi(t)}\left(\mathbb{Z}^d\right)$, $\xi(t) = 4\pi\left(1 + t\beta^{-1}\right)^{1/2}\xi$, *тільки якщо* $e\overline{B}\xi < 1$ *та*

$$\overline{B} = 8\pi \bar{J}\beta\left(1+t\beta^{-1}\right)^{3/2} e^{\bar{J}\beta\left(1+t\beta^{-1}\right)},$$

причому

$$\lim_{\Lambda^c \to \varnothing}\left\|\left(\pi^t - \pi^t_\Lambda\right) f\right\|_{\xi(t)} = 0, \qquad \left\|\pi^t f\right\|_{\xi(t)} \le \left(1 - e\xi\overline{B}\right)^{-1}\|f\|_\xi. \tag{1.10}$$

Крім цього, якщо для деякої послідовності $F,\ F^\Lambda \in \mathbb{E}_\xi$ *та* $\Lambda' \subset \Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ *існує додатна функція* $\varepsilon(\lambda)$, *яка збігається до нуля на нескінченності, така, що*

$$\left\|\chi_{\Lambda'}\left(F - F^\Lambda\right)\right\|_\xi = \varepsilon(\lambda), \quad \chi_\Lambda F^\Lambda = F^\Lambda, \quad \chi_{\Lambda^c} F^\Lambda = 0, \quad \lambda = \operatorname{dist}\left\{\Lambda', \Lambda^c\right\}, \tag{1.11}$$

то існує додатна функція ε_t, *яка зникає на нескінченності, така, що*

$$\left\|\chi_{\Lambda'}\pi^t\left(F - F^\Lambda\right)\right\|_{\xi(t)} \le \varepsilon_t(\lambda). \tag{1.12}$$

Величина $\overline{B}$ залежить від β, $t\beta^{-1}$. У деяких формулах ми будемо вказувати залежність від t, пишучи $\overline{B}(t)$ замість $\overline{B}$.

***Наслідок* 1.** *Сім'я операторів* π^t *локально має напівгрупову властивість, її стаціонарний вектор збігається з послідовністю гіббсівських кореляційних функцій з потенціалом* u_{x-y} *та* $\pi^t\rho_c^\Lambda$ *існує в термодинамічній границі на будь-якому проміжку часу, якщо* ρ_c^Λ *— послідовність локально збурених гіббсівських кореляційних функцій (відношення локально збуреної гіббсівської та гіббсівської статистичних сум збігається до скінченної границі у термодинамічній границі).*

Послідовність локально збурених гіббсівських кореляційних функцій задається таким чином:

$$\rho_c^\Lambda(\varphi_X) = \Xi_{c\Lambda}^{-1}\int e^{-\beta[U(\varphi_\Lambda)+U_c(\varphi_\Lambda)]}d\varphi_{\Lambda\setminus X}, \quad \Xi_{c\Lambda} = \int e^{-\beta[U(\varphi_\Lambda)+U_c(\varphi_\Lambda)]}d\varphi_\Lambda,$$

$$U_c(\varphi_\Lambda) = \sum_{s<\infty}\ \sum_{X_c\subset\Lambda, |X_s|=s} J_c(X_c)u_{(c)s}\left(\varphi_{x_1},\ldots,\varphi_{x_s}\right),$$

$$|U_c| \le \sum_{s<\infty}\left|C_j\right|^s \bar{J}_c, \qquad U_c\left(\varphi_{\Lambda\setminus C_J}\right) = 0,$$

де підсумовування ведеться по s-точкових множинах, X_s та J_c— функції зі скінченним носієм, $(\times C_J)^s$ та $u_{(c)s}$ — s-частинкові потенціали, які є періодичними функціями з періодом 2π, $|u_s| \le \bar{J}_c$.

***Наслідок* 2.** *Нехай для деякої послідовності* ρ, $\rho \in \mathbb{E}_\xi\left(\mathbb{Z}^d\right)$, *існує послідовність* ρ^Λ *така, що виконується* (1.11). *Тоді послідовність* $\pi^t\rho$ *— слабкий розв'язок дифузійної ієрархії, тобто для двічі диференційовних функцій* $f(\varphi_X)$ *та* $[0, 2\pi]^{|X|}$ *з періодичними граничними умовами виконується рівність*

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho(\varphi_X; t) f(\varphi_X)\, d\varphi_X =$$

$$= \int \sum_{x\in X}\left[\beta^{-1}\partial_x^2 f(\varphi_X) - (\partial_x f)(\varphi_X)(\partial_x U)(\varphi_X)\right]\rho(\varphi_X; t)\, d\varphi_X -$$

$$- \sum_{x\in X}\sum_{y\notin X}\left(\partial_x u_{x-y}\right)\left(\varphi_x, \varphi_y\right)(\partial_x f)(\varphi_X)\rho\left(\varphi_{X\cup y}; t\right) d\varphi_{X\cup y}. \tag{1.13}$$

Доведення цих результатів подібне до доведення аналогічних результатів для ієрархії типу ББГКІ, яка описує нерівноважну систему броунівських частинок [6, 7]. Головна його ідея — зобразити ядра операторів у кластерних розкладах еволюційного оператора у термінах функцій, які задовольняють рекурентне співвідношення Кірквуда – Сальцбурга (КС) для гіббсівської системи на вінерівських траєкторіях з комплексним парним потенціалом.

Незвичайна риса кластерних розкладів для ротаторів полягає у тому, що оператор d_x є аналогом оператора знищення ферміонів. Для систем частинок у кластерних розкладах еволюційного оператора ієрархії типу ББГКІ застосовується оператор знищення бозонів [6].

Побудова еволюційного оператора ієрархії ББГКІ для класичних систем частинок у банахових просторах, які містять послідовність гіббсівських кореляційних функцій, можна знайти в [8] (див. також [9]).

Дана робота побудована таким чином. У наступному пункті ми виводимо дифузійну ієрархію. У третьому пункті ядро $P^t(\varphi_X, \varphi'_X)$ подається у термінах вінерівської міри за допомогою формули Фейнмана – Каца. У четвертому — наводиться високотемпературний кластерний розклад (4.2) для π^t_Λ у термінах функцій, які задовольняють КС рекурентні співвідношення з незвичайними граничними умовами. У п'ятому — цей кластерний розклад переписано у термінах функцій, які задовольняють КС рекурентні співвідношення (5.1) зі звичайними (нульовими) граничними умовами за допомогою закону збереження ймовірності. У шостому та сьомому пунктах відповідно ми наводимо доведення збіжності кластерного розкладу та наслідків 1, 2.

2. Виведення дифузійної ієрархії. Щоб вивести (1.5), спершу потрібно продиференціювати першу рівність (1.3) та (1.4), а далі підставити результат в (1.1), використовуючи той факт, що ні канонічна, ні велика канонічна статистичні суми не залежать від часу. При цьому можна поміняти місцями операції диференціювання, враховуючи лему 1.

Отже, продиференціюємо першу рівність в (1.4). Тоді з (1.1) маємо

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho^\Lambda(\varphi_X;t) =$$

$$= \sum_{Y\subseteq\Lambda\setminus X}\int\sum_{y\in X\cup Y}\partial_y\left\{\beta^{-1}\partial_y\rho^0\left(\varphi_{X\cup Y};t\right) + \rho^0\left(\varphi_{X\cup Y};t\right)\partial_y U\left(\varphi_{X\cup Y}\right)\right\}d\varphi_Y.$$

Періодичні граничні умови усувають доданок у сумі з $y\in Y$.

В результаті одержуємо

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho^\Lambda(\varphi_X;t) = \sum_{x\in X}\left\{\partial_x\left\{\beta^{-1}\partial_x\rho^\Lambda(\varphi_X;t) + \rho^\Lambda(\varphi_X;t)\partial_x U(\varphi_X)\right\} + \right.$$

$$+ \sum_{Y\subseteq\Lambda\setminus X}\int\sum_{y\in Y}\left[\left(\partial_x u_{x-y}\right)\left(\varphi_x,\varphi_y\right)\left(\partial_x\rho^0\right)\left(\varphi_{X\cup Y};t\right) + \right.$$

$$\left.\left. + \rho^0\left(\varphi_{X\cup Y};t\right)\left(\partial_x^2 u_{x-y}\right)\left(\varphi_x,\varphi_y\right)\right]d\varphi_Y\right\}.$$

Останній доданок дорівнює

$$\sum_{Y\in\Lambda\setminus X}\left[\int\left(\partial_x u_{x-y}\right)\left(\varphi_x,\varphi_y\right)d\varphi_y\sum_{Y\subseteq\Lambda\setminus(y\cup X)}\int\left(\partial_x\rho^0\right)\left(\varphi_{X\cup Y\cup y};t\right)d\varphi_Y + \right.$$

$$\left. + \int\left(\partial_x^2 u_{x-y}\right)\left(\varphi_x,\varphi_y\right)d\varphi_y\sum_{Y\subseteq\Lambda\setminus(y\cup X)}\int\rho^0\left(\varphi_{X\cup Y\cup y};t\right)d\varphi_Y\right].$$

Цей доданок збігається з останнім доданком в (1.5) після ділення його на велику статистичну суму.

***Доведення твердження* 1.** Парний потенціал є нескінченно диференційовною функцією, тому на підпросторі, згаданому у цьому припущенні, виконується рівність

$$\frac{\partial}{\partial t}\pi^t_\Lambda = e^{D_\Lambda} H P^t e^{-D_\Lambda}.$$

Тепер потрібно скористатися наступною формулою для двох обмежених операторів A, B:

$$e^A B = \left\{ B + [A, B] + \frac{1}{2!}[A, [A, B]] + \frac{1}{n!}\sum_{n>2} A_n(B) \right\} e^A,$$

де $A_n(B) = \left[A, A_{n-1}(B)\right]$, $A_1(B) = [A, B]$. Ця формула є наслідком формули

$$A^n B = \sum_{k=0}^{n} C_n^k A_k(B) A^n, \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

що доводиться за допомогою рівності $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$.

