УДК 519.41/47

Н. С. Черников (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ФАКТОРИЗАЦИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ЛОКАЛЬНО РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП ЛОКАЛЬНО НИЛЬПОТЕНТНЫМИ И НИЛЬПОТЕНТНЫМИ ПОДГРУППАМИ

We obtain a number of new results on periodic locally solvable and finite solvable groups $G = AB$ with locally nilpotent or nilpotent subgroups A and B.

Одержано ряд нових результатів про періодичні локально розв'язні та скінченні розв'язні групи $G = AB$ із локально нільпотентними або нільпотентними підгрупами A і B.

В настоящей работе продолжены исследования автора [1–4] периодических локально разрешимых групп, факторизуемых двумя локально нильпотентными подгруппами, и конечных разрешимых групп, факторизуемых двумя нильпотентными подгруппами. Основными результатами являются теоремы А – Е. Их доказательствам предпослан ряд представляющих самостоятельный интерес предложений. Среди них особо выделим теоремы 1–3.

Обозначения: $[r]$ — целая часть действительного числа r; $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^+$ и $\mathbb{P}$ — множества соответственно всех натуральных, целых неотрицательных и простых чисел; Π и $\times$ — знаки произведения и прямого произведения; $\hookrightarrow$ — знак вложения. Пусть G — группа и $X, Y \subseteq G$. Записи $X \leq G$ $(X < G)$ и $X \trianglelefteq G$ $(X \triangleleft \triangleleft G)$ означают, что X — соответственно (истинная) подгруппа и инвариантная (истинная) подгруппа группы G. Если $X, Y \neq \varnothing$, то $X^Y = \{x^y \mid x \in X, y \in Y\}$ и $[X, Y] = \langle [x, y] \mid x \in X, y \in Y \rangle$. Для $p \in \mathbb{P}$ и $\pi \subseteq \mathbb{P}$ G_p и G_π — силовские соответственно p- и π-подгруппы группы G. $\Phi(G)$ — подгруппа Фраттини группы G; $F(G)$ — локально нильпотентный радикал группы G (в случае, когда G конечна, $F(G)$ превращается в ее подгруппу Фиттинга); $F^*(G)$ — локально нильпотентный корадикал G; $G_0 = 1$ и для порядковых $\alpha > 0$ полагается индуктивно: если α непредельное, то $F_\alpha(G)/F_{\alpha-1}(G) = F(G/F_{\alpha-1}(G))$, если α предельное, то $F_\alpha(G) = \bigcup_{\beta < \alpha} F_\beta(G)$. Напомним, что группа G радикальна (в смысле Б. И. Плоткина), если она имеет возрастающий инвариантный ряд с локально нильпотентными факторами или, что равносильно, для некоторого γ $G = F_\gamma(G)$. Наименьшее такое γ обозначаем через $l_{\mathfrak{N}}(G)$ (если G конечна, то $l_{\mathfrak{N}}(G) \in \mathbb{N}^+$) $d(G)$ и $c(G)$ — ступени разрешимости и нильпотентности группы G соответственно в случаях, когда G разрешима и когда нильпотентна. $G^{(n)}$ — n-й коммутант группы G; $Z_n(G)$ — n-й гиперцентр G, $n \in \mathbb{N}^+$; $\exp(G)$ — экспонента G.

Напомним, что числом Ферма называется простое число вида $2^{2^n} + 1$, $n \in \mathbb{N}^+$.

Теорема А. *Пусть $G = AB$ — конечная разрешимая группа, $A, B \leq G$; $\upsilon = \pi(A) \cap \pi(B)$; φ, ψ и χ — гомоморфизмы G на $G/F(G)_\upsilon$, $G/\Phi(G)$ и $G/F(G)$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *Если группы A^φ, A^ψ и B^φ, B^ψ нильпотентны, а $m = \max(d(A^\varphi), d(B^\varphi))$, $n = \min(d(A^\varphi), d(B^\varphi))$ или $m = [\log_2 \max(c(A^\varphi), c(B^\varphi))] + 1$, $n = [\log_2 \min(c(A^\varphi), c(B^\varphi))] + 1$, то $d(G^\varphi) \leq mn + n(n+1)/2 + m$, и в случае, когда A_2^φ, B_2^φ абелевы, $d(G^\varphi) \leq mn + m$.*

2. *Если группа* G *ненильпотентна,* A^{Ψ} *и* B^{Ψ} *нильпотентны, а* $m = \max(d(A^{\Psi}), d(B^{\Psi}))$, $n = \min(d(A^{\Psi}), d(B^{\Psi}))$, *или* $m = [\log_2 \max(c(A^{\Psi}), c(B^{\Psi}))] + 1$, $n = [\log_2 \min(c(A^{\Psi}), c(B^{\Psi}))] + 1$, *то* $d(G^{\chi}) + 1 \le d(G^{\Psi}) \le mn + n(n+1)/2 + 1$ *и в случае, когда* A_2^{Ψ} *и* B_2^{Ψ} *абелевы,* $d(G^{\chi}) + 1 \le d(G^{\Psi}) \le mn + 1$.

3. *Если* G *ненильпотентна,* A^{Ψ} *и* B^{Ψ} *нильпотентны,* A_2^{Ψ} *и* B_2^{Ψ} *абелевы,* p *— наименьшее в множестве* $\pi(G) \setminus \{2\}$ *и* $m = [\log_2 \max(c(A^{\Psi}), c(B^{\Psi}))] + 1$, *то* $d(G^{\chi}) + 1 \le d(G^{\Psi}) \le \max(1 + d(A^{\Psi}), 1 + d(B^{\Psi}), c(A^{\Psi}) + c(B^{\Psi}) - p + 2) \le \max(1 + m, c(A^{\Psi}) + c(B^{\Psi}) - p + 2)$.

4. *Если* A^{Ψ} *и* B^{Ψ} *нильпотентны, и для каждого* $p \in \mathbb{P}$ *в случае, когда оно является числом Ферма и* B_2^{Ψ} *неабелева,* $c(A_p^{\Psi}) \le p - 2$, *а в противном случае* $c(A_p^{\Psi}) \le p - 1$ *или* $\exp(A_p^{\Psi}) = p$, *то* $AF(G) \trianglelefteq G$ *и* $l_{\mathfrak{N}}(G) \le 3$.

***Замечание* 1.** В связи с утверждениями 1–3 теоремы А заметим, что $d(G/\Phi(G)_{\upsilon}) \le \max(d(G^{\varphi}), d(G^{\Psi}))$, и если G нильпотентна, то $G^{\chi} = 1$, $d(G^{\Psi}) = d(G^{\chi}) = 1$ и $d(G^{\varphi}) = \max(d(A^{\varphi}), d(B^{\varphi}))$.

Говорят, что группы G и D локально эквивалентны, если для любой конечнопорожденной подгруппы $G_1 \le G$ в D найдется подгруппа, изоморфная G_1, и наоборот, для любой конечнопорожденной подгруппы $D_1 \le D$ в G найдется подгруппа, изоморфная D_1 ([5], определение 1.2). Пусть $\mathfrak{N}$ — класс всех групп, каждая из которых удовлетворяет нормализаторному условию для локально эквивалентных ей подгрупп, и $\mathfrak{L}$ — максимальный подкласс класса гипер-$\mathfrak{N}$-групп, замкнутый относительно взятия подгрупп и фактор-групп. Таким образом определенный класс $\mathfrak{L}$ включает в себя класс $\mathfrak{L}$ из [1, с. 95] и, возможно, шире его. Однако все результаты [1], связанные с $\mathfrak{L}$, сохраняют силу и при так определенном $\mathfrak{L}$, причем их доказательства абсолютно не меняются. Отметим, что класс $\mathfrak{L}$ из [1] (а тем более из настоящей работы) довольно широк и включает в себя, например, все гиперабелевы группы, все N-группы, все гипер-N-группы, все группы с нормализаторным условием для бесконечных (и даже только для нечерниковских) подгрупп.

Ниже в каждой из теорем В–Е, каждом из предложений 7–9, 11 и следствии 1 $G = AB$ — периодическая локально разрешимая группа, A и B — ее локально нильпотентные подгруппы, $\upsilon = \pi(A) \cap \pi(B)$ и выполняется хотя бы одно из условий: 1) $A \in \mathfrak{L}$ или $B \in \mathfrak{L}$; 2) $|G : F(G)| < \infty$; 3) для любого $\pi \subseteq \mathbb{P}$ в произвольной $X \le G$ силовские π-подгруппы сопряжены. Заметим, что из 2) следует 3), поскольку при условии 2 в $X / X \cap F(G)_{\pi}$ силовские π-подгруппы конечны, а потому вследствие теоремы Ф. Холла и локальной конечности X сопряжены.

Теорема В. *Пусть* $p \in \mathbb{P}$ *и* $\pi \subseteq \mathbb{P}$ *— произвольные. Справедливы следующие утверждения:*

1. *В случае условий 2 и 3* G *радикальна, причем* $l_{\mathfrak{N}}(G) \in \mathbb{N}^+$.

2. *Выполняются соотношения*

$$\left[\langle A_p^G \rangle, \langle B_p^G \rangle\right] \subseteq O_p(G), \quad A \cap B \subseteq F(G) = AF(G) \cap BF(G) =$$

$$= (F(G)\cap A)(F(G)\cap B), \quad F(G)_\pi = (F(G)_\pi \cap A)(F(G)_\pi \cap B);$$

$$\text{при } \pi \supseteq \upsilon \quad A\cap B \subseteq AF(G)_\pi \cap BF(G)_\pi = F(G)_\pi =$$

$$= \bigcap_{p\in\mathbb{P}} \Big(F(G)_\pi \big\langle (A_{p'}B_p)^G \big\rangle \cap F(G)_\pi \big\langle (A_p B_{p'})^G \big\rangle\Big);$$

$$F(G) = \bigcap_{p\in\mathbb{P}} \Big(F(G) \big\langle (A_{p'}B_p)^G \big\rangle \cap F(G) \big\langle (A_p B_{p'})^G \big\rangle\Big). \tag{1}$$

В частности, группы $F(G)$ *и* $F(G)_\pi, \pi \supseteq \upsilon$, *являются пересечениями подгрупп* $\operatorname{Ker}\psi$ *по некоторым гомоморфизмам* ψ *группы* G, *для которых* $\pi(A^\psi)\cap\pi(B^\psi)=\varnothing$ *и хотя бы одна из групп* A^ψ, B^ψ *примарна.*

3. *Произвольная подгруппа* $N \le G$, *у которой есть возрастающий инвариантный ряд нормальных в* G *подгрупп такой, что для любых соседних его членов* D *и* $T \subset D$ D/T *является произведением некоторых подгрупп* $O_p(G/T)$, *представима в виде* $N=(N\cap A)(N\cap B)$.