Далі покажемо, що $[D_\Lambda, H]$ збігається з інтегральним доданком в (1.5) і подвійний комутатор рівний нулю:

$$(H d_x f)(\varphi_X) = \sum_{y \in X} \partial_y \left\{ \beta^{-1} \partial_y \int f\left(\varphi_{X \cup x}\right) d\varphi_x + \partial_y U(\varphi_X) \int f\left(\varphi_{X \cup x}\right) d\varphi_x \right\},$$

де $x \notin X$,

$$(d_x H f)(\varphi_X) = \int (H f)\left(\varphi_{X \cup x}\right) d\varphi_x =$$

$$= \sum_{y \in X} \partial_y \left\{ \beta^{-1} \partial_y \int f\left(\varphi_{X \cup x}\right) d\varphi_x + \int f\left(\varphi_{X \cup x}\right) \partial_y U\left(\varphi_{X \cup x}\right) d\varphi_x \right\} +$$

$$+ \int \partial_x \left\{ \beta^{-1} \partial_x f\left(\varphi_{X \cup x}\right) + f\left(\varphi_{X \cup x}\right) \partial_x U\left(\varphi_{X \cup x}\right) \right\} d\varphi_x.$$

Останній доданок дорівнює нулю:

$$([d_x, H] f)(X) = \sum_{y \in X} \partial_y \int \left(\partial_y u_{y-x}\right)(\varphi_y, \varphi_x) f\left(\varphi_{X \cup x}\right) d\varphi_x.$$

Крім того,

$$\sum_{y \in \Lambda} ([d_x, H] f)(X) = \sum_{y \in \Lambda \setminus X} ([d_x, H] f)(X) =$$

$$= \sum_{y \in \Lambda \setminus X} \sum_{y \in X} \partial_y \int \left(\partial_y u_{y-x}\right)(\varphi_y, \varphi_x) f\left(\varphi_{X \cup x}\right) d\varphi_x =$$

$$= \sum_{y \in X} \partial_y \sum_{y \in \Lambda \setminus X} \int \left(\partial_y u_{y-x}\right)(\varphi_y, \varphi_x) f\left(\varphi_{X \cup x}\right) d\varphi_x.$$

Цей доданок збігається з останнім доданком у правій частині (1.5).

Далі маємо

$$([d_x, H] d_z f)(\varphi_X) = \sum_{y \in X} \partial_y \int \partial_y u_{y-x}\left(\varphi_y, \varphi_x\right) f\left(\varphi_{X \cup x \cup z}\right) d\varphi_x\, d\varphi_z,$$

$$(d_z [d_x, H] f)(\varphi_X) = \int ([d_x, H] f)\left(\varphi_{X \cup z}\right) d\varphi_z =$$

$$= \sum_{y \in X \cup z} \int d\varphi_z \partial_y \int \left(\partial_y u_{y-x}\right)(\varphi_y, \varphi_x) f\left(\varphi_{X \cup x \cup z}\right) d\varphi_x.$$

Доданок з $y = z$ дорівнює нулю, тому $(d_z [d_x, H] f)(\varphi_X) = 0$. Ця рівність та рівність $(d_x, [d_x, H]f)(\varphi_X) = 0$ разом приводять до співвідношення $[D_\Lambda, [D_\Lambda, H]] = 0$. Твердження доведено.

3. Рівняння Смолуховського та формула Фейнмана – Каца (ФК). Нехай $P^t(\varphi_\Lambda|\varphi'_\Lambda)$ — фундаментальний періодичний розв'язок рівняння Смолуховського. Нехай також для $t \geq 0$ виконуються рівності

$$P^t(\varphi_\Lambda|\varphi'_\Lambda) = e^{-\frac{\beta}{2}[U(\varphi_\Lambda) - U(\varphi'_\Lambda)]}\mathcal{P}^t(\varphi_\Lambda|\varphi'_\Lambda), \qquad P^0(\varphi_\Lambda|\varphi'_\Lambda) = \prod_{x\in\Lambda}\delta(\varphi_x|\varphi'_x),$$

де $\delta(\cdot|\varphi')$ — точкова міра, зосереджена в φ': $\int_0^{2\pi} f(\varphi)\delta(\varphi|\varphi')d\varphi = f(\varphi')$.

Тоді виконується наступне рівняння теплопровідності:

$$\beta\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{P}^t(\varphi_\Lambda|\varphi'_\Lambda) = \sum_{x\in\Lambda}\partial_x^2\mathcal{P}^t(\varphi_\Lambda|\varphi'_\Lambda) + V(\varphi_\Lambda)\mathcal{P}^t(\varphi_\Lambda|\varphi'_\Lambda), \tag{3.1}$$

де

$$V(\varphi_\Lambda) = \frac{\beta}{2}\sum_{x\in\Lambda}\left[\partial_x^2 U(\varphi_\Lambda) - \frac{\beta}{2}(\partial_x U(\varphi_\Lambda))^2\right], \qquad \mathcal{P}^0(\varphi_\Lambda|\varphi'_\Lambda) = \prod_{x\in\Lambda}\delta(\varphi_x|\varphi'_x).$$

Із визначення вінерівського процесу на S^1 маємо

$$\int\left(w(t) - w(t')\right)^{2k}P_\varphi(dw) = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}P_0^t(\varphi,\varphi_1)(\varphi_1 - \varphi_2)^{2k}P_0^{t'-t}(\varphi_1 - \varphi_2)d\varphi_1\,d\varphi_2 =$$

$$= \left((4\pi)^2 t(t'-t)\right)^{-1/2}\sum_{n_1,n_2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-\frac{(\varphi-\varphi_1-2\pi n_1)^2}{4t}}(\varphi_1-\varphi_2)^{2k}e^{-\frac{(\varphi_1-\varphi_2-2\pi n_2)^2}{4(t'-t)}}d\varphi_1\,d\varphi_2 \leq$$

$$\leq \left((4\pi)^{2k-1}t^{-1/2}(t'-t)\right)^{k+1/2}\sum_{n_1,n_2}\int_0^{\frac{2\pi}{\sqrt{t'-t}}}\int_0^{\frac{2\pi}{\sqrt{t'-t}}}e^{-\frac{t'-t}{4t}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{t'-t}}-\varphi_1-\frac{2\pi}{\sqrt{t'-t}}n_1\right)^2}\times$$

$$\times e^{-4^{-1}\left(\varphi_1-\varphi_2-\frac{2\pi}{\sqrt{t'-t}}n_2\right)^2}d\varphi_1\,d\varphi_2 =$$

$$= \left((4\pi)^{2k-1}t^{-1/2}(t'-t)\right)^{k+1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t'-t}{4t}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{t'-t}}-\varphi_1\right)^2}e^{-4^{-1}(\varphi_1-\varphi_2)^2}d\varphi_1\,d\varphi_2 =$$

$$= \left((4\pi)^{2k}(t'-t)\right)^k.$$

З того, що цей процес набуває значень у компактному просторі, робимо висновок, що він є сепарабельним та його міра зосереджена на неперервних траєкторіях [10].

Розв'язок задачі Коші для (3.1) задається ФК формулою (ця формула, по суті, встановлюється міркуваннями леми з останнього пункту без застосування формули Лі – Троттера):

$$\mathcal{P}^t(\varphi_\Lambda|\varphi'_\Lambda) = \int P_{\varphi_\Lambda}(dw_\Lambda)\delta\left(\varphi'_\Lambda\middle|w_\Lambda(t\beta^{-1})\right)\exp\left\{\int_0^{t\beta^{-1}}V(w_\Lambda(\tau))d\tau\right\}.$$

В результаті одержуємо

$$P^t\left(\varphi_\Lambda \middle| \varphi'_\Lambda\right) = \int P_{\varphi_\Lambda}(dw_\Lambda)\delta\left(\varphi'_\Lambda \middle| w_\Lambda\left(t\beta^{-1}\right)\right)e^{-\beta U((\varphi,w)_\Lambda)}, \tag{3.2}$$

де

$$U((\varphi,w)_\Lambda) = \frac{1}{2}\left[U(\varphi_\Lambda) - U\left(w_\Lambda\left(t\beta^{-1}\right)\right)\right] - \beta^{-1}\int_0^{t\beta^{-1}} V(w_\Lambda(\tau))\,d\tau \tag{3.3}$$

та інтегрування ведеться по простору Ω, який є ймовірнісним простором одновимірного процесу Вінера в S^1;

$$\exp\left\{-\frac{\beta^2}{4}\int_0^{t\beta^{-1}} (\partial_x U(w_\Lambda))^2\,d\tau\right\} = \int \exp\left\{i\frac{\beta}{2}\int_0^{t\beta^{-1}} \partial_x U(w_\Lambda)\,dw_x^*(\tau)\right\}P_0\left(dw_x^*\right), \tag{3.4}$$

де під знаком експоненти знаходиться стохастичний інтеграл та P_0 — вінерівська міра, зосереджена на траєкторіях, які починаються в початку координат. Тому

$$\exp\left\{-\frac{\beta^2}{4}\sum_{x\in\Lambda}\int_0^{t\beta^{-1}} (\partial_x U(w_\Lambda))^2\,d\tau\right\} =$$

$$= \int \exp\left\{i\frac{\beta}{2}\sum_{x\in\Lambda}\int_0^{t\beta^{-1}} \partial_x U(w_\Lambda)\,dw_x^*(\tau)\right\}P_0\left(dw_\Lambda^*\right).$$