4. *Для подгруппы* $H=F(G)$ *или* $H=F(G)_\pi$, $\pi\supseteq\upsilon$, *все подгруппы* $C\le G$ *такие, что* $H \subseteq C = (C\cap A)(C\cap B)$ *и* $|C:H| < \infty$, *образуют локальную систему группы* G.

5. $A_\pi B_\pi$ *является силовской* π*-подгруппой группы* G, *содержит сопряженную в* G *подгруппу к произвольной* π*-подгруппе* $P \le G$, *для которой* $|P:P\cap F(G)|<\infty$; $G=(A_\pi B_\pi)(A_{\pi'}B_{\pi'})$.

В частности, G *является* π*-группой для* $\pi=\pi(A)\cup\pi(B)$.

6. *Подгруппы* A_pB_p, *взятые по всем* $p\in\mathbb{P}$, *попарно перестановочны, а* G *является их произведением.*

(Соотношение 1 выделено ввиду его важности).

Теорема С. *Пусть* $p\in\mathbb{P}$ *и* $\sigma,\tau\subseteq\mathbb{P}$; $\mu=\upsilon\cap(\sigma\cup\tau)$ *и* $\nu=\mathbb{P}\setminus(\sigma\cup\tau)$; $L\subseteq A_\sigma$, $T\subseteq A_p$, $M\subseteq B_\tau$ *и* $L, T, M \ne \varnothing$; ξ *и* ψ — *гомоморфизмы группы* G *и* $\operatorname{Ker}\xi \supseteq F(G)_\mu$, $\operatorname{Ker}\psi\supseteq F(G)_\upsilon$; $\operatorname{Ker}\psi \subseteq N \trianglelefteq G$ *и* N^ψ *локально нильпотентна. Тогда выполняются соотношения:*

$$A_\sigma^\xi B_\tau^\xi = B_\tau^\xi A_\sigma^\xi \le G^\xi; \tag{2}$$

$$F^*(G^\psi) = [A^\psi, B^\psi]; \tag{3}$$

$$\begin{gathered}(T^G)^\psi = (T^{A_pB_{p'}})^\psi, \quad \big\langle A_p^G\big\rangle^\psi = A_p^\psi\Big(\big\langle A_p^G\big\rangle^\psi \cap B_{p'}^\psi\Big) \quad \text{и} \\ \langle T^G\rangle^\psi = \Big(\big\langle T^G\big\rangle^\psi\cap A_p^\psi\Big)\Big(\big\langle T^G\big\rangle^\psi \cap B_{p'}^\psi\Big);\end{gathered} \tag{4}$$

$$\begin{gathered}(L^G)^\psi = \Big(L^{A_\sigma B}\Big)^\psi, \quad \big\langle A_\sigma^G\big\rangle^\psi = A_\sigma^\psi\Big(\big\langle A_\sigma^G\big\rangle^\psi \cap B^\psi\Big) \quad \text{и} \\ \langle L^G\rangle^\psi = \Big(\big\langle L^G\big\rangle^\psi\cap A_\sigma^\psi\Big)\Big(\big\langle L^G\big\rangle^\psi \cap B^\psi\Big);\end{gathered} \tag{5}$$

$$\big\langle (L\cup M)^G\big\rangle^\psi = \Big(\big\langle (L\cup M)^G\big\rangle^\psi \cap A^\psi\Big)\Big(\big\langle (L\cup M)^G\big\rangle^\psi\cap B^\psi\Big); \tag{6}$$

$$\big\langle A_\sigma^G\big\rangle^\psi \cap \big\langle A_\tau^G\big\rangle^\psi = A_{\sigma\cap\tau}^\psi\Big(\big\langle A_\sigma^G\big\rangle^\psi \cap \big\langle A_\tau^G\big\rangle^\psi \cap B^\psi\Big); \tag{7}$$

$$\big\langle A_p^G\big\rangle^\psi \cap \big\langle B_p^G\big\rangle^\psi = \big(A^\psi\cap B^\psi\big)_p \times \Big(\big\langle A_p^G\big\rangle^\psi \cap \big\langle B_p^G\big\rangle^\psi \cap \big(A^\psi \cap B^\psi\big)p'\Big); \tag{8}$$

$$\langle A_\sigma^G\rangle^\Psi \cap \langle B_\tau^G\rangle^\Psi = \left(\langle A_\sigma^G\rangle^\Psi \cap \langle B_\tau^G\rangle^\Psi \cap A_\sigma^\Psi B_\tau^\Psi\right) \times \left(\langle A_\sigma^G\rangle^\Psi \cap \langle B_\tau^G\rangle^\Psi \cap \left(A^\Psi \cap B^\Psi\right)_\upsilon\right) \quad (9)$$

и

$$\langle A_\sigma^G\rangle^\Psi \cap \langle B_\tau^G\rangle^\Psi \cap A_\sigma^\Psi B_\tau^\Psi = \left(A_\sigma^\Psi \cap \langle B_\tau^G\rangle^\Psi\right)\left(B_\tau^\Psi \cap \langle A_\sigma^G\rangle^\Psi\right); \quad (10)$$

$$F(G^\Psi) = (A^\Psi)_{G^\Psi}(B^\Psi)_{G^\Psi}, \quad (A^\Psi)_{G^\Psi} = F(G^\Psi) \cap A^\Psi,$$
$$(B^\Psi)_{G^\Psi} = F(G^\Psi) \cap B^\Psi \quad (11)$$

и

$$\left[(A^\Psi)_{G^\Psi}, (B^\Psi)_{G^\Psi}\right] = 1; \quad (12)$$

$$A_\sigma \operatorname{Ker}\psi \cap N = (A_\sigma \cap N)\operatorname{Ker}\psi \trianglelefteq G \quad \text{и} \quad A_\sigma^\Psi \cap N^\Psi \trianglelefteq G^\Psi. \quad (13)$$

Используя (13), сразу же получаем такое следствие.

***Следствие* 1.** *При произвольных* $\sigma \subseteq \mathbb{P}$ *и порядковом числе* $\alpha > 0$ $(A_\sigma \cap \cap F_{\alpha+1}(G))F_\alpha(G) \trianglelefteq G$. *В частности,* $(A \cap F_{\alpha+1}(G))F_\alpha(G) \trianglelefteq G$, *и если* $A_\sigma \subseteq F_{\alpha+1}(G)$ *или* $A \subseteq F_{\alpha+1}(G)$, *то соответственно* $A_\sigma F_\alpha(G) \trianglelefteq G$ *или* $AF_\alpha(G) \trianglelefteq G$.

Теорема D. *Справедливы следующие утверждения:*

1. *Если* A *имеет возрастающий инвариантный ряд длины* $\le \alpha + n$ *с абелевыми факторами, где* α *— предельное порядковое число и* $n \in \mathbb{N}^+$, *то* G *радикальна и* $l_{\mathfrak{N}}(G) \le l_{\mathfrak{N}}(\langle A^G\rangle) + 1 \le \alpha + 2n + 1$. *В случае, когда и у* B *есть такой ряд,* $l_{\mathfrak{N}}(G) \le \alpha + 2n$. *В частности, если* A *разрешима ступени* n, *то* $l_{\mathfrak{N}}(G) \le l_{\mathfrak{N}}(\langle A^G\rangle) + 1 \le 2n + 1$, *и если, к тому же,* B *разрешима ступени* $\le n$, *то* $l_{\mathfrak{N}}(G) \le 2n$.

2. *Если* A *и* B *разрешимы ступеней* n *и* $m \ge n$, *то* $G/F(G)_\upsilon$ *разрешима,* $d(G/F(G)_\upsilon) \le mn + n(n+1)/2 + m$, $d(G/F(G)) \le mn + n(n+1)/2$, *и в случае, когда* A_2 *и* B_2 *абелевы,* $d(G/F(G)_\upsilon) \le mn + m$, $d(G/F(G)) \le mn$.

3. *Если* A *и* B *нильпотентны и* $m = [\log_2 \max(c(A), c(B))] + 1$, $n = [\log_2 \min(c(A), c(B))] + 1$, *то для групп* $G/F(G)_\upsilon$ *и* $G/F(G)$ *выполняются неравенства из утверждения 2; кроме того,* $d(G/F(G)_\upsilon) \le c(A) + c(B)$, $d(G/F(G)) \le c(A) + c(B) - 1$.

4. *Если* G *— не 2-группа,* A *и* B *нильпотентны,* A_2 *и* B_2 *абелевы и* p *— наименьшее в* $\pi(G) \setminus \{2\}$, *а* m *— то же, что в утверждении* 3, *то* $d(G/F(G)) \le \max(d(A), d(B), c(A) + c(B) - p + 1) \le \max(m, c(A) + c(B) - p + 1)$.

5. *Если для каждого* $p \in \mathbb{P}$ *в случае, когда оно является числом Ферма и* B_2 *неабелева,* $c(A_p) \le p - 2$, *а в противном случае* $c(A_p) \le p - 1$ *или* $\exp(A_p) = p$, *то* $AF(G) \trianglelefteq G$, *и* $l_{\mathfrak{N}}(G) \le 3$.

6. *Если* A *имеет конечную экспоненту и для каждого* $p \in \mathbb{P}$ *в том же случае, что и в утверждении* 5, $t_p = 2\log_p \exp(A_p)$, *а в противном случае* $t_p = \log_p \exp(A_p)$, *то* $l_{\mathfrak{N}}(G) \le l_{\mathfrak{N}}(\langle A^G\rangle) + 1 \le 2\max_{p \in \mathbb{P}}(t_p) + 1$.

Заметим, что если в утверждении 4 G — 2-группа, то в силу теоремы Н. Ито $d(G/F(G)_\upsilon) = 1$.

Из теоремы D непосредственно вытекает следующее предложение.

***Следствие* 2.** *Пусть* $G = AB$ — *периодическая локально разрешимая группа;* A *и* B — *ее локально нильпотентные подгруппы, и* $\pi(A) \cap \pi(B) = \varnothing$. *Тогда:*

1. *Если* A *и* B *разрешимы ступеней* n *и* $m \geq n$, *то* G *разрешима,* $d(G) \leq mn + n(n+1)/2 + m$, *и в случае, когда* A_2 *и* B_2 *абелевы,* $d(G) \leq mn + m$.

2. *Если* A *и* B *нильпотентны и* $m = [\log_2 \max(c(A), c(B))] + 1$, $n = [\log_2 \min(c(A), c(B))] + 1$, *то выполняются неравенства из утверждения* 1 *настоящего предложения и, кроме того,* $d(G) \leq c(A) + c(B)$.

Теорема E. *Пусть* $H = [A, B]F(G)$, ψ — *гомоморфизм* G *на* $G/F(G)$, *и для произвольных* $p, q \in \mathbb{P}$ $R_{pq} = \langle A_p^G \rangle^{\psi} \cap \langle B_q^G \rangle^{\psi}$, $D_{pq} = H^{\psi} \cap R_{pq}$. *Тогда выполняются соотношения:*

$$\langle A^G \rangle^{\psi} = \underset{p \in \mathbb{P}}{\times} \langle A_p^G \rangle^{\psi} \quad и \quad \langle A_p^G \rangle^{\psi} = A_p^{\psi}\left(\langle A_p^G \rangle^{\psi} \cap B_{p'}^{\psi}\right); \tag{14}$$

$$\prod_{p,q \in \mathbb{P}} R_{pq} = \underset{p,q \in \mathbb{P}}{\times} R_{pq} \quad и \quad R_{pq} = \left(R_{pq} \cap A_p^{\psi}\right)\left(R_{pq} \cap B_q^{\psi}\right),$$
$$R_{pp} = 1, \quad \pi(R_{pq}) \subseteq \{p, q\}; \tag{15}$$

$$H^{\psi} = \underset{p,q \in \mathbb{P}}{\times} D_{pq} \quad и \quad D_{pq} = \left(D_{pq} \cap A_p^{\psi}\right)\left(D_{pq} \cap B_q^{\psi}\right),$$
$$D_{pp} = 1, \quad \pi(D_{pq}) \subseteq \{p, q\}; \tag{16}$$

$$A \cap B \subseteq H = (H \cap A)(H \cap B) \quad и \quad F^*(G^{\psi}) = H^{\psi} = [A^{\psi}, B^{\psi}]. \tag{17}$$

Напомним, что при произвольном $\pi \subseteq \mathbb{P}$ конечная группа называется π-разрешимой, если каждый в отдельности индекс ее композиционного ряда независимо от остальных или не делится ни на одно $p \in \pi$, или равен некоторому $p \in \pi$ (С. А. Чунихин, см., например, [6]).

Предложение 1. *Пусть* G — *конечная* π*-разрешимая группа с нильпотентной холловой* π*-подгруппой* H; $d = d(H)$, $G_0 = 1$ *и при нечетном* $i \in \mathbb{N}$ $G_i/G_{i-1} = O_{\pi'}(G_i/G_{i-1})$, *при четном* $i \in \mathbb{N}$ $G_i/G_{i-1} = O_{\pi}(G_i/G_{i-1})$. *Тогда* $H \subseteq G_{2d}$ *и* $G = G_{2d+1}$; *при четном* $i \leq 2d$ G_i/G_{i-1} — *нильпотентная* π*-группа, причем в случае, когда* $c(H_2) \leq 2$, $H^{(d-i/2)} \leq G_i$ *и* $d(G_i/G_{i-1}) \leq d - i/2 + 1$.

Доказательство в указанном случае индукцией по $|G|$ легко сводится к установлению для произвольного p включения $\left(H^{(d-1)}\right)_p \subseteq G_2$. Поскольку $H = H_p \times H_{p'}$, то $\left(H^{(d-1)}\right)_p = H_p^{(d-1)}$. Вследствие соответствующих теорем Ф. Холла – Хигмэна [7] $H_p^{(d-1)} \subseteq O_{p',p}(G)$. В силу теоремы С. А. Чунихина ([6], теорема 1.8.2) для $\sigma = \{p\} \cup \pi'$ найдется холлова σ-подгруппа $S \supseteq H_p$ группы G. Поскольку $H_p \trianglelefteq H$ и, очевидно, $G = HS$, то вследствие леммы Чунихина (см., например, [8], лемма 1.36) $\langle H_p^G \rangle = \langle H_p^S \rangle$. Следовательно, $\langle H_p^G \rangle \subseteq O_{\sigma}(G)$. Поэтому $H_p^{(d-1)} \subseteq O_{p',p}(G) \cap O_{\sigma}(G) = O_{\pi',p}(G) \subseteq G_2$.

Рассмотрим общий случай. Пусть $p = 2$ и S — та же, что выше. Вследствие доказанного и теоремы Брюхановой [9] соответственно $H_{2'} \subseteq G_{2d}$, и подгруппа

$T=\left\langle H_2^G\right\rangle$ имеет ряд $T_0=1\subseteq T_1\subseteq \ldots \subseteq T_{2d}=T$ характеристических подгрупп, у которого при нечетном $i<2d$ $T_i/T_{i-1}=O_{\pi'}(T/T_{i-1})$, при четном $i\le 2d$ $T_i/T_{i-1}=O_2(T/T_{i-1})$. Ввиду наличия последнего, очевидно, $T\subseteq G_{2d}$. Таким образом, $H=H_{2'}\times H_{2'}\subseteq G_{2d}$. Поэтому, очевидно, $G=G_{2d+1}$.

Предложение 2. *Если при условиях предложения* 1 *для произвольного* $p\in\mathbb{P}$ *в случае, когда оно является числом Ферма и при этом* $2\notin\pi(H)$ *и силовская* 2*-подгруппа группы* G *неабелева,* $c(H_p)\le p-2$, *а в противном случае* $c(H_p)\le p-1$ *или* $\exp(H_p)=p$, *то* $O_{\pi',\pi}(G)=O_{\pi'}(G)\leftthreetimes H$.

Доказательство. Поскольку $\pi\left(\left\langle H_p^G\right\rangle\right)\subseteq \pi'\cup\{p\}$ (см. доказательство предложения 1) и вследствие соответствующих теорем Ф. Холла – Хигмэна [7] $H_p\subseteq O_{p',p}(G)$, то $\left\langle H_p^G\right\rangle\subseteq O_{\pi',p}(G)\subseteq O_{\pi',\pi}(G)$. Следовательно, $H=\underset{p\in\mathbb{P}}{\times} H_p\subseteq$ $\subseteq O_{\pi',\pi}(G)$. Поэтому, очевидно, $O_{\pi',\pi}(G)=O_{\pi'}(G)\leftthreetimes H$. Предложение доказано.

Предложение 3. *Пусть* $G=AB$ *— конечная разрешимая группа,* A *и* B *— ее нильпотентные подгруппы и* $\pi(A)\cap\pi(B)=\varnothing$. *Тогда при* $m=\max(d(A), d(B))$ *и* $n=\min(d(A),d(B))$, *а также при* $m=[\log_2\max(c(A),c(B))]+1$ *и* $n=[\log_2\min(c(A),c(B))]+1$ *выполняется неравенство* $d(G)\le mn+n(n+1)/2+m$, *и в случае, когда* $F(G)$ *— минимальный нормальный делитель группы* G, *— неравенство* $d(G)\le mn+n(n+1)/2+1$; *если, к тому же, силовская* 2*-подгруппа группы* G *абелева, то* $d(G)\le mn+m+1$ *и в указанном случае* $d(G)\le mn+1$.

Доказательство индукцией по $|G|$ легко сводится к ситуации, когда $G\ne 1$ и при любом гомоморфизме $\varphi\ne 1$ группы G предложение справедливо для группы $G^{\varphi}=A^{\varphi}B^{\varphi}$. Учитывая, что для произвольной нильпотентной группы X $d(X)\le[\log_2 c(X)]+1$, далее можно считать, что $m=\max(d(A),d(B))$, $n=\min(d(A),d(B))$.

а). Пусть G имеет два минимальных нормальных делителя и φ, ψ — гомоморфизмы G на фактор-группы по ним. Тогда предложение справедливо для групп $G^{\varphi}=A^{\varphi}B^{\varphi}$ и $G^{\psi}=A^{\psi}B^{\psi}$, и, очевидно, $d(G)=\max(d(G^{\varphi}),d(G^{\psi}))$. Учитывая это, легко убедиться в том, что оно справедливо для группы $G=AB$.

Будем считать, что G имеет единственный минимальный нормальный делитель и $d(A)=m$. Пусть $\pi=\pi(B)$, $f=mn+n(n+1)/2+m$, $s=mn+n(n+1)/2+1$ $(=f-m+1)$; $G_0=C_0=1$ и $G_i/G_{i-1}=O_{\pi',\pi}(G/G_{i-1})$, $C_i/C_{i-1}=O_{\pi,\pi'}(G/C_{i-1})$, $i\in\mathbb{N}$. Очевидно, $O_{\pi'}(G)=1$, либо $O_{\pi}(G)=1$. Вследствие предложения 1 $B\subseteq G_n$. Поэтому $G=G_nA$. Следовательно, $d(G)\le d(G_n)+d(A)\le \sum_{i=1}^{n} d(G_i/G_{i-1})+m$ и G/G_n — π'-группа. Заметим, что произвольный π- (π'-) фактор группы G покрывается подгруппой $B(A)$. Поскольку $O_{\pi'}(G)\subseteq A$, A нильпотентна и $G_1/O_{\pi'}(G)$ покрывается подгруппой B, то $O_{\pi'}(G)\subseteq F(G)$ и $d(G_1)\le d(O_{\pi'}(G))+d(G_1/O_{\pi'}(G))\le d(F(G))+n$. Поэтому в указанном случае $d(G_1)\le 1+n$ $(=(m+n)-m+1)$.

б). Пусть $2\notin\pi$. Вследствие предложения 1 $B^{(n-i)}\subseteq G_i$, $i=1,\ldots,n$, и, значит, $d(G_i/G_{i-1})\le m+n-(i-1)$, $i=1,\ldots,n$. Поэтому $d(G)\le(m+n)n-n(n-1)/2+m=f$ и в указанном случае $d(G)\le f-m+1=s$.