Звідси випливає

$$P^t\left(\varphi_\Lambda \middle| \varphi'_\Lambda\right) = \int P_{\varphi_\Lambda}(dw_\Lambda)P_0\left(dw_\Lambda^*\right)\delta\left(\varphi'_\Lambda \middle| w_\Lambda\left(t\beta^{-1}\right)\right)e^{-\beta U(\omega_\Lambda)}, \tag{3.5}$$

де $\omega = \left(\varphi, w, w^*\right)$,

$$U(\omega_\Lambda) = \sum_{x,y\in\Lambda} u_{x-y}\left(\omega_x, \omega_y\right), \tag{3.6}$$

$$u_{x-y}\left(\omega_x, \omega_y\right) = \frac{1}{2}\left[u_{x-y}\left(\varphi_x, \varphi_y\right) - u_{x-y}\left(\omega_x\left(t\beta^{-1}\right), \omega_y\left(t\beta^{-1}\right)\right)\right] -$$

$$- 4^{-1}\int_0^{t\beta^{-1}} \left(\left(\partial_x^2 + \partial_y^2\right)u_{x-y}\right)\left(w_x(\tau), w_y(\tau)\right)d\tau +$$

$$+ i4^{-1}\left[\int_0^{t\beta^{-1}} \left(\partial_x u_{x-y}\right)\left(w_x(\tau), w_y(\tau)\right)dw_x^*(\tau) + \int_0^{t\beta^{-1}} \left(\partial_y u_{y-x}\right)\left(w_y(\tau), w_x(\tau)\right)dw_y^*(\tau)\right].$$

Очевидно, що

$$\operatorname{Im} u_{x-y}(\omega_x, \omega_y) = \sum_{s=0}^{1} J_s(|x-y|)\phi_s(\omega_x, \omega_y),$$

де

$$\phi_s(\omega_x, \omega_y) = -\left(\int_0^{t\beta^{-1}} \sin\left(w_x(\tau) - (-1)^s w_y(\tau)\right)dw_x^*(\tau) +\right.$$

$$\left. + \int_0^{t\beta^{-1}} \sin\left(w_y(\tau) - (-1)^s w_x(\tau)\right)dw_y^*(\tau)\right) =$$

$$= -\left(\phi^0\left(w_x - (-1)^s w_y, w_x^*\right) + \phi^0\left(w_y - (-1)^s w_x, w_y^*\right)\right).$$

Стохастичний інтеграл $\phi^0(w, w^*)$ визначений майже скрізь як границя у топології простору L^2 ріманівських сум. Відомо, що кожна послідовність, збіжна в цій топології, має підпослідовність, збіжну майже скрізь. Тому $\phi^0(w, w^*)$ визначається як границя послідовності циліндричних функцій на декартовому добутку двох ймовірнісних просторів.

4. Структура еволюційного оператора. Змінюючи порядок підсумовування, одержуємо

$$\pi_\Lambda^t = \sum_{Y\subseteq\Lambda}\sum_{Y'\subseteq Y}(-1)^{|Y\setminus Y'|}\pi^t_{Y',Y\setminus Y'} = \sum_{Y\subseteq\Lambda}\pi^t(Y)$$

та

$$\left(\pi_\Lambda^t f\right)(X,\varphi_X) = \sum_{Y\subseteq\Lambda\setminus X}\left(\pi^t(Y)f\right)(X,\varphi_X). \qquad (4.1)$$

Із визначення $\pi^t_{Y',Y''}$ одержуємо

$$\left(\pi^t_{Y',Y''}f\right)(\varphi_X) = \int\left(P^t d_{Y''}f\right)\left(\varphi_{X\cup Y'}\right)d\varphi_{Y'} =$$

$$= \int P^t\left(\varphi_{X\cup Y'}\middle|\varphi'_{X\cup Y'}\right)\left(d_{Y''}f\right)\left(\varphi'_{X\cup Y'}\right)d\varphi_{Y'}\,d\varphi'_{X\cup Y'} =$$

$$= \int P^t\left(\varphi_{X\cup Y'}\middle|\varphi'_{X\cup Y'}\right)f\left(\varphi'_{X\cup Y'\cup Y''}\right)d\varphi_{Y'}\,d\varphi'_{X\cup Y'\cup Y''} =$$

$$= \int P^t\left(\varphi_{X\cup Y'}\middle|\varphi'_{X\cup Y'}\right)P_t^0\left(\varphi_{Y''}\middle|\varphi'_{Y''}\right)f\left(\varphi'_{X\cup Y'\cup Y''}\right)d\varphi_{Y'\cup Y''}\,d\varphi'_{X\cup Y'\cup Y''},$$

де ми використали рівність

$$\int P_t^0\left(\varphi_{Y''}\middle|\varphi'_{Y''}\right)d\varphi_{Y''} = 1, \quad P_t^0\left(\varphi_{Y''}\middle|\varphi'_{Y''}\right) = \int P_{\varphi_{Y''}}(dw_\Lambda)\,\delta\left(\varphi'_{Y''}\middle|w_{Y''}\left(t\beta^{-1}\right)\right).$$

При цьому ми повинні дотримуватись співвідношень $X\cap Y'\neq\varnothing$, $X\cap Y''\neq\varnothing$, $Y'\cap Y''\neq\varnothing$.

З (3.2) випливає рівність

$$\left(P^t f\right)(\varphi_X) = \int P_{\varphi_X}(dw_X)\int e^{-\beta U\left((\varphi,w)_{X\cup Y}\right)}f\left(w_{X\cup Y}(t)\right).$$

Із співвідношення (3.5) маємо

$$\left(\pi^t(Y)f\right)(\varphi_X) = \int P_{\varphi_X}(dw_X)\int\pi(\varphi_X,w_X\,|\,w_Y,w_Y)\,f\left(w_{X\cup Y}(t)\right)d\varphi_Y\,P_{\varphi_Y}(dw_Y),$$

$$Y'\cup Y'' = Y,$$

де

$$\pi(\varphi_X,w_X\,|\,\varphi_Y,w_Y) = \sum_{Y'\subseteq Y}(-1)^{|Y\setminus Y'|}e^{-\beta U\left(\varphi_{X\cup Y'},\,w_{X\cup Y'}\right)}.$$

Y' може бути порожньою множиною.

Нехай $P(d\omega_X) = d\varphi_X\,P_{\varphi_X}(dw_X)\,P_0(dw_X^*)$. Тоді маємо

$$\left(\pi^t(Y)f\right)(\varphi_X) = \int P_{\varphi_X}(dw_X)P_0(dw_X^*)\int\pi(\omega_X\,|\,\omega_Y)\,f\left(w_{X\cup Y}(t)\right)P(d\omega_Y),$$

де

$$\pi(\omega_X\,|\,\omega_Y) = \sum_{Y'\subseteq Y}(-1)^{|Y\setminus Y'|}e^{-\beta U(\omega_X,\,\omega_{Y'})},$$

Y' також може бути порожньою множиною. Отже,

$$\left(\pi^t f\right)(\varphi_X) = \sum_{Y \subset X^c} \int P_{\varphi_X}(dw_X) P_0(dw_X^*) \int \pi(\omega_X|\omega_Y) f\left(w_{X\cup Y}(t)\right) P(d\omega_Y). \quad (4.2)$$

Функції $\pi(\cdot|\cdot)$ задовольняють наступне КС рекурентне співвідношення (Z не є порожньою множиною):

$$\pi(\omega_X|\omega_Y) =$$

$$= e^{-\beta W(\omega_x|\omega_{X\setminus x})}\left[\pi\left(\omega_{X\setminus x}|\omega_Y\right) + \sum_{Z\subseteq Y} K(\omega_x|\omega_Z)\pi\left(\omega_{X\setminus x\cup Z}\middle|\omega_{Y\setminus Z}\right)\right], \quad x \in X, \tag{4.3}$$

де

$$W\left(\omega_x\middle|\omega_{X\setminus x}\right) = U(\omega_X) - U\left(\omega_{X\setminus x}\right),$$

$$K(\omega_x|\omega_Z) = \prod_{z\in Z}\left(e^{-\beta u_{x-z}(\omega_x,\omega_z)} - 1\right), \quad x \notin Z,$$

$$\pi(\varnothing|\,\omega_Y) = \sum_{Y'\subseteq Y}(-1)^{|Y\setminus Y'|}e^{-\beta U(\omega_{Y'})}, \qquad \pi(\,\omega_X\,|\,\varnothing) = e^{-\beta U(\omega_X)}, \tag{4.4}$$

$$U(\varnothing) = 0, \qquad U\left(\omega_y\right) = 0.$$

Щоб отримати цей результат, необхідно враховувати, що $X \not\subset Y$, та скористатися рівностями

$$\pi(\,\omega_X\,|\,\omega_Y\,) =$$

$$= e^{-\beta W(\omega_x|\omega_{X\setminus x})}\left[\pi\left(\omega_{X\setminus x}|\omega_Y\right) + \sum_{Y'\subseteq Y}(-1)^{|Y\setminus Y'|}\sum_{Z\subseteq Y'} K(\omega_x|\omega_Z)e^{-\beta U(\omega_{X\setminus x},\,\omega_{Y'})}\right] =$$

$$= e^{-\beta W(\omega_x|\omega_{X\setminus x})}\left[\pi\left(\omega_{X\setminus x}|\omega_Y\right) + \sum_{Z\subseteq Y} K(\omega_x|\omega_Z)\sum_{Z\subseteq Y'\subseteq Y}(-1)^{|Y\setminus Y'|}e^{-\beta U(\omega_{X\setminus x},\,\omega_{Y'})}\right] =$$

$$= e^{-\beta W(\omega_x|\omega_{X\setminus x})}\left[\pi\left(\omega_{X\setminus x}|\omega_Y\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{Z\subseteq Y} K\left(\omega_x\middle|\omega_{Y\setminus Z}\right)\sum_{Y'\subseteq Y\setminus Z}(-1)^{|(Y\setminus Z)\setminus Y'|}e^{-\beta U(\omega_{X\setminus x},\,\omega_{Y'},\,\omega_Z)}\right] =$$

$$= e^{-\beta W(\omega_x|\omega_{X\setminus x})}\left[\pi\left(\omega_{X\setminus x}|\omega_Y\right) + \sum_{Z\subseteq Y} K(\omega_x|\omega_Z)\pi\left(\omega_{X\setminus x\cup Z}\middle|\omega_{Y\setminus Z}\right)\right].$$

5. Співвідношення Кірквуда – Сальцбурга. Розглянемо КС співвідношення з нульовими граничними умовами

$$\Pi(\,\omega_X\,|\,\omega_Y\,) =$$

$$= e^{-\beta W(\omega_x|\omega_{X\setminus x})}\left[\pi\left(\omega_{X\setminus x}|\omega_Y\right) + \sum_{Z\subseteq Y} K(\omega_x|\omega_Z)\Pi\left(\omega_{X\setminus x\cup Z}\middle|\omega_{Y\setminus Z}\right)\right], \quad x \in X, \tag{5.1}$$

$$\Pi(\varnothing|\,\omega_Y\,) = 0, \qquad \Pi(\,\omega_X\,|\,\varnothing) = e^{-\beta U(\omega_X)}. \tag{5.2}$$

Крім того, маємо

$$\pi\left(\varnothing \mid \omega_y\right) = 0, \quad \Pi(\omega_X \mid \varnothing) = \pi(\omega_X \mid \varnothing), \quad \Pi\left(\omega_X \mid \omega_y\right) = \pi\left(\omega_X \mid \omega_y\right). \tag{5.3}$$

Останню рівність легко перевірити.

Підставляючи (5.2), (5.3) в (4.3) та беручи до уваги (5.1), одержуємо

$$\pi\left(\omega_X \mid \omega_{Y_2}\right) = \Pi\left(\omega_X \mid \omega_{Y_2}\right) + e^{-\beta U(\omega_X)}\pi\left(\varnothing \mid \omega_{Y_2}\right), \quad Y_2 = (y_1, y_2). \tag{5.4}$$

Підставляючи ці рівності в (4.3), отримуємо за допомогою (5.1) $Y_3 = (y_1, y_2, y_3)$ такі рівності:

$$\pi\left(\omega_x \mid \omega_{Y_3}\right) = \Pi\left(\omega_x \mid \omega_{Y_3}\right) + \pi\left(\varnothing \mid \omega_{Y_3}\right) + \sum_{y' \in Y_3} K\left(\omega_x \middle| \omega_{y'}\right)\pi\left(\varnothing \mid \omega_{Y_3 \setminus y'}\right). \tag{5.5}$$

Так само з (4.3), (5.1) та попередніх рівностей одержуємо

$$\pi\left(\omega_x \mid \omega_{Y_4}\right) = \pi\left(\varnothing \mid \omega_{Y_4}\right) + \sum_{Z \in Y_4} K(\omega_x | \omega_Z)\pi\left(\omega_Z \mid \omega_{Y_4 \setminus Z}\right) =$$

$$= \Pi\left(\omega_x \mid \omega_{Y_4}\right) + \pi\left(\varnothing \mid \omega_{Y_4}\right) +$$

$$+ \sum_{y \subseteq Y_4} K\left(\omega_x \middle| \omega_y\right)\left[\pi\left(\varnothing \mid \omega_{Y_4 \setminus y}\right) + \sum_{y' \in Y_4 \setminus y} K\left(\omega_y \middle| \omega_{y'}\right)\pi\left(\varnothing \mid \omega_{Y_4 \setminus y' \cup y}\right)\right] +$$

$$+ \sum_{Y_2' \subseteq Y_4} K\left(\omega_x \middle| \omega_{Y_2'}\right) e^{-\beta U(\omega_{Y_2'})}\pi\left(\varnothing \mid \omega_{Y_4 \setminus Y_2'}\right).$$

В результаті маємо

$$\pi\left(\omega_x \mid \omega_{Y_4}\right) = \Pi\left(\omega_x \mid \omega_{Y_4}\right) + \pi\left(\varnothing \mid \omega_{Y_4}\right) + \sum_{y \subseteq Y_4} K\left(\omega_x \middle| \omega_y\right)\pi\left(\varnothing \mid \omega_{Y_4 \setminus y}\right) +$$

$$+ \sum_{Y_2' \subseteq Y_4}\left[K\left(\omega_x \middle| \omega_{y_1'}\right)K\left(\omega_{y_1'} \middle| \omega_{y_2'}\right) + K\left(\omega_x \middle| \omega_{Y_2'}\right)e^{-\beta U(\omega_{Y_2'})}\right]\pi\left(\varnothing \mid \omega_{Y_4 \setminus Y_2'}\right). \tag{5.6}$$

Крім того, із співвідношень (4.3) та (5.1) – (5.4) отримуємо

$$\pi\left(\omega_{X_2} \mid \omega_{Y_3}\right) = \Pi\left(\omega_{X_2} \mid \omega_{Y_3}\right) + e^{-\beta U(\omega_{X_2})} \times$$

$$\times \left\{\pi\left(\varnothing \mid \omega_{Y_3}\right) + \sum_{y' \in Y_3}\left[K\left(\omega_{x_1} \middle| \omega_y\right) + K\left(\omega_{x_2} \middle| \omega_y\right) + K\left(\omega_{X_2} \middle| \omega_y\right)\right]\pi\left(\varnothing \mid \omega_{Y_3 \setminus y'}\right)\right\} =$$

$$= \Pi\left(\omega_{X_2} \mid \omega_{Y_3}\right) + e^{-\beta U(\omega_{X_2})}\left[\pi\left(\varnothing \mid \omega_{Y_3}\right) + \sum_{y' \in Y_3}\left(e^{-\beta W(\omega_{y'} | \omega_{X_2})} - 1\right)\pi\left(\varnothing \mid \omega_{Y_3 \setminus y'}\right)\right]. \tag{5.7}$$

При цьому ми скористалися рівністю

$$e^{-\beta U(\omega_{X_2 \cup y})} = 1 + K\left(\omega_{x_2} \middle| \omega_y\right).$$

Ці рівності є мотивацією для написання наступного співвідношення $(|Y| > 1)$:

$$\pi(\omega_X \mid \omega_Y) = \Pi(\omega_X \mid \omega_Y) + e^{-\beta U(\omega_X)}\pi(\varnothing \mid \omega_Y) +$$

$$+ \sum_{Y' \subset Y} S_Y\left(\omega_X \middle| \omega_{Y'}\right)\pi\left(\varnothing \mid \omega_{Y \setminus Y'}\right), \quad X \cap Y = \varnothing, \tag{5.8}$$

та $S_{y_1 \cup y_2} = 0$, $S_Y\left(\omega_X \middle| \omega_{Y'}\right) = 0$, якщо $\left|Y \setminus Y'\right| = 1$. Підставляючи це співвідношення в (4.3) та використовуючи (5.1), одержуємо

$$\pi(\omega_X \mid \omega_Y) = \Pi(\omega_X \mid \omega_Y) + e^{-\beta U(\omega_X)}\pi(\varnothing \mid \omega_Y) +$$
$$+ e^{-\beta U(\omega_x|\omega_{X\setminus x})} \sum_{Z'\subseteq Y} K(\omega_x|\omega_{Z'}) \times$$
$$\times \sum_{Y'\subset Y\setminus Z'} e^{-\beta U\left(\omega_{X\setminus x\cup Z'}\right)} S_{Y\setminus Z'}\left(\omega_{X\setminus x\cup Z'}\middle|\omega_{Y'}\right)\pi\left(\varnothing\middle|\omega_{Y\setminus(Z'\cup Y')}\right).$$

Тобто, для $Z\subseteq Y$, $X\bigcap Y=\varnothing$ маємо

$$S_Y(\omega_X|\omega_Z) = e^{\beta U(\omega_x|\omega_{X\setminus x})} \sum_{Y'\bigcup Z'=Z} K(\omega_x|\omega_{Z'})e^{-\beta U(\omega_{X\setminus x\cup Z'})} S_{Y\setminus Z'}\left(\omega_{X\setminus x\cup Z'}\middle|\omega_{Y'}\right). \tag{5.9}$$

Із рівностей (5.4) – (5.7) випливають співвідношення

$$S_{Y_3}\left(\omega_x\middle|\omega_y\right) = S_{Y_4}\left(\omega_x\middle|\omega_y\right) = K\left(\omega_x\middle|\omega_y\right),$$
$$S_{Y_4}\left(\omega_x\middle|\omega_{Y_2'}\right) = K\left(\omega_x\middle|\omega_{y_1'}\right)K\left(\omega_{y_1'}\middle|\omega_{y_2'}\right) + K\left(\omega_x\middle|\omega_{Y_2'}\right)e^{-\beta U(\omega_{Y_2'})},$$
$$S_{Y_3}\left(\omega_{X_2}\middle|\omega_y\right) = e^{-\beta U(\omega_{X_2\cup y})} - e^{-\beta U(\omega_{X_2})}.$$

Використовуючи (5.8), виводимо

$$\left(\pi' f\right)(\varphi_X) = \sum_{Y\subset X^c} \int P_{\varphi_X}(dw_X)\,P_0\left(dw_X^*\right)\int \Pi(\omega_X \mid \omega_Y)\,f\left(w_{X\bigcup Y}(t)\right)P(d\omega_Y). \tag{5.10}$$

Ця формула випливає з закону збереження ймовірності, формул

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\,\frac{n!}{j!(n-j)!} = 0, \qquad \int\pi\left(\varnothing\middle|\,\omega_{Y'}\right)f\left(w_{Z\bigcup Y'}(t)\right)P\left(d\omega_{Y'}\right) = 0$$

та того факту, що для функцій π у цій формулі число підмножин з $\left|Y'\right|=j$ дорівнює $\dfrac{n!}{j!(n-j)!}$.