в). Пусть $2\in\pi$ и $O_{\pi'}(G)=1$. Легко видеть, что $C_i/G_i=O_{\pi'}(G/G_i)$, $i=$

$= 1, \ldots, n$. Следовательно, $C_n/G_n = O_{\pi'}(G/G_n) = G/G_n$, т. е. $C_n = G$. Поэтому $d(G) = \sum_{i=1}^{n} d(C_i/C_{i-1})$. Далее, поскольку $2 \notin \pi(A)$, то вследствие предложения 1 $A^{(m-i)} \subseteq C_i$, $i = 1, \ldots, n$. В таком случае, $d(C_i/C_{i-1}) \leq n + m - (i-1)$, $i = 1, \ldots, n$, и, значит, $d(G) \leq (n+m)n - n(n-1)/2 = s - 1$.

г). Пусть $2 \in \pi$ и $O_\pi(G) = 1$. Тогда $C_1 = O_{\pi'}(G) \subseteq G_1$ и, по индукции, $C_i \subseteq G_i$, $i = 1, \ldots, n$. В силу предложения 1 $A^{(m-i)} \subseteq C_i$, $i = 1, \ldots, n$, и, значит, $A^{(m-i)} \subseteq G_i$, $i = 1, \ldots, n$. Поэтому $d(G_i/G_{i-1}) \leq m + n - (i-1)$, $i = 1, \ldots, n$. В таком случае, как и на шаге б), $d(G) \leq f$ и в отмеченном случае $d(G) \leq s$.

д). Пусть силовская 2-подгруппа группы G абелева. В силу предложения 1 $A^{(m-1)} \subseteq C_1$ и $B^{(n-1)} \subseteq G_1$.

Пусть $O_{\pi'}(G) = 1$. Тогда $B^{(n-1)} \subseteq G_1 = O_\pi(G) = F(G)$, и, значит, $d(F(G)) \leq n$. Поэтому $d(BF(G)/F(G)) \leq n-1$, если $n > 1$, и $B \subseteq F(G)$, если $n = 1$. Следовательно, $d(G/F(G)) \leq m(n-1) + m$ и $d(G) \leq d(F(G)) + d(G/F(G)) \leq n + m(n-1) + m = mn + n \leq mn + m$, и в случае, когда $F(G)$ — минимальный нормальный делитель группы G, $d(G) \leq 1 + m(n-1) + m \leq 1 + mn$.

Пусть $O_\pi(G) = 1$. Тогда $A^{(m-1)} \subseteq C_1 = O_{\pi'}(G) \subseteq G_1$ и $B^{(n-1)} \subseteq G_1$. Поэтому $d(G) \leq d(G_1) + d(G/G_1) = m + n + (m-1)(n-1) + m - 1 = mn + m$, и в отмеченном случае $d(G) \leq (1+n) + ((m-1)(n-1) + m - 1) = 1 + mn$.

Предложение доказано.

Очевидно, в следующем предложении G не является 2-группой.

Предложение 4. *Пусть $G = AB$ — конечная разрешимая группа порядка > 2 с минимальным нормальным делителем $N = F(G)$, нильпотентными подгруппами A и B, и абелевыми подгруппами A_2 и B_2; p — наименьший нечетный простой делитель $|G|$, $m = \max(d(A), d(B))$ и $k = [\log_2 \max(c(A), c(B))] + 1$. Тогда если одна из подгрупп A, B абелева и содержит N, то $d(G) \leq 1 + m \leq 1 + k$, а в противном случае $d(G) \leq c(A) + c(B) - p + 2$. В частности, выполняются неравенства $d(G) \leq \max(1 + m, c(A) + c(B) - p + 2) \leq \max(1 + k, c(A) + c(B) - p + 2)$.*

Доказательство. Пусть $\pi(N) = \{q\}$. Легко видеть, что $O_{q'}(G) = 1$ и $O_{q',q}(G) = N$. В силу леммы Ф. Гросса 2.5.2 [10] $\pi(A) \cap \pi(B) = \varnothing$, и одна из подгрупп A и B содержит N и является q-группой. Тогда, очевидно, силовская 2-подгруппа группы G абелева. Пусть $A \supseteq N$.

Предположим, что A абелева. Тогда, поскольку $N = F(G) = C_G(N) \subseteq A$, то $N = A$ и, значит, $G = NB$. Поэтому $d(G) \leq d(N) + d(B) \leq 1 + m \leq 1 + k$.

Пусть A неабелева. Тогда, поскольку в G 2-подгруппы абелевы, а A является q-группой, то $q \neq 2$ и, значит, $p \leq q$. С учетом абелевости силовской 2-подгруппы группы G, в силу соответствующей теоремы Ф. Холла – Хигмэна [7] $Z_{q-1}(A) \subseteq O_{q',q}(G) = N$. Следовательно, $c(A/N) \leq c(A) - q + 1 \leq c(A) - p + 1$. Далее, поскольку A/N и BN/N нильпотентны и $\pi(A/N) \cap \pi(BN/N) = \varnothing$, то вследствие соответствующей теоремы Ф. Холла – Хигмэна [7] $d(G/N) \leq c(A/N) + c(BN/N)$. Поэтому $d(G) \leq d(N) + d(G/N) \leq 1 + c(A) - p + 1 + c(B) = c(A) + c(B) - p + 2$. Предложение доказано.

Напомним следующую теорему Гашюца, которая часто будет использоваться. Подгруппа $N \trianglelefteq G$ конечной группы G нильпотентна тогда и только тогда, когда фактор-группа $N/N\cap\Phi(G)$ нильпотентна (см., например, [11] гл. III, предложения 3.5 и 3.7).

Доказательство теоремы A. 1. При гомоморфизме ξ группы G на $G/\Phi(G)_{\upsilon}$ в силу отмеченной теоремы Гашюца $F(G^{\xi})_{\upsilon}=(F(G)_{\upsilon})^{\xi}$ и, очевидно, A^{ξ} и B^{ξ} нильпотентны. Поэтому ввиду следствия 1 [1] $(F(G)_{\upsilon})^{\xi}$ есть пересечение некоторых $N\trianglelefteq G^{\xi}$ с тем свойством, что $\pi(A^{\xi}N/N)\cap\pi(B^{\xi}N/N)=$ $=\varnothing$. Тогда и $F(G)_{\upsilon}$ есть пересечение таких же $N\trianglelefteq G$ Поскольку вследствие предложения 3 для каждого такого N $d(G/N)=mn+n(n+1)/2+m$ и в отмеченном случае $d(G/N)\le mn+m$, то для $d(G^{\varphi})$ выполняются требуемые неравенства.

2–4. Поскольку в силу теоремы Гашюца $F(G^{\psi})=F(G)^{\psi}$ и тогда и только тогда $AF(G)\trianglelefteq G$, когда $A^{\psi}F(G)^{\psi}\trianglelefteq G^{\psi}$, то, не теряя общности рассуждений, можно считать, что $\psi=1$, т. е. $\Phi(G)=1$. Вследствие утверждений 2 и 3 предложения 1 [2] пересечение всех $N\trianglelefteq G$, для которых $F(G/N)$ — минимальный нормальный делитель фактор-группы G/N и при этом $\pi(AN/N)\cap\pi(BN/N)=$ $=\varnothing$ или $|G/N|\in\mathbb{P}$, равно единице. С учетом этого справедливость утверждений 2 и 3 легко вытекает соответственно из предложений 3 и 4. Докажем 4. Пусть ξ — гомоморфизм G на G/N. Вследствие предложения 2 при $\pi=$ $=\pi(A^{\xi})$ $O_{\pi',\pi}(G^{\xi})=O_{\pi'}(G^{\xi})\leftthreetimes A^{\xi}$. Поскольку $\pi(A^{\xi})\cap\pi(B^{\xi})=\varnothing$ или $|G^{\xi}|\in$ $\in\mathbb{P}$, то в силу леммы 2.13 [8] $O_{\pi'}(G^{\xi})\subseteq B^{\xi}$ и, значит, $O_{\pi'}(G^{\xi})$ нильпотентна. Поэтому $A^{\xi}\subseteq O_{\pi',\pi}(G^{\xi})\subseteq F_2(G^{\xi})$ и ввиду произвольности N $A\subseteq F_2(G)$. Тогда вследствие утверждения 4 предложения 2 из [2] $AF(G)\trianglelefteq G$ и $l_{\mathfrak{N}}(G)\le 3$.

Лемма 1. *Пусть $\pi\subseteq\mathbb{P}$, $G=AB$ — группа с сопряженными силовскими π- и π'-подгруппами, A, $B\le G$ и $A=A_{\pi}\times A_{\pi'}$, $B=B_{\pi}\times B_{\pi'}$. Тогда $A_{\pi}B_{\pi}$ — силовская π-подгруппа группы G, и в случае, когда в каждой подгруппе группы G, содержащей A_{π}, силовские π-подгруппы сопряжены, $\left[\langle A_{\pi}^{G}\rangle,\langle B_{\pi}^{G}\rangle\right]\subseteq$ $\subseteq O_{\pi}(G)$.*

Доказательство. Первое утверждение леммы справедливо в силу леммы 2.26 [8]. Пусть в указанном случае $\left[\langle A_{\pi}^{G}\rangle,\langle B_{\pi}^{G}\rangle\right]\nsubseteq O_{\pi}(G)$; $\mathfrak{X}$ — класс всех π-групп. Тогда $\left[\langle A_{\pi}^{G}\rangle,\langle B_{\pi}^{G}\rangle\right]\notin\mathfrak{X}$. Поэтому вследствие лемм 3 и 2 из [1] найдется $L\le G$, $L\in\mathfrak{X}$, для которой $A_{\pi}L\le G$ и $A_{\pi}L\notin\mathfrak{X}$. Поскольку в $A_{\pi}L$ силовские π-подгруппы сопряжены, то в силу следствия 2.10 [8] $A_{\pi}L\in\mathfrak{X}$. Противоречие.

Доказательство теоремы B. 1. В случае, когда G удовлетворяет условию 2, фактор-группа $G/F(G)$ конечна и разрешима, а потому G имеет конечный инвариантный ряд с локально нильпотентными факторами. Далее, поскольку в не более чем счетной группе с сопряженными силовскими π-подгруппами множество всех силовских π-подгрупп не более чем счетно, и локально конечная группа, в каждой конечной подгруппе которой при всех $\pi\subseteq\mathbb{P}$ силовские π-подгруппы сопряжены, локально разрешима вследствие теоремы Ф. Холла – С. А. Чунихина (см., например, [12, с. 177]), то в силу теоремы E [13] при выполнении условия 3 G имеет конечный инвариантный ряд с локально нильпотентными факторами. Утверждение 1 доказано.

Утверждения 2, 3, 6, а также не относящиеся к P подутверждения утверждения 5 справедливы вследствие утверждений 13, 14 из [1] и леммы 1.

Повторяя доказательство предложения 15 из [1] с заменой в нем I на $\mathbb{N}$, π_i на $\{p_i\}$, где p_i — i-е простое число, и ссылки на предложения 13, 14 [1] ссылкой на утверждение 2 настоящей теоремы и учитывая, что $A_\pi B_\pi$ — π-подгруппа, убеждаемся в справедливости утверждения 4.

Доказательство подутверждения утверждения 5, относящегося к P, очевидным образом сводится к случаю, когда P конечна. В силу утверждения 4 найдется $C \leq G$ такая, что $PF(G) \subseteq C = (C \cap A)(C \cap B)$ и $|C : F(G)| < \infty$. Вследствие первого подутверждения утверждения 5 $(C \cap A_\pi)(C \cap B_\pi)$ — силовская π-подгруппа группы C. Поэтому с учетом теоремы Ф. Холла для некоторого $g \in G$ $P^g \subseteq (C \cap A_\pi)(C \cap B_\pi) \subseteq A_\pi B_\pi$.

Доказательство теоремы С. Докажем справедливость (2). Рассмотрим случай, когда $\sigma = \{p\}$, $\tau = \{q\}$ и $p \neq q$. Можно считать, что $A_p \neq 1$ и $B_q \neq 1$. Покажем сначала, что $A_p B_q F(G) \leq G$. Пусть ψ — гомоморфизм G на $G/F(G)$. Вследствие утверждения 2 теоремы В пересечение подгрупп $\operatorname{Ker}\chi$ по всем гомоморфизмам χ группы G^ψ, для которых $\pi(A^{\psi\chi}) \cap \pi(B^{\psi\chi}) = \varnothing$, равно единице. Поскольку для $\pi = \{p\} \cup \pi(B^{\psi\chi})$ $A_p^{\psi\chi}$ и $B^{\psi\chi}$ — силовские π-подгруппы групп $A^{\psi\chi}$ и $B^{\psi\chi}$, то вследствие утверждения 5 теоремы В $A_p^{\psi\chi} B^{\psi\chi} \leq G^{\psi\chi}$ и, значит, $A_p^{\psi\chi} B^\psi \operatorname{Ker}\chi \leq G^\psi$. Аналогично, $B_q^\psi A^\psi \operatorname{Ker}\chi \leq G^\psi$. В силу леммы 4 [1] $\operatorname{Ker}\chi = (\operatorname{Ker}\chi \cap A^\psi)(\operatorname{Ker}\chi \cap B^\psi)$. Следовательно, ввиду леммы 3 [2] $A_p^\psi B_q^\psi \leq G^\psi$ и, значит, $A_p B_q F(G) \leq G$.

Пусть $\kappa = \{p, q\}$. Вследствие утверждения 5 теоремы В $\pi(\langle A_p, B_q \rangle F(G)_\kappa) \subseteq \kappa$. Поэтому $F(G) \cap \langle A_p, B_q \rangle F(G)_\kappa = F(G)_\kappa$. Используя лемму Дедекинда, получаем

$$A_p(B_q F(G)) \cap \langle A_p, B_q \rangle F(G)_\kappa = A_p(B_q F(G)_\kappa F(G) \cap \langle A_p, B_q \rangle F(G)_\kappa) =$$

$$= A_p B_q F(G)_\kappa (F(G) \cap \langle A_p, B_q \rangle F(G)_\kappa) = A_p B_q F(G)_\kappa \leq G.$$

Поэтому, если $\mu = \kappa$, то $A_p^\xi B_q^\xi \leq G^\xi$. Пусть $\mu \neq \kappa$ и, например, $p \notin \pi(B)$. Тогда в силу утверждения 5 теоремы В A_p — силовская p-подгруппа группы G и, значит, $O_p(G) \subseteq A_p$. Следовательно, $A_p B_q F(G)_\kappa = A_p O_p(G) O_q(G) B_q = A_p O_q(G) B_q$. Поэтому если $q \in \mu$, то $A_p B_q F(G)_\kappa = A_p B_q F(G)_\mu \leq G$ и, вместе с тем, $A_p^\xi B_q^\xi \leq G^\xi$. Если же и $q \notin \mu$, то $O_q(G) \subseteq B_q$ и $A_p B_q F(G)_\kappa = A_p O_q(G) B_q = A_p B_q \leq G$ и, вместе с этим, $A_p^\xi B_q^\xi \leq G^\xi$.

Рассмотрим общий случай. Если $\sigma = \varnothing$ или $\tau = \varnothing$, то $A_\sigma^\xi = 1$ или $B_\tau^\xi = 1$, и (2) выполняется. Пусть $\sigma, \tau \neq \varnothing$. Поскольку вследствие доказанного и утверждения 5 теоремы В для любых p и q (возможно, $q = p$) $A_p^\xi B_q^\xi = B_q^\xi A_p^\xi$, а $B_\tau^\xi = \underset{q \in \tau}{\times} B_q^\xi$, то, очевидно, $A_p^\xi B_\tau^\xi = B_\tau^\xi A_p^\xi$, $p \in \sigma$. Тогда поскольку $A_\sigma^\xi = \underset{p \in \sigma}{\times} A_p^\xi$, то $B_\tau^\xi A_\sigma^\xi = A_\sigma^\xi B_\tau^\xi$ и, значит, $A_\sigma^\xi B_\tau^\xi \leq G^\xi$.

При доказательстве справедливости соотношений (3)–(12) повторяем доказательства утверждений 4–11 предложения 2 [4] с заменой ссылок на утверждения 2, 5, 6 соответственно ссылками на соотношения (2), (3), (5) настоящей теоремы и ссылок на утверждение 3 и работу [7] ссылками на утверждение 2 теоремы B настоящей работы.

Докажем справедливость (13). Можно считать, что $A_\sigma \neq 1$. Вследствие леммы С. Н. Черникова $A_\sigma \mathrm{Ker}\psi \cap N = (A_\sigma \cap N)\mathrm{Ker}\,\psi$. Далее, $A_\sigma \mathrm{Ker}\psi \cap N \trianglelefteq G$ тогда и только тогда, когда $A_\sigma^\psi \cap N^\psi \trianglelefteq G^\psi$. Поскольку, очевидно, $A_\sigma^\psi \cap N^\psi = \underset{p \in \sigma}{\times}\left(A_p^\psi \cap N_p^\psi\right)$, то достаточно рассмотреть случай, когда A_σ^ψ и N^ψ — p-группы для некоторого p. С учетом второго из соотношений (4) в силу леммы 2.12 из [8] A_p^ψ — силовская p-подгруппа группы $\left\langle A_p^G\right\rangle^\psi$. Следовательно, поскольку $\left\langle A_p^G\right\rangle^\psi \cap N^\psi \trianglelefteq \left\langle A_p^G\right\rangle^\psi$ и $\left\langle A_p^G\right\rangle^\psi \cap N^\psi$ — p-группа, то $\left\langle A_p^G\right\rangle^\psi \cap N^\psi \leq A_p^\psi$. Поэтому $A_p^\psi \cap N^\psi = \left\langle A_p^G\right\rangle^\psi \cap N^\psi \trianglelefteq G^\psi$. Теорема доказана.

Лемма 2. *Пусть* $G = AB$ — *группа,* $A, B \leq G$; $N \trianglelefteq G$, $H/N \trianglelefteq G/N$ *и* $AN/N \cap BN/N \subseteq H/N = (H/N \cap AN/N)(H/N \cap BN/N)$. *Тогда* $A \cap B \subseteq H = (H \cap A)(H \cap B)$.

Доказательство. Поскольку в силу леммы Дедекинда $H \cap AN = (H \cap A)N$ и $H \cap BN = N(H \cap B)$, то $H = (H \cap AN)(H \cap BN) = (H \cap A)N(H \cap B)$ и, значит, с учетом включения $AN \cap BN \subseteq H$, $H = (H \cap A)(AN \cap BN)(H \cap B)$. Далее, $A \cap BN = (AN \cap BN) \cap A \subseteq H \cap A$, $B \cap AN \subseteq H \cap B$, и в силу леммы Н. Ф. Сесекина 1.9 [8] $AN \cap BN = (A \cap BN)(B \cap AN)$. Таким образом, $AN \cap BN \subseteq (H \cap A)(H \cap B)$. Следовательно, $H = (H \cap A)(H \cap A)(H \cap B)(H \cap B) = (H \cap A)(H \cap B)$.

Лемма 3. *Пусть* $G = AB$ — *группа,* $A, B \leq G$; $N \trianglelefteq G$, *и* φ — *гомоморфизм* G *на* G/N, $K/N \trianglelefteq G/N$, $L/N \trianglelefteq AN/N$ *и* $M/N \trianglelefteq BN/N$; $H = \langle K, L, M\rangle$ *и* $T = N_G(H)$. *Пусть также выполняется хотя бы одно из условий:* 1) *при произвольном* $g \in AN/N$ $H/N \not\subset (H/N)^g$; 2) *при произвольном* $g \in AN/N$ $(H/N)^g \not\subset H/N$; 3) H/N *не содержит изоморфных себе истинных подгрупп;* 4) *фактор-группа* $A^\varphi/L^\varphi(K^\varphi \cap A^\varphi)$ *периодическая;* 5) A *периодическая. Тогда* $T = (T \cap A)(T \cap B)$.

Доказательство. Очевидно, $T/N = N_{G/N}(H/N)$ и условия 1 и 2 равносильны. Поэтому в силу леммы 1.6 [8] $T/N = (T/N \cap AN/N)(T/N \cap BN/N)$. Далее, очевидно, $AN/N \cap BN/N \subseteq N_{G/N}(H/N)$. Следовательно, ввиду леммы 2 $T = (T \cap A)(T \cap B)$.