6. Доведення теореми 1. КС рекурентні співвідношення (5.1), (5.2) важливі для доведення наступного твердження, що використовується при доведенні теореми 1.

Твердження 2. *Нехай виконуються умови теореми* 1 *та*

$$b(\omega) = \sum_{x=0}^{1}\left(\int\left|\phi_x(\omega,\omega')\right|^2 P(d\omega)\right)^{1/2}.$$

Тоді виконуються нерівності

$$\sum_{Y:|Y|=m}\int P(d\omega_Y)\left|\Pi(\omega_X \mid \omega_Y)\right| \le e^{|X|}(eB)^m \prod_{x\in X}(1+b(\omega_x)), \tag{6.1}$$

$$\sup_{X\in A}\sum_{Y\subset A':|Y|=m}\int P(d\omega_Y)\left|\Pi(\omega_X \mid \omega_Y)\right| \le e^{|X|}\left(eB_{A,A'}\right)^m \prod_{x\in X}(1+b(\omega_x)), \tag{6.2}$$

де

$$B = \operatorname*{ess\,sup}_{\omega}\sum_{y} b_y(\omega), \qquad B_{A,A'} = \operatorname{ess}\sup_{x\in A,\omega}\sum_{y\in A'} b_{x-y}(\omega),$$

$$b_y(\omega) = (1+b(\omega))^{-1}\int\left(1+b(\omega')\right)\left|e^{-\beta u_y(\omega,\omega')}-1\right|P(d\omega')\Big|$$

та підсумовування у виразі для B *ведеться по* $\mathbb{Z}^d$.

Доведення. Щоб одержати потрібні оцінки, необхідно оцінити

$$I(m,n) = \operatorname{ess}\sup_{\omega_{x\cup X'},|X'|=n-1} \sum_{Y,|Y|=m} \left|\Pi^Y\left(\omega_{x\cup X'}\right)\right|,$$

$$I_{\Lambda,\Lambda'}(m,n) = \operatorname{ess}\sup_{\omega_{x\cup X'},X\subset\Lambda,|X'|=n-1} \sum_{Y\subset\Lambda',|Y|=m} \left|\Pi^Y\left(\omega_{x\cup X'}\right)\right|,$$

де

$$\Pi^Y(\omega_X) = \prod_{x\in X}(1+b(\omega_x))^{-1}\int P(d\omega_Y)\,|\Pi(\omega_X\mid\omega_Y)|,$$

$$\Pi^{\varnothing}(\omega_X) = \prod_{x\in X}(1+b(\omega_x))^{-1}F_{\omega_X}(\varnothing).$$

Після інтегрування та зміни порядку підсумовування з (5.1) отримуємо

$$I(m,n) \le I(m,n-1) + \sup_{x,\omega_x}\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{Z,|Z|=m-k}\prod_{z\in Z} b_{x-z}(\omega_x)\,I(k,n-1+m-k) \le$$

$$\le I(m,n-1) + \sum_{l=1}^{m}\frac{B^l}{l!}I(m-l,n-1-l),$$

$$I_{\Lambda,\Lambda'}(m,n) \le I_{\Lambda,\Lambda'}(m,n-1) +$$

$$+ \sup_{x,\omega_x}\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{Z\in\Lambda',|Z|=m-k}\prod_{z\in Z} b_{x-z}(\omega_x)\,I_{\Lambda,\Lambda'}(k,n-1+m-k) \le$$

$$\le I_{\Lambda,\Lambda'}(m,n-1) + \sum_{l=1}^{m}\frac{B^l_{\Lambda,\Lambda'}}{l!}I_{\Lambda,\Lambda'}(m-l,n-1-l).$$

Тут потрібно зробити зміну порядку підсумовування:

$$\sum_{Y\subset\Lambda'}\sum_{Z\subseteq Y} = \sum_{Z\subset\Lambda'}\sum_{Y\setminus Z\subset\Lambda'}.$$

З рівностей $I(1,0)=0$, $I(0,1)=1$ за індукцією легко вивести для будь-якого a нерівність $I(m,n)\le a^n\left(e^{aB}a^{-1}\right)^{m+n}$. В результаті для $a=B^{-1}$ маємо

$$I(m,n)\le(eB)^m e^n. \tag{6.3}$$

Оцінка (6.2) отримується таким самим чином. Очевидно, $B=B_{\Lambda,\Lambda'}$, $\Lambda'=\mathbb{Z}^d$.

Тепер, використовуючи рівність (a — комплексне число)

$$e^a - 1 = e^{i\operatorname{Im}a}\left(e^{\operatorname{Re}a}-1\right) + \left(e^{i\operatorname{Im}a}-1\right)$$

та нерівність $\left|e^{i\operatorname{Im}a}-1\right|\le|\operatorname{Im}a|$, отримуємо

$$b_x(\omega) = (1+b(\omega))^{-1}\int\left(1+b(\omega')\right)\left[\left|e^{-\beta\operatorname{Re}u_x(\omega,\omega')}-1\right| + \beta\left|\operatorname{Im}u_x(\omega,\omega')\right|\right]P(\omega').$$

З визначення b та нерівності Шварца випливає

$$(1+b(\omega))^{-1}\beta\int\left(1+b(\omega')\right)\left|\operatorname{Im}u_x(\omega,\omega')\right|P(\omega') \le$$

$$\le (1+b(\omega))^{-1}\beta\left(|J_0(|x|)|+|J_1(|x|)|\right)\times$$

$$\times \left(\int (1+b(\omega''))^2 P(d\omega'')\right)^{1/2} \sum_{s=0,1} \left(\int |\phi_s(\omega,\omega')|^2 P(d\omega')\right)^{1/2} =$$

$$= (1+b(\omega))^{-1} \beta \left(|J_0(|x|)| + |J_1(|x|)|\right) b(\omega) \left(\int \left(1+b(\omega'')^2 P(d\omega'')\right)\right)^{1/2} \le$$

$$\le \beta \left(|J_0(|x|)| + |J_1(|x|)|\right) \left(\int (1+b(\omega''))^2 P(d\omega'')\right)^{1/2}.$$

Неважко переконатися, що

$$\beta\, |\mathrm{Re}\, u_x(\omega_x, \omega)| \le \left(|J_0(|x|)| + |J_1(|x|)|\right)(\beta + t).$$

З останньої нерівності та нерівності $\left|e^a - 1\right| \le |a| e^{|a|}$ одержуємо таку нерівність для b_x:

$$b_x(\omega) \le 2\left(|J_0(|x|)| + |J_1(|x|)|\right)(\beta + t) e^{\bar{J}(\beta+t)} \left(\int (1+b(\omega''))^2 P(d\omega'')\right)^{1/2}. \quad (6.4)$$

З визначення b, нерівності $(a+b)^2 \le 2\left(a^2 + b^2\right)$ та нерівності Шварца маємо

$$\int (1+b(\omega))^2 P(d\omega) \le 2 \int P(d\omega) + 4 \int \sum_{s=0,1} \int |\phi_s(\omega,\omega')|^2 P(d\omega) P(d\omega') =$$

$$= 2 \int d\varphi\, P_\varphi(dw) + 4 \sum_{s=0,1} \int d\varphi\, P_\varphi(dw)\, d\varphi'\, P_{\varphi'}(dw') \int |\phi_s(\omega,\omega')|^2 P_0(dw^*) P_0(dw'^*).$$

З цієї нерівності та рівностей

$$\int \left(\int_0^{t\beta^{-1}} f(\tau)\, dw^*(\tau) \right)^2 P_0(dw^*) = \int_0^{t\beta^{-1}} f^2(\tau), \qquad \int P_0(dw^*) = 1,$$

випливає $\left(f(\tau) = \sin\left(w(\tau) - (-1)^s w'(\tau)\right),\ s = 0, 1\right)$

$$\int |\phi_s(\omega,\omega')|^2 P_0(dw^*) P_0(dw'^*) \le t\beta^{-1}.$$

Тоді з рівності $\int d\varphi\, P_\varphi(dw) = 2\pi$ одержуємо

$$\left(\int \left(1+b(\omega'')\right)^2 P(d\omega'')\right)^{1/2} \le 4\pi\left(1 + t\beta^{-1}\right)^{1/2}, \quad (6.5)$$

$$B_{A,A'} \le 8\pi \bar{J}_{A,A'} \beta \left(1 + t\beta^{-1}\right)^{3/2} e^{\bar{J}\beta\left(1+t\beta^{-1}\right)}, \quad \bar{J}_{A,A'} = \sup_{x\in A} \sum_{y\in A'} J(|x-y|) \quad (6.6)$$

та $\bar{J} = \bar{J}_{A,A'}$, $A' = \mathbb{Z}^d$. Підставляючи ці оцінки в (5.1), виводимо

$$\int \left| \left(\pi^t f\right)(\varphi_X) \right| d\varphi_X \le \sum_Y \xi^{|X|+|Y|} \int P(dw_X) \int |\Pi(\omega_X | \omega_Y)| P(d\omega_Y) \| f \|_\xi \le$$

$$\le \xi^{|X|} \left(\int P(dw)(1+b(\omega))\right)^{|X|} \sum_{m\ge 0} \xi^m I(m, |X|) \| f \|_\xi \le$$

$$\le \xi^{|X|} \left(\int P(dw)(1+b(\omega))\right)^{|X|} \left(1 - e\xi\bar{B}\right)^{-1} \| f \|_\xi.$$

Отже,

$$\int \left| \left(\pi^t f\right)(\varphi_X) \right| d\varphi_X \le \left(1 - e\xi\bar{B}\right)^{-1} \left(4\pi\xi\left(1 + t\beta^{-1}\right)^{1/2}\right)^{|x|} \| f \|_\xi. \quad (6.7)$$