Теорема 1. *Пусть* $G = AB$ — *периодическая почти локально нильпотентная группа,* A *и* B — *ее локально нильпотентные подгруппы,* n — *число минимальных нормальных делителей фактор-группы* $G/F(G)$; $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ *и* $\mathfrak{W}$ — *классы групп, содержащие соответственно все подпрямые и все прямые произведения любых* n *конечных секций соответственно группы* G, A, B *и группы* $F(G)$. *Тогда найдется конечная разрешимая группа* $G^* = A^*B^* \in \mathfrak{X}$ *с нильпотентными подгруппами* $A^* \in \mathfrak{Y}$ *и* $B^* \in \mathfrak{Z}$ *такая, что* $F(G^*) \in \mathfrak{W}$, $G/F(G) \simeq G^*/F(G^*)$ *и для некоторого изоморфизма* φ *группы* $G/F(G)$ *на* $G^*/F(G^*)$

$$(AF(G)/F(G))^\varphi = A^*F(G^*)/F(G^*)$$

и (18)

$$(BF(G)/F(G))^\varphi = B^*F(G^*)/F(G^*).$$

***Замечание* 2.** Говорят, что подгруппа X группы G, факторизуемой двумя подгруппами A и B, сильно факторизуема относительно ее разложения $G = AB$, если $A \cap B \subseteq X = (X \cap A)(X \cap B)$ [14]. Отметим, что группа G^* (соответственно, ее подгруппа $F(G^*)$), которая будет построена в доказательстве теоремы 1, является подгруппой прямого произведения (соответственно, прямым произведением) n конечных фактор-групп некоторых подгрупп группы G (соответственно, группы $F(G)$), сильно факторизуемых относительно разложения $G = AB$ (соответственно, разложения $F(G) = (F(G) \cap A)(F(G) \cap B)$). В случае, когда $n = 1$, G^* и $F(G^*)$ — секции групп G и $F(G)$.

***Доказательство теоремы* 1.** Если $G = F(G)$, то положим $G^* = A^* = B^* = 1$. Пусть $G \neq F(G)$. Вследствие теоремы Кегеля–Виландта [15, 16] фактор-группа $G/F(G)$ разрешима. Пусть $M/F(G)$ — ее минимальный нормальный делитель. Тогда $M/F(G)$ — элементарная абелева p-группа. Зафиксируем p-элемент $h \in M \setminus F(G)$. Покажем, что в G найдутся подгруппы H и $T \lhd H$ такие, что: 1) $T \subseteq H \cap F(G)$ и $|H/T| < \infty$; 2) $A \cap B \subseteq H = (H \cap A)(H \cap B)$; 3) $G = HF(G)$; 4) при некотором $q \in \mathbb{P}$, $q \neq p$ для любого $g \in (H \cap M/T) \setminus (H \cap F(G)/T)$ подгруппа $\langle g \rangle O_q(H \cap F(G)/T)$ ненильпотентна; 5) для естественных гомоморфизма ψ H на H/T и изоморфизма ζ $G/F(G)$ на $H^\psi/(H \cap F(G))^\psi$, сопоставляющего произвольному $g \in G/F(G)$ элемент $(g \cap H)^\psi \in H^\psi/(H \cap F(G))^\psi$, выполняются соотношения

$$\begin{aligned} (AF(G)/F(G))^\zeta &= (H \cap A)^\psi (H \cap F(G))^\psi/(H \cap F(G))^\psi, \\ (BF(G)/F(G))^\zeta &= (H \cap B)^\psi (H \cap F(G))^\psi/(H \cap F(G))^\psi. \end{aligned} \tag{19}$$

Заметим, что в силу леммы С. Н. Черникова $M = (H \cap M)F(G)$.

Поскольку в силу теоремы Б. И. Плоткина (см., например, [12]) $F(G)$ локально нильпотентна, то вследствие предложений 1.1 и 1.4 [17] она локально конечна и $F(G) = \times_{q \in \mathbb{P}} O_q(G)$.

Подгруппа $\langle h \rangle F(G)$ не локально нильпотентна. Действительно, в силу абелевости $M/F(G)$ для любого $c \in G$ $(\langle h \rangle F(G))^c \subseteq N_G(\langle h \rangle F(G))$. Поэтому ввиду упомянутой теоремы Б. И. Плоткина локальная нильпотентность подгруппы $\langle h \rangle F(G)$ влекла бы локальную нильпотентность подгруппы $\prod_{c \in G} (\langle h \rangle F(G))^c = M$.

Очевидно, для некоторого $q \neq p$ $[h, O_q(G)] \neq 1$. Зафиксируем q.

Поскольку $|G : F(G)| < \infty$, то, как нетрудно убедиться, используя следствие 14 [18], $O_q(G)$ имеет центральную систему с инвариантными в G членами и конечными факторами. В ней найдутся соседние члены Q и $N \subset Q$, для которых $[h, Q] \not\subseteq N$. Действительно, если это не так, то для произвольного $g \in O_q(G)$ пересечения ее членов с конечной подгруппой $K = \langle g^{\langle h \rangle} \rangle$, взятые вместе с $\langle h \rangle K$, образуют центральный ряд подгруппы $\langle h \rangle K$. Следовательно, $\langle h \rangle K$ нильпотентна. В таком случае, поскольку $\pi(\langle h \rangle) \cap \pi(\langle g \rangle) = \varnothing$, $[h, g] = 1$. Таким образом, $\left[h, O_q(G)\right] = 1$. Противоречие.

Пусть $L = O_{q'}(F(G))N$, P/L и S/L — силовские p-подгруппы соответственно групп $F_2(G)/L \cap AL/L$ и $F_2(G)/L \cap BL/L$. Очевидно, $P/L \trianglelefteq AL/L$ и

$S/L \trianglelefteq BL/L$. Вследствие утверждения 3 теоремы В $F_2(G)/L = (F_2(G)/L \cap \cap AL/L)(F_2(G)/L \cap BL/L)$ и, значит, в силу утверждения 5 этой теоремы $(P/L)(S/L)$ — силовская p-подгруппа группы $F_2(G)/L$. Поскольку $|F_2(G)/L : F(G)/L| < \infty$ и $F(G)/L$ — q-группа с $q \neq p$, то $|(P/L)(S/L)| < \infty$.

Для произвольного непустого $X \subseteq G$ через $\overline{X}$ будем обозначать образ X в G/L при естественном гомоморфизме G на G/L. Очевидно, $[\overline{h}, \overline{Q}] \neq 1$. Нетрудно видеть, что $\overline{P}\,\overline{S}\,\overline{F(G)} / \overline{F(G)}$ — силовская p-подгруппа нильпотентной группы $\overline{F_2(G)} / \overline{F(G)}$. Следовательно, $M / \overline{F(G)} \subseteq \overline{P}\,\overline{S}\,\overline{F(G)} / \overline{F(G)} \trianglelefteq \overline{G} / \overline{F(G)}$ и $\overline{P}\,\overline{S}\,\overline{F(G)} \trianglelefteq \overline{G}$.

Пусть $H = N_G(\langle P, S, QL\rangle)$. Вследствие леммы 3 выполняется условие 2 (см. начало доказательства). Далее, очевидно, $\overline{H} = N_{\overline{G}}(\overline{P}\,\overline{S}\,\overline{Q}) \supseteq N_{\overline{G}}(\overline{P}\,\overline{S})$. Поскольку $\overline{P}\,\overline{S}\,\overline{F(G)}$ — локально конечная группа с конечной силовской p-подгруппой $\overline{P}\,\overline{S}$, то вследствие теоремы Силова силовские p-подгруппы сопряжены в ней. Поэтому, с учетом инвариантности $\overline{P}\,\overline{S}\,\overline{F(G)}$ в $\overline{G}$, в силу леммы Фраттини $\overline{G} = N_{\overline{G}}(\overline{P}\,\overline{S})\overline{F(G)}$. Следовательно, $\overline{G} = \overline{H}\,\overline{F(G)}$ и, значит, $G = HF(G)$, т. е. выполняется условие 3. Далее, для некоторого $c \in G$ $\overline{h^c} \in \overline{P}\,\overline{S}$. Тогда h^c — p-элемент, $h^c \in PS \subseteq H$, $h^c \in M \setminus F(G)$ и $[h^c, Q] = [h, Q]^c \notin N$. Учитывая это, далее, не теряя общности рассуждений, можно считать, что $h \in PS$. Очевидно, $h \in (H \cap M) \setminus (H \cap F(G))$.

Пусть $\overline{F(G)} \cap C_{\overline{H}}(\overline{P}\,\overline{S}\,\overline{Q}) = \overline{T}$, где $L \subseteq T \leq G$. Тогда $T \subseteq H \cap F(G)$. Поскольку $|\overline{P}\,\overline{S}\,\overline{Q}| < \infty$ и $\overline{P}\,\overline{S}\,\overline{Q} \trianglelefteq \overline{H}$, то $|\overline{H} : C_{\overline{H}}(\overline{P}\,\overline{S}\,\overline{Q})| < \infty$. В таком случае, в силу теоремы Пуанкаре $|\overline{H} : \overline{F(G)} \cap C_{\overline{H}}(\overline{P}\,\overline{S}\,\overline{Q})| < \infty$. Поэтому $|H/T| < \infty$. Итак, выполняется условие 1.

Далее, в силу утверждения 2 теоремы В $A \cap B \subseteq F(G) = (F(G) \cap A)(F(G) \cap \cap B)$ и

$$AF(G)/F(G) \cap BF(G)/F(G) = 1. \tag{20}$$

Тогда с учетом условия 2 вследствие леммы Б. Амберга 1.27 [8] $H \cap F(G) = (H \cap F(G) \cap A)(H \cap F(G) \cap B)$.

Напомним, что ψ — естественный гомоморфизм H на H/T. Вследствие доказанного $H^\psi = (H \cap A)^\psi (H \cap B)^\psi$ и $(H \cap F(G))^\psi = (H \cap F(G) \cap A)^\psi (H \cap \cap F(G) \cap B)^\psi$.