Тепер доведемо рівність (1.12). Для цього покладемо $A \subset \Lambda' \subset \Lambda$. Тоді

$$\left\|\chi_A \pi^t\left(F - F^\Lambda\right)\right\|_{\xi(t)} \le \left\|\chi_A \pi^t (1-\chi_\Lambda) F\right\|_{\xi(t)} + \left\|\chi_A \pi^t\left(\chi_\Lambda F - F^\Lambda\right)\right\|_{\xi(t)} \le$$
$$\le \left\|\chi_A \pi^t (1-\chi_\Lambda) F\right\|_{\xi(t)} + \left\|\chi_A \pi^t\left(1-\chi_{\Lambda'}\right)\left(\chi_\Lambda F - F^\Lambda\right)\right\|_{\xi(t)} +$$
$$+ \left\|\chi_A \pi^t \chi_{\Lambda'}\left(\chi_\Lambda F - F^\Lambda\right)\right\|_{\xi(t)}. \tag{6.8}$$

Для першого доданка правої частини цієї нерівності з (6.2) виведемо

$$\int\left|\left(\chi_A \pi^t (1-\chi_\Lambda) F\right)(\varphi_X)\right| d\varphi_X = \left|\sum_{Y \subset \Lambda^c} \int \chi_A(X)\left(\pi_Y^t F\right)(\varphi_X) d\varphi_X\right| \le$$
$$\le \sum_{Y \subset \Lambda^c} \xi^{|X|+|Y|} \int P(dw_X) \int \chi_A(X) \Pi(\omega_X | \omega_Y) P(dw_Y) \| F \|_\xi \le$$
$$\le \xi^{|X|}\left(\int P(dw)(1+b(\omega))\right)^{|X|} \sum_{m \ge 1} \xi^m I_{A, A'}(m, |X|) \| F \|_\xi \le$$
$$\le e\xi^{|X|+1} B_{A, \Lambda^c}\left(\int (dw) P(dw)(1+b(\omega))\right)^{|X|}\left(1 - e\xi \overline{B}\right)^{-1} \| F \|_\xi .$$

Таким чином,

$$\left\|\chi_A \pi^t (1-\chi_\Lambda) F\right\|_{\xi(t)} \le e\xi B_{A, \Lambda^c}\left(1 - e\xi \overline{B}\right)^{-1} \| F \|_\xi \le J^+(\lambda) e\xi\left(1 - e\xi \overline{B}\right)^{-1} \| F \|_\xi, \tag{6.9}$$

де $J^+(r) = \sum_{|x| \ge r} J(|x|)$.

Для другого доданка в (6.8) отримуємо

$$\left\|\chi_A \pi^t\left(1-\chi_{\Lambda'}\right)\left(\chi_\Lambda F - F^\Lambda\right)\right\|_{\xi(t)} \le e\xi B_{A, \Lambda'^c}\left(1 - e\xi \overline{B}\right)^{-1}\left(\| F \|_\xi + \left\| F^\Lambda \right\|_\xi\right) \le$$
$$\le J^+(2^{-1}\lambda) e\xi\left(1 - e\xi \overline{B}\right)^{-1}\left(\| F \|_\xi + \sup_\Lambda \left\| F^\Lambda \right\|_\xi\right),$$

де $\lambda = 2 \operatorname{dist}\left\{A, \Lambda'^c\right\}$.

Для третього доданка в (6.8) справджується нерівність

$$\left\|\chi_A \pi^t \chi_{A'}\left(\chi_\Lambda F - F^\Lambda\right)\right\|_{\xi(t)} \le \left(1 - e\xi \overline{B}\right)^{-1}\left\|\chi_{\Lambda'}\left(\chi_\Lambda F - F^\Lambda\right)\right\|_\xi \le$$
$$\le \left(1 - e\xi \overline{B}\right)^{-1} \varepsilon\left(2^{-1}\lambda\right),$$

де $\lambda = 2 \operatorname{dist}\left\{\Lambda', \Lambda^c\right\}$. А тепер, підставляючи ці оцінки в (6.8), отримуємо потрібну нерівність та

$$\varepsilon_t(\lambda) = \left(1 - e\xi \overline{B}\right)^{-1}(e\xi + 1)\left[\left(J^+\left(2^{-1}\lambda\right) + J^+(\lambda)\right)\left(\| F \|_\xi + \sup_\Lambda \left\| F^\Lambda \right\|_\xi\right) + \varepsilon\left(2^{-1}\lambda\right)\right]. \tag{6.10}$$

Неважко довести, що $\sup_\Lambda \left\| F^\Lambda \right\|_\xi < \infty$. Дійсно, з (1.11) випливає, що $\left\|\chi_{\Lambda'} F^\Lambda\right\|_\xi$ збігається до $\| F \|_\xi$. Якщо припустити, що $\sup_\Lambda \left\| F^\Lambda \right\|_\xi = \infty$, то робимо висновок, що $\left\|\chi_{\Lambda''} F^\Lambda\right\|_\xi$ необмежено зростає, якщо Λ'' необмежено розширюється разом з Λ. Але це суперечить припущенню при $\Lambda'' = \Lambda'$. Теорему доведено.

7. Доведення наслідків. Ми повинні довести напівгрупову властивість $\pi^{t_1+t_2}F = \pi^{t_1}\pi^{t_2}F$, $F \in \mathbb{E}_\xi$, при умові, що $\xi(t_1)\overline{B}(t_2) < 1$, $t_1 + t_2 = t$. Ця умова для $t_1 = 0$ сильніша, ніж умова $\xi\overline{B}(t) < 1$, тому що $\xi(0) > \xi$. Попередня умова буде виконуватись, якщо $\xi(t)\overline{B}(t) < 1$.

Ми почнемо доведення з рівності

$$\left(\pi^{t_1+t_2} - \pi^{t_1}\pi^{t_2}\right)F = \left(\pi^{t_1+t_2} - \pi^{t_1+t_2}\chi_\Lambda\right)F + \left(\pi^{t_1+t_2}\chi_\Lambda - \pi^{t_1}\pi^{t_2}\right)F.$$

Нехай множини A, Λ' ті ж, що і в попередньому пункті. Тепер ми доведемо, що $\left\|\chi_A\left(\pi^{t_1+t_2} - \pi^{t_1}\pi^{t_2}\right)F\right\|_{\xi_1(t)} = 0$, де $\xi_1(t) = 4\left(1 + t\beta^{-1}\right)\xi$. Це означає, по суті, напівгрупову властивість

$$\left(\pi^{t_1+t_2}F\right)(X, \varphi_X) = \left(\pi^{t_1}\pi^{t_2}F\right)(X, \varphi_X).$$

Беручи до уваги (6.9), отримуємо

$$\left\|\chi_A\left(\pi^{t_1+t_2} - \pi^{t_1}\pi^{t_2}\right)F\right\|_{\xi_1(t)} \le$$

$$\le e\xi\left(1 - e\xi\overline{B}(t)\right)^{-1} J^+(\lambda)\|F\|_\xi + \left\|\chi_A\left(\pi^{t_1}\pi^{t_2}\chi_\Lambda - \pi^{t_1}\pi^{t_2}\right)F\right\|_{\xi_1(t)}. \tag{7.1}$$

Тут ми використали рівність $\pi^{t}\pi^{t_2}\chi_\Lambda = \pi^{t_1+t_2}\chi_\Lambda$ та нерівність $\|F\|_{\xi_1} \le \|F\|_{\xi_2}$, $\xi_1 > \xi_2$, $\xi_1(t) > \xi(t)$.

Підставимо тепер оператор $\chi_{\Lambda'}$ з різними знаками перед оператором π^{t_1}, використаємо нерівність $\xi_1(t) \ge 2\sqrt{1 + t_1\beta^{-1}}\,\xi(t_2)$, (1.10) та (6.9):

$$\left\|\chi_A\left(\pi^{t_1}\pi^{t_2}\chi_\Lambda - \pi^{t_1}\pi^{t_2}\right)F\right\|_{\xi_1(t)} =$$

$$= \left\|\chi_A\left(\pi^{t_1}\chi_{\Lambda'}\left(\pi^{t_2}\chi_\Lambda - \pi^{t_2}\right)\right)F\right\|_{\xi_1(t)} + \left\|\chi_A\left(\pi^{t_1}(1 - \chi_{\Lambda'})\left(\pi^{t_2}\chi_\Lambda - \pi^{t_2}\right)\right)F\right\|_{\xi_1(t)} \le$$

$$\le \left(1 - e\xi(t_2)\overline{B}(t_1)\right)^{-1}\left[\left\|\chi_{\Lambda'}\left(\pi^{t_2}\chi_\Lambda - \pi^{t_2}\right)F\right\|_{\xi(t_2)} + \right.$$

$$\left. + e\xi(t_2)J^+\left(2^{-1}\lambda\right)\left\|\left(\pi^{t_2}\chi_\Lambda - \pi^{t_2}\right)F\right\|_{\xi(t_2)}\right] \le$$

$$\le 2J^+\left(2^{-1}\lambda\right)\left[\left(1 - e\xi\overline{B}(t_2)\right)^{-1} + 2e\xi(t_2)\left(1 - e\xi(t_2)\overline{B}(t_1)\right)^{-1}\right]\|F\|_\xi.$$

Підставляючи цю оцінку в (7.1) та спрямовуючи λ до нескінченності, ми робимо висновок, що напівгрупова властивість справджується.

Для гіббсівських кореляційних функцій ρ, ρ^Λ виконується співвідношення (1.11) [3, 4]. Тоді рівність $\pi^t\rho^\Lambda = \pi^t_\Lambda\rho^\Lambda = \rho^\Lambda$ та (1.12) означають, що послідовність гіббсівських кореляційних функцій є стаціонарним вектором еволюційного оператора.