Пусть для некоторого $g \in (H \cap M/T) \setminus (H \cap F(G)/T)$ подгруппа $\langle g\rangle O_q(H \cap F(G)/T)$ нильпотентна; $g^* \in \langle g\rangle$ — p-элемент, для которого $g(H \cap F(G)/T) = g^*(H \cap F(G)/T)$. Тогда $g^* \in (H \cap M)^\psi \setminus (H \cap F(G))^\psi_n$ и, очевидно, $g^* \in C_{(H \cap M)^\psi}(O_q((H \cap F(G))^\psi) = R$. Поскольку $(H \cap M)^\psi \supseteq R(H \cap \cap F(G))^\psi \neq (H \cap F(G))^\psi$, $R(H \cap F(G))^\psi \trianglelefteq H^\psi$ и, очевидно, $(H \cap M)^\psi / (H \cap F(G))^\psi$ — минимальный нормальный делитель группы $H^\psi/(H \cap \cap F(G))^\psi$, то $R(H \cap F(G))^\psi = (H \cap M)^\psi$. Следовательно, для некоторых $v \in R$ и $u \in (H \cap F(G))^\psi$ $h^\psi = vu$. Поскольку h^ψ и u индуцируют на $O_q((H \cap F(G))^\psi)$ посредством сопряжения один и тот же автоморфизм, а

$$(AF(G)/F(G))^{\varphi} \supseteq A^*D/D, \quad (BF(G)/F(G))^{\varphi} \supseteq B^*D/D. \qquad (21)$$

Покажем, что $D = F(G^*)$. Пусть это не так, $W/D \subseteq F(G^*)/D$ — минимальный нормальный делитель группы G^*/D и $(g_1, \ldots, g_n) \in W \setminus D$. Тогда $(W/D)^{\eta}$ — минимальный нормальный делитель группы $G/F(G)$ и, значит, при некотором k $(W/D)^{\eta} = M_k/F(G)$ и $((g_1, \ldots, g_n)D)^{\eta} \in (M_k/F(G)) \setminus \{F(G)\}$. Следовательно, $((g_1, \ldots, g_n)D)^{\eta} = (g_1D_1)^{\zeta_1^{-1}} = (g_kD_k)^{\zeta_k^{-1}} \in (M_k/F(G)) \setminus \{F(G)\}$. Поэтому, очевидно, $g_k \in (H_k \cap M_k)^{\psi_k} \setminus D_k$ и, значит, подгруппа $\langle g_k \rangle O_{q_k}(D_k)$ ненильпотентна. Но тогда ненильпотентна и подгруппа $\langle (g_1, \ldots, g_k, \ldots, g_n) \rangle O_{q_k}(D) \subseteq F(G^*)$. Противоречие. Из (21) и (20) вытекает (18). Теорема доказана.

Напомним, что для класса $\mathfrak{X}$ групп почти $\mathfrak{X}$-группа — конечное расширение $\mathfrak{X}$-группы.

Предложение 5. *Пусть $\mathfrak{X}$ — локальный класс групп, замкнутый относительно взятия подгрупп, такой, что в произвольной почти $\mathfrak{X}$-группе X произведение $\mathfrak{X}(X)$ всех нормальных $\mathfrak{X}$-подгрупп принадлежит $\mathfrak{X}$. Пусть некоторая группа G является расширением $\mathfrak{X}$-группы с помощью локально конечной группы и N — одна из максимальных среди нормальных $\mathfrak{X}$-подгрупп группы G, фактор-группы по которым локально конечны; Σ — локальная система почти $\mathfrak{X}$-подгрупп X группы G, для каждой из которых $|X : X \cap N| < \infty$. Тогда для любой $K \in \Sigma$ найдется $H \in \Sigma$, $H \supseteq K$, такая, что $K \cap \mathfrak{X}(H) = K \cap N$.*

Доказательство. Пусть для произвольной $K \in \Sigma$ $K^* = \bigcap_{R \in \Sigma,\, R \supseteq K} \mathfrak{X}(R)$; $N^* = \bigcup_{K \in \Sigma} K^*$. Легко видеть, что $K \cap N \subseteq K^* \trianglelefteq K$, $K^* \in \mathfrak{X}$, и для любой $H \in \Sigma$, содержащей K, $K^* \subseteq H^*$. Учитывая последнее, нетрудно убедиться в том, что $\{K^* \mid K \in \Sigma\}$ — локальная система множества N^*. Поэтому, как легко видеть, $N \subseteq N^* \trianglelefteq G$ и $N^* \in \mathfrak{X}$. Тогда вследствие максимальности N $N = N^*$. В таком случае $K \cap N \subseteq K^* \subseteq K \cap N^* = K \cap N$, т. е. $K^* = K \cap N$. Следовательно, поскольку $|K : K \cap N| < \infty$, найдутся $R_i \in \Sigma$, $R_i \supseteq K$, $i = 1, \ldots, n$, такие, что $K \cap N = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{X}(R_i)$. Пусть $H \in \Sigma$ — произвольная подгруппа, для которой $K_i \subseteq H$, $i = 1, \ldots, n$. Поскольку, очевидно, $R_i \cap \mathfrak{X}(H) \subseteq \mathfrak{X}(R_i)$, $i = 1, \ldots, n$, то $K \cap N \subseteq K \cap \mathfrak{X}(H) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} (R_i \cap \mathfrak{X}(H)) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{X}(R_i) = K \cap N$, т. е. $K \cap \mathfrak{X}(H) = K \cap N$.

Из теоремы Б. И. Плоткина, отмеченной выше, и предложения 5 вытекает такое предложение.

Предложение 6. *Пусть фактор-группа группы G по ее локально нильпотентному радикалу N локально конечна; Σ — некоторая локальная система подгрупп X группы G, для которых $|X : X \cap N| < \infty$. Тогда для любой $K \in \Sigma$ найдется $H \in \Sigma$, $H \supseteq K$, такая, что $K \cap R = K \cap N$, где R — локально нильпотентный радикал H.*

Предложение 7. *Пусть $\mathfrak{G}$ — класс групп, содержащий произвольную группу, у которой есть локальная система конечных разрешимых $\mathfrak{G}$-подгрупп, и вместе с каждыми двумя своими конечными разрешимыми группами все их подпрямые произведения. Пусть $H^{\psi} \in \mathfrak{G}$ для любых подгруппы $H \leq G$ и ее гомоморфизма ψ таких, что:* а) $F(G)_{\upsilon} \subseteq H = (H \cap A)(H \cap B)$ *и* подгруппа $\langle u\rangle O_q((H\cap F(G))^{\Psi})(\subseteq (H\cap F(G))^{\Psi})$ нильпотентна, то, как легко видеть, подгруппа $\langle h^{\Psi}\rangle O_q((H\cap F(G))^{\Psi})$ нильпотентна. Поэтому $\langle h^{\Psi}\rangle Q^{\Psi}$ нильпотентна. Следовательно, с учетом очевидного изоморфизма $\langle h^{\Psi}\rangle Q^{\Psi}\simeq$ $\simeq\langle\overline{h}\rangle\overline{Q}\,/\,\langle\overline{h}\rangle\overline{Q}\cap\overline{T}$, фактор-группа $\langle\overline{h}\rangle\overline{Q}\,/\,\langle\overline{h}\rangle\overline{Q}\cap\overline{T}$ нильпотентна. Далее, поскольку $\overline{h}\overline{Q}\in\overline{P}\overline{S}\overline{Q}$, то $\overline{T}\subseteq C_{\overline{H}}(\langle\overline{h}\rangle\overline{Q})$. Следовательно, $\langle\overline{h}\rangle\overline{Q}\cap$ $\cap\overline{T}\subseteq Z(\langle\overline{h}\rangle\overline{Q})$, а значит, подгруппа $\langle\overline{h}\rangle\overline{Q}$ нильпотентна. Тогда, поскольку $\langle\overline{h}\rangle$ — p-группа и Q — q-группа с $q\neq p$, $[\overline{h},\overline{Q}]=1$. Противоречие. Итак, выполняется условие 4.

Далее, ввиду (20) $(AF(G)/F(G))^{\zeta}\cap(BF(G)/F(G))^{\zeta}=1$. Следовательно, поскольку $H^{\Psi}/(H\cap F(G))^{\Psi}=((H\cap A)^{\Psi}(H\cap F(G))^{\Psi}/(H\cap F(G))^{\Psi})((H\cap$ $\cap B)^{\Psi}(H\cap F(G))^{\Psi}/(H\cap F(G))^{\Psi})$ и, очевидно, множители последнего разложения группы $H^{\Psi}/(H\cap F(G))^{\Psi}$ содержатся соответственно в $(AF(G)/F(G))^{\zeta}$ и $(BF(G)/F(G))^{\zeta}$, справедливы (19), т. е. выполняется условие 5.

Пусть $M_i/F(G)$, $i=1,\ldots,n$, — все минимальные нормальные делители группы $G/F(G)$; $\pi(M_i/F(G))=\{p_i\}$; H_i, q_i, ψ_i и ζ— такие же, как для M; $G_i=H_i^{\Psi_i}$, $A_i=(H_i\cap A)^{\Psi_i}$, $B_i=(H_i\cap B)^{\Psi_i}$, $D_i=(H_i\cap F(G))^{\Psi_i}$, $i=1,\ldots,n$;

$$\tilde{G}=\mathop{\times}_{i=1}^{n}G_i,\quad \tilde{A}=\mathop{\times}_{i=1}^{n}A_i,\quad \tilde{B}=\mathop{\times}_{i=1}^{n}B_i\quad\text{и}\quad D=\mathop{\times}_{i=1}^{n}D_i.$$

Нетрудно видеть, что $\tilde{G}=\tilde{A}\tilde{B}\in\mathfrak{X}$, $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ нильпотентны, $\tilde{A}\in\mathfrak{Y}$, $\tilde{B}\in\mathfrak{Z}$ и $D\in\mathfrak{V}$. Далее, как было показано выше, $H_i\cap F(G)=(H_i\cap F(G)\cap A)(H_i\cap$ $\cap F(G)\cap B)$ и $(AF(G)/F(G))^{\zeta_i}=A_iD_i/D_i$, $(BF(G)/F(G))^{\zeta_i}=B_iD_i/D_i$. Тогда, очевидно, $D_i=(D_i\cap A_i)(D_i\cap B_i)$, $i=1,\ldots,n$, и, вместе с тем, $D=$ $=(D\cap\tilde{A})(D\cap\tilde{B})$.