Застосовуючи ФК формулу для розв'язку ρ^0_c рівняння Смолуховського (1.1) для локально збуреного гіббсівського розподілу та використовуючи інваріантність гіббсівського розподілу, отримуємо оцінку

$$\rho^0_c(\varphi_X; t) \le e^{\bar{J}_c\sum_s|C_J|^s}e^{-\beta U(\varphi_X)}. \tag{7.2}$$

В результаті маємо

$$\begin{aligned}\rho^\Lambda_c(\varphi_X; t) &\le e^{\beta\bar{J}_c\sum_s|C_J|^s}\,\Xi_\Lambda\,\Xi^{-1}_{c\Lambda}\,\rho^\Lambda(\varphi_X),\\ \rho_c(\varphi_X; t) &\le e^{\beta\bar{J}_c\sum_s|C_J|^s}\,\Xi^{-1}(C_J)\rho(\varphi_X),\end{aligned} \tag{7.3}$$

де ρ^{Λ} — гіббсівські кореляційні функції з потенціальною енергією U та Ξ_{Λ} — відповідна статистична сума;

$$\Xi(C_J) = \int e^{-\beta U_c(\varphi_{C_J})} \rho\left(\varphi_{C_J}\right) d\varphi_{C_J}.$$

Це означає, що обидві послідовності ρ, $\rho_{(c)t}$, $\rho_{(c)t}(\varphi_X) = \rho_{(c)}(\varphi_X; t)$, належать до $\mathbb{E}_{\xi}$.

Тепер нехай для ξ, β задана величина $\xi \overline{B}\left(t = \beta^{-1}\right) < 1$. Покладемо $t = \beta N + \alpha\beta$, $\alpha < 1$. Тоді з апріорної оцінки (7.3) випливає

$$\pi^t \rho_c = \left(\pi^{\beta}\right)^N \pi^{\beta_\alpha} \rho_c \in \mathbb{E}_{\xi}.$$

Враховуючи (1.12), ми доводимо, що цей вектор збігається з границею $\pi^t \rho_c^{\Lambda}$, припускаючи, що $\pi^{t-\beta} \rho_c \in \mathbb{E}_{\xi}$:

$$\left\| \chi_A \left(\pi^{\beta} \rho_{(c)t-\beta} - \pi_{\Lambda}^{\beta} \rho_{(c)t-\beta}^{\Lambda}\right) \right\|_{\xi(\beta)} =$$

$$= \left\| \chi_A \pi^{\beta} \left(\rho_{(c)t-\beta} - \rho_{(c)t-\beta}^{\Lambda}\right) \right\|_{\xi(\beta)} \le \varepsilon_{\beta}(\lambda) \left\| \rho_{(c)t-\beta} \right\|_{\xi}.$$

Ця нерівність означає, що границя досягається на кожній компоненті послідовності.

Тепер доведемо наслідок 2. Послідовність ρ^{Λ} фінітна та згідно з твердженням 1 послідовність $\rho^{\Lambda}(\varphi_X; t)$ задовольняє скінченну дифузійну ієрархію. Помноживши (1.5) на функцію f та інтегруючи отримане рівняння, виводимо

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho^{\Lambda}(\varphi_X; t) f(\varphi_X) d\varphi_X =$$

$$= \int \sum_{x \in X} \left[\beta^{-1} \partial_x^2 f(\varphi_X) - (\partial_x f)(\varphi_X)(\partial_x U)(\varphi_X)\right] \rho^{\Lambda}(\varphi_X; t) d\varphi_X -$$

$$- \sum_{x \in X} \sum_{y \in \Lambda \setminus X} \int \left(\partial_x u_{x-y}\right)(\varphi_x, \varphi_y)(\partial_x f)(\varphi_X) \rho^{\Lambda}(\varphi_{X \cup y}; t) d\varphi_{X \cup y}. \tag{7.4}$$

Тут ми переставили операції диференціювання за часом та інтегрування, тому що похідні за часом ρ^0 рівномірно обмежені (див. лему 1).

Перший доданок у правій частині збігається до границі на підставі (1.11), (1.12).

А зараз ми повинні довести, що інтеграл

$$\sum_{y \in \Lambda \setminus X} \int \left(\partial_x u_{x-y}\right)(\varphi_x, \varphi_y)(\partial_x f)(\varphi_X) \left|\rho^{\Lambda}(\varphi_{X \cup y}; t) - \rho(\varphi_{X \cup y}; t)\right| d\varphi_{X \cup y}$$

прямує до нуля. Для цього подамо суму по y як суму по множині $y \in \Lambda'$ (множина визначена у теоремі) та по її доповненню Λ'^c. Друга сума збігається до нуля на підставі (1.11), (1.12). Отже, $\left|\partial_x u_{x-y}\right| \le 2J(|x-y|)$ та

$$\sum_{y \in \Lambda' \setminus X} \int \left(\partial_x u_{x-y}\right)(\varphi_x, \varphi_y)(\partial_x f)(\varphi_X) \left|\rho^{\Lambda}(\varphi_{X \cup y}; t) - \rho(\varphi_{X \cup y}; t)\right| d\varphi_{X \cup y} \le$$

$$\le 2\varepsilon_t\left(2^{-1}\lambda\right) \|\rho\|_{\xi(t)} \xi^{|X|+1}(t) \|J\|_1.$$

Перший доданок збігається до нуля, тому що X належить до компакту C_J, а $\lambda' = \operatorname{dist}\left\{C_J, \Lambda^c\right\}$ прямує до нескінченності:

$$\sum_{y\in\Lambda^c}\int\left(\partial_x u_{x-y}\right)(\varphi_x,\varphi_y)(\partial_x f)(\varphi_X)\left|\rho^\Lambda(\varphi_{X\cup y};t)-\rho(\varphi_{X\cup y};t)\right|d\varphi_{X\cup y}\le$$

$$\le 2\left(\left\|\rho^\Lambda\right\|_{\xi(t)}+\|\rho\|_{\xi(t)}\right)\xi^{|X|+1}(t)\chi_{C_J}(x)\sum_{y\in\Lambda^c}J(|x-y|)\le$$

$$\le 2\left(\left\|\rho^\Lambda\right\|_{\xi(t)}+\|\rho\|_{\xi(t)}\right)\xi^{|X|+1}(t)J^+(\lambda').$$

Доведення наслідків завершує наступна лема.

Лема 1. *Для класичного розв'язку задачі Коші для d-вимірного рівняння теплопровідності на $(\times[0,2\pi])^d$ з граничними періодичними умовами*

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}=\Delta f(x,t)+V(x)f(x,t),\qquad f(x,0)=f_0(x),\quad \Delta=\sum_{\nu=1}^d\partial_\nu^2,\tag{7.5}$$

та потенціалом V, який є дійсною неперервно диференційовною періодичною функцією з періодом 2π, справджуються оцінки

$$\left\|\partial_{\nu_1}f(t)\right\|_0\le 4e^{t\|V\|_0}\sqrt{t^{-1}}\,\|f_0\|_0,\tag{7.6}$$

$$\left\|\partial_{\nu_2}\partial_{\nu_1}f(t)\right\|_0\le 2e^{t\|V\|_1}\left(t^{-1}+\sqrt{t^{-1}}\right)\|f_0\|_0,\tag{7.7}$$

де

$$\|f_0\|_0=\sup|f(x)|,\qquad \|V\|_1=\|V\|_0+\|\partial V\|_0,$$

$$\|V\|_0=\operatorname{ess\,sup}|V(x)|,\qquad \|\partial V\|_0=\max_\nu\|\partial_\nu V\|_0.$$

Доведення. Розв'язок (6.10) має вигляд [5]

$$f(x,t)=\int P^t(x,y)f(y,t)\,dy,$$

$$P^t(x,y)=P_0^t(x-y)+\int_0^t\int P_0^\tau(x-y')V(y')P^{t-\tau}(y',y)\,d\tau\,dy',\tag{7.8}$$

де інтегрування ведеться по $(\times[0,2\pi])^d$ та $P_0^t(x)$ — напівгрупа, визначена ядром, яке є фундаментальним розв'язком рівняння теплопровідності при $V=0$:

$$P_0^t(x)=\prod_{\nu=1}^d\sum_{|n_\nu|\ge 0}P_0^t(x_\nu-2\pi n_\nu),\qquad P_0^t(x_\nu)=\left(\sqrt{4t\pi}\right)^{-1}\exp\left\{-\frac{x_\nu^2}{4t}\right\}.$$

Розв'язок (7.8) знаходиться за ітераційним методом [5]:

$$P^t(x,y)=\sum_{n\ge 0}P_n^t(x,y),$$

$$P_{n+1}^t(x,y)=\int_0^t\int P_0^\tau(x-y')V(y')P_n^{t-\tau}(y',y)\,d\tau\,dy.$$

В результаті

$$f(x,t)=\sum_{n\ge 0}f_{(n)}(x,t),$$

$$f_{(n+1)}(x,t) = \int_0^t \int P_0^{\tau}(x-y)V(y)f_{(n)}(y,t-\tau)\,d\tau\,dy, \quad f_{(0)}(t) = \int P_0^t(x-y)f_{(0)}(y)\,dy. \tag{7.9}$$

Легко бачити, враховуючи визначення вінерівської міри, що

$$f(x,t) = \int P_x(dw)\exp\left\{\int_0^t V(w(\tau))\,d\tau\right\} f_0(w(\tau))$$

та

$$f_{(n)}(x,t) = \int P_x(dw)\exp\left(\int_0^t V(w(\tau))\,d\tau\right)^n f_0(w(t)).$$

За індукцією ми одразу виводимо оцінку

$$\left\| f_{(n)}(t)\right\| \le \frac{(t\|V\|_0)^n}{n!}\|f_0\|_0. \tag{7.10}$$

А зараз за допомогою (7.9), (7.10) ми покажемо, що

$$\left\|\partial_{\nu_1} f_{(n)}(t)\right\|_0 \le 4\,\frac{(t\|V\|_0)^n}{n!}\sqrt{t^{-1}}. \tag{7.11}$$

З (7.9) виводимо

$$\partial_{\nu_1} f_{(n+1)}(x,t) = \int_0^t \int \left(\partial_{\nu_1} P_0^{\tau}\right)(x-y)V(y)f_{(n)}(y,t-\tau)\,d\tau\,dy. \tag{7.12}$$

При цьому ми використали те, що функції набувають однакових значень на кінцях інтервалу $[0,2\pi]$.

Тому на підставі (7.10) маємо

$$\left\|\partial_{\nu_1} f_{(n+1)}\right\|_{(i)_s} \le \frac{(\|V\|_0)^{n+1}}{n!}\int_0^t (t-\tau)^n d\tau \int \left|\left(\partial_{\nu_1} P_0^{\tau}\right)(x-y)\right| dy.$$

Крім того,

$$\left(\partial_{\nu_1} P_0^{\tau}\right)(x-y) = -\left[\sum_{|n|\ge 0}(2\tau)^{-1}\left(x_{\nu_1}-y_{\nu_1}+2\pi n\right)P_0^{\tau}\left(x_{\nu_1}-y_{\nu_1}+2\pi n\right)\right]\times$$
$$\times\, P_0^{\tau}\left(y_1,\ldots,y_{\nu_1-1},y_{\nu_1+1},\ldots,y_d\right).$$

З того, що

$$(2t)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}|y|\,P_0^t(y)\,dy = \left(4\sqrt{t\pi}\right)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/4}|y|\,dy \le \left(\sqrt{t}\right)^{-1}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} P_0^t(y)\,dy = 1,$$

випливає

$$\left\|\partial_{\nu_1} f_{(n+1)}\right\|_{(i)_s} \le \left(\sqrt{t}\right)^{-1} 4\,\frac{(t\|V\|_0)^{n+1}}{(n+1)!}\left(\sqrt{2}\,2\right)^{-1}(n+1)\int_0^1 \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}}(1-\tau)^n.$$

Тут ми змінили масштаб множниками $2\sqrt{\tau}$ та t відповідно змінних y та τ, а також використали рівність

$$\sum_{|n|\ge 0}\int_0^{2\pi} g(x-y+2\pi n)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\,dy, \quad g\in L^1(-\infty,\infty).$$

Подамо тепер інтеграл в останній нерівності як суму інтегралів по інтервалах $[0, 2^{-1}]$, $[2^{-1}, 1]$. Перший інтеграл не перевищує $\sqrt{2}\,(n+1)^{-1}$, тому що $(1-\tau)^n \le 2^{-n}$ та

$$(n+1)(1-\tau)^n \le (n+1)2^{-n} \le 1,$$

$$\int\limits_0^{1/2} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} = \sqrt{2}.$$

Для другого інтеграла маємо

$$\sqrt{2} \int\limits_{1/2}^{1} (1-\tau)^n \, d\tau = \sqrt{2}\,(n+1)^{-1} 2^{-(n+1)} < \sqrt{2}\,(n+1)^{-1}.$$

Отже, сума цих двох інтегралів не перевищує $(n+1)^{-1} 2\sqrt{2}$, і нерівність (7.11) доведено.

Тепер за допомогою отриманих оцінок ми доведемо нерівність

$$\left\| \partial_{\nu_1} \partial_{\nu_2} f_{n+1}(t) \right\| \le 2 \frac{\left(t \| V \|_1\right)^{n+1}}{(n+1)!} \left(t^{-1} + \sqrt{t^{-1}}\right) \| f_0 \|_0, \quad n \ge 0. \tag{7.13}$$

З (7.11) випливає рівність

$$\partial_{\nu_2} \partial_{\nu_1} f_{(n+1)}(x, t) = \int\limits_0^t d\tau \int \left(\partial_{\nu_1} P_0^{\tau}\right)(x-y) \left(\partial_{\nu_2} V(y) f_{(n)}\right)(y, t-\tau) \, d\tau \, dy.$$

Отже,

$$\left\| \partial_{\nu_1} \partial_{\nu_2} f_{(n+1)}(t) \right\| \le$$

$$\le \int\limits_0^t d\tau \int \left| \left(\partial_{\nu_1} P_0^{\tau}\right)(x_{\nu_1} - y_{\nu_1}) \right| \left[\| V \|_0 \left\| \partial_{\nu_2} f_{(n)}(t-\tau) \right\|_0 + \| \partial V \|_0 \left\| f_{(n)}(t-\tau) \right\|_0 \right].$$

В результаті маємо

$$\partial_{\nu_2} \partial_{\nu_1} f_{(n+1)}(t) \le 2 \frac{\left(t \| V \|_1\right)^{n+1}}{(n+1)!} \int\limits_0^1 \frac{d\tau}{2\sqrt{\tau}} \left[(n+1) \left(\sqrt{t^{-1}(1-\tau)^{-1}} + t^{-1} \right) (1-\tau)^n \right] \| f_0 \|.$$

Співвідношення (7.13) є наслідком оцінок інтеграла, який розкладається на два інтеграли по інтервалах $[0, 1/2]$, $[1/2, 1]$, і оцінюється аналогічно попередньому міркуванню:

$$\int\limits_0^{1/2} \frac{d\tau}{2\sqrt{\tau}} (1-\tau)^{n-1/2} \le \int\limits_0^{1/2} \frac{d\tau}{2\sqrt{\tau}} 2^{-n+1/2} \le (n+1)^{-1} \sqrt{2} \int\limits_0^{1/2} \frac{d\tau}{2\sqrt{\tau}} = (n+1)^{-1},$$

$$\int\limits_{1/2}^{1} \frac{d\tau}{2\sqrt{\tau}} (1-\tau)^{n-1/2} \le 2^{-1} \sqrt{2} \int\limits_{1/2}^{1} d\tau (1-\tau)^{n-1/2} =$$

$$= 2^{-1} \sqrt{2} \left(n + \frac{1}{2} \right)^{-1} 2^{-n+1/2} \le (n+1)^{-1}.$$

Отже, (7.13) виконується.

Нам залишається оцінити норму $f_{(0)}$, зазначену в лемі. Вона випливає з рівності для $\nu_1 \le d$:

$$\partial_{\nu_1} f_0(x, t) = \int \left(\partial_{\nu_1} P_0^t\right)(x-y) f_0(y) \, dy.$$

Далі, використовуючи попередні міркування, одержуємо

$$\left\|\partial_{\nu_1} f_0(t)\right\|_0 \leq \sqrt{t^{-1}} \| f_0 \|_0.$$

Для $\nu_1 \neq \nu_2$ так само отримуємо

$$\left\|\partial_{\nu_1}\partial_{\nu_2} f_0(x,t)\right\|_0 \leq t^{-1} \| f_0 \|_0.$$

Для $\nu_1 = \nu_2$ має місце рівність

$$\partial^2_{\nu_1} f_0(x,t) = \int \left(\partial^2_{\nu_1} P_0^t\right)(x-y) f_0(y)\, dy.$$

Отже,

$$\left\|\partial^2_{\nu_1} f_0(t)\right\|_0 \leq \left[(2t)^{-1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} P_0^t(y)\, dy + (2t)^{-2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |y|^2 P_0^t(y)\, dy\right] \| f_0 \|_0 =$$

$$= (2t)^{-1}\left[1 + 2^{-2}\pi^{-1/2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-y^2/4}\, dy\right] \| f_0 \|_0.$$

З рівності $\int y^2 e^{-y^2}\, dy = \sqrt{\pi}/2$ отримуємо

$$\left\|\partial_{\nu_1}\partial_{\nu_2} f_0(t)\right\|_0 \leq t^{-1} \| f_0 \|_0.$$

Диференціюючи функцію $f(t) = \sum_{n \geq 0} f_{(n)}(t)$, підставляючи (7.11), (7.13), а також останні оцінки в отриманий після диференціювання вираз, доводимо (7.6), (7.7).

1. *Albeverio S., Kondratiev Yu. G., Rocknen M.* Uniqueness of the stochastic dynamics for continuous spin systems on a lattice. – Inst. fur Math. – Ruhr-Universitat-Bohum, April, 1994. – (Preprint № 219. SFB 237).
2. *Albeverio S., Daletskii A., Kondratiev Yu. G.* A stochastic differential equation approach to lattice spin models with values in compact Lie group. – Inst. fur Math. – Ruhr-Universitat-Bohum, April, 1996. – (Preprint № 319. SFB 237).
3. *Gruber C., Kunz H.* General properties of polymer systems // Communs Math. Phys. – 1971. – **22**. – P. 133 – 161.
4. *Kunz H.* Analiticity and clustering properties of unbounded spin systems // Ibid. – 1978. – **59**. – P. 53 – 69.
5. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. – М.: Мир, 1972. – 740 с.
6. *Скрипник В. И.* Диффузия Смолуховского в бесконечной системе при малой плотности. Эволюция на конечном временном промежутке // Теор. и мат. физика. – 1986. – **69**, № 1. – С. 128 – 141.
7. *Скрипник В. И.* Эволюционный оператор градиентной диффузионной иерархии Боголюбова в пределе среднего поля // Там же. – 1988. – **79**, № 1. – С. 127.
8. *Петрина Д. Я., Герасименко В. И., Малышев П. В.* Математические основы классической статистической механики. – Киев: Наук. думка, 1990. – 264 с.
9. *Cerciniani, Petrina D. Ya., Gerasimenko V. I.* Many-particle dynamics and kinetic equations. – Dordrecht: Kluver Acad. Publ., 1997. – 252 p.
10. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов. – М.: Наука, 1971. – Т. 1. – 664 с.

Одержано 30.05.2001