Пусть

$$G^*(\subseteq\tilde{G})=\left\{(g_1,\ldots,g_n)\,|\,g_i\in G_i,(g_iD_i)^{\zeta_i^{-1}}=(g_jD_j)^{\zeta_j^{-1}},i,j=1,\ldots,n\right\},$$

$$A^*=\left\{(g_1,\ldots,g_n)\,|\,g_i\in A_i,(g_iD_i)^{\zeta_i^{-1}}=(g_jD_j)^{\zeta_j^{-1}}\right\},$$

$$B^*=\left\{(g_1,\ldots,g_n)\,|\,g_i\in B_i,(g_iD_i)^{\zeta_i^{-1}}=(g_jD_j)^{\zeta_j^{-1}},i,j=1,\ldots,n\right\}.$$

Тогда $D\subseteq G^*\leq\tilde{G}$, $D\cap\tilde{A}\subseteq A^*\leq\tilde{A}$, $D\cap\tilde{B}\subseteq B^*\leq\tilde{B}$. Очевидно, $G^*\in\mathfrak{X}$, $A^*\in$ $\in\mathfrak{Y}$, $B^*\in\mathfrak{Z}$, подгруппы A^* и B^* нильпотентны и $D=(D\cap A^*)(D\cap B^*)$. Пусть $(g_1,\ldots,g_n)$ — произвольный элемент группы G^*; a и b — произвольные элементы соответственно подгрупп A и B, для которых $(abF(G))^{\zeta_1}=g_1D_1$; $a_i\in(aF(G))^{\zeta_i}\cap A_i$ и $b_i\in(bF(G))^{\zeta_i}\cap B_i$, $i=1,\ldots,n$. Тогда, как нетрудно убедиться, $(a_1,\ldots,a_n)\in A^*$, $(b_1,\ldots,b_n)\in B^*$ и

$$(g_1,\ldots,g_n)D=(a_1,\ldots,a_n)D\,(b_1,\ldots,b_n)D\subseteq A^*D\,B^*D.$$

Следовательно, $G^*=A^*D\,B^*D=A^*D\,B^*=A^*(D\cap A^*)(D\cap B^*)B^*=A^*B^*$.

Пусть для произвольного $(g_1,\ldots,g_n)\in G^*$ $((g_1,\ldots,g_n)D)^{\eta}=(g_1D_1)^{\zeta_1^{-1}}$. Нетрудно видеть, что η — изоморфизм G^*/D на $G/F(G)$. Тогда $\varphi=\eta^{-1}$ — изоморфизм $G/F(G)$ на G^*/D и

$|H : F(G)_{\upsilon}| < \infty$; б) $F(G)_{\upsilon} \subseteq \operatorname{Ker}\psi$; в) *при некотором* $p \in \mathbb{P}$ *одна из групп* $(H \cap A)^{\psi}$, $(H \cap B)^{\psi}$ *является* p-, *а другая* — p'-*группой. Тогда* $G/F(G)_{\upsilon} \in \mathfrak{G}$.

Доказательство. В силу утверждений 4 и 2 теоремы В G имеет локальную систему подгрупп H, удовлетворяющих условию а), и для каждой такой подгруппы H $F(G)_{\upsilon}$ совпадает с пересечением подгрупп $\operatorname{Ker}\psi$ по всем гомоморфизмам H, для которых выполняются условия б) и в). Вследствие теоремы Ремака конечная фактор-группа $H/F(G)_{\upsilon}$ изоморфна подпрямому произведению групп H^{ψ}. Поскольку $H^{\psi} \in \mathfrak{G}$ то, очевидно, $H/F(G)_{\upsilon} \in \mathfrak{G}$. В силу того, что конечные разрешимые подгруппы $H/F(G)_{\upsilon}$ образуют локальную систему группы $G/F(G)_{\upsilon}$, $G/F(G)_{\upsilon} \in \mathfrak{G}$.

Предложение 8. *Пусть* $\mathfrak{X}$ — *локальный класс групп, содержащий вместе с каждой своей периодической локальной разрешимой группой все ее конечные подгруппы, и* $G/F(G) \notin \mathfrak{X}$. *Тогда все подгруппы* $H \leq G$, *содержащие* $F(G)$, *такие, что* $H/F(H) \notin \mathfrak{X}$, $|H : F(G)| < \infty$ *и* $H = (H \cap A)(H \cap B)$, *образуют локальную систему группы* G, *и для каждой из них* $\pi(F(H)) = \pi(F(G))$.

Доказательство. Пусть $L/F(G)$ — произвольная конечная подгруппа группы $G/F(G)$. Поскольку $G/F(G)$ — периодическая локально разрешимая не $\mathfrak{X}$-группа и $\mathfrak{X}$ локален, то в $G/F(G)$ найдется конечная подгруппа $K/F(G) \notin \mathfrak{X}$. Зафиксируем ее. Тогда вследствие утверждения 4 теоремы В и предложения 6 найдется такая, как выше, подгруппа $H \supseteq \langle K, L \rangle$, для которой $K \cap F(H) = F(G)$. Поскольку, очевидно, $K/F(G) \hookrightarrow H/F(H)$, то $H/F(H) \notin \mathfrak{X}$. Подгруппы H, взятые по всем $L/F(G)$, очевидно, образуют локальную систему группы G. Если $\pi(F(H)) \neq \pi(F(G))$, то для $q \in \pi(F(H)) \setminus \pi(F(G))$ $O_q(H) \subseteq C_G(F(G))$. Но поскольку H радикальна, то $C_G(F(G)) \subseteq F(G)$ (Б. И. Плоткин, см., например, [19, с. 373, 374]). Противоречие. Предложение доказано.

Предложение 9. *Пусть* $\mathfrak{X}$ — *такой же класс групп, как в предложении* 8. *Тогда если* $\langle A^G \rangle F(G)/F(G) \notin \mathfrak{X}$, *то подгруппы* H *группы* G, *для которых* $\langle (H \cap A)^H \rangle F(H)/F(H) \notin \mathfrak{X}$, $F(G) \subseteq H = (H \cap A)(H \cap B)$ *и* $|H : F(G)| < \infty$, *образуют ее локальную систему, и для каждой из них* $\pi(F(H)) = \pi(F(G))$.

Доказательство. Пусть $\langle A^G \rangle F(G)/F(G) \notin \mathfrak{X}$. Тогда в $\langle A^G \rangle F(G)/F(G)$ найдется конечная подгруппа $K/F(G) \notin \mathfrak{X}$. Пусть $L/F(G)$ — произвольная конечная подгруппа группы $\langle A^G \rangle F(G)/F(G)$. Очевидно, для некоторых конечных подгрупп $M \subseteq A$ и $N \subseteq G$ $K/F(G)$, $L/F(G) \subseteq \langle M^N \rangle F(G)/F(G)$. Положим $\Sigma = \{X \mid F(G) \subseteq X = (X \cap A)(X \cap B) \leq G, |X : F(G)| < \infty\}$. Вследствие утверждения 4 теоремы В Σ — локальная система группы G. Поэтому для некоторой $R \in \Sigma$ $M, N \subseteq R$. Тогда, очевидно, $K/F(G)$, $L/F(G) \subseteq \langle (R \cap A)^R \rangle F(G)/F(G) \notin \mathfrak{X}$. Вследствие предложения 6 найдется $H \in \Sigma$ такая, что $R \subseteq H$ и $R \cap F(H) = F(G)$. Имеем

$$\langle (R \cap A)^R \rangle F(G) \cap F(H) = F(G)(\langle (R \cap A)^R \rangle \cap F(H)) = F(G) \quad \text{и}$$

$$\langle (H \cap A)^H \rangle F(H)/F(H) \supseteq \langle (R \cap A)^R \rangle F(H)/F(H) =$$

$$= \langle (R \cap A)^R \rangle F(G)F(H)/F(H) \simeq \langle (R \cap A)^R \rangle F(G)/(\langle (R \cap A)^R \rangle F(G) \cap F(H)) =$$

$$= \langle (R \cap A)^R \rangle F(G)/F(G) \notin \mathfrak{X}.$$

Следовательно, $\langle (H\bigcap A)^H\rangle F(H)/F(H)\notin \mathfrak{X}$ Легко убедиться в том, что подгруппы H, взятые по всем $L/F(G)$, образуют локальную систему группы G. Для каждой H $\pi(F(H))=\pi(F(G))$ (см. доказательство предложения 8).

Напомним, что класс $\mathfrak{X}$ групп называется радикальным, если он замкнут относительно взятия гомоморфных образов и нормальных подгрупп, и в произвольной группе G подгруппа $\mathfrak{X}(G)$, порожденная всеми ее нормальными $\mathfrak{X}$-подгруппами, принадлежит классу $\mathfrak{X}$; подгруппа $\mathfrak{X}(G)$ называется $\mathfrak{X}$-радикалом группы G (Б. И. Плоткин). В силу теоремы Б. И. Плоткина класс локально нильпотентных групп радикален.

Предложение 10. *Пусть G — группа, $\mathfrak{X}$ — радикальный класс групп (например, класс локально нильпотентных групп), $\{G_\iota \mid \iota\in I\}$ — локальная система некоторых подгрупп группы G, содержащих $\mathfrak{X}(G)$. Тогда $\mathfrak{X}(G)=$ $=\bigcap_{\iota\in I}\mathfrak{X}(G_\iota)$.*

Доказательство. Очевидно, $\mathfrak{X}(G)\subseteq\bigcap_{\iota\in I}\mathfrak{X}(G_\iota)$. Пусть $g\subseteq\bigcap_{\iota\in I}\mathfrak{X}(G_\iota)$. Легко видеть, что $\left\{\left\langle g^{G_\iota}\right\rangle \mid \iota\in I\right\}$ — локальная система подгруппы $\langle g^G\rangle$. Очевидно, $\left\langle g^{G_\iota}\right\rangle \trianglelefteq \mathfrak{X}(G_\iota)\in\mathfrak{X}$. Поэтому $\left\langle g^{G_\iota}\right\rangle\in\mathfrak{X}$, $\iota\in I$. Следовательно, в силу локальности класса $\mathfrak{X}$ $\langle g^G\rangle\in\mathfrak{X}$ и, значит, $g\in\langle g^G\rangle\subseteq\mathfrak{X}(G)$. Таким образом, $\bigcap_{\iota\in I}\mathfrak{X}(G_\iota)\subseteq\mathfrak{X}(G)$.

Лемма 4. *Пусть $G=AB$ — группа, $A,B\le G$, и $A\bigcap B\subseteq G_\iota=(G_\iota\bigcap$ $\bigcap A)(G_\iota\bigcap B)\le G$, $\iota\in I$. Тогда $A\bigcap_{\iota\in I}G_\iota=\bigcap_{\iota\in I}AG_\iota$ и $\left(\bigcap_{\iota\in I}G_\iota\right)A=$ $=\bigcap_{\iota\in I}G_\iota A$.*

Доказательство. Очевидно, $A\bigcap_{\iota\in I}G_\iota\subseteq\bigcap_{\iota\in I}AG_\iota$ и $A\,G_\iota=A(G_\iota\bigcap B)$, $\iota\in I$. Пусть $g\in\bigcap_{\iota\in I}AG_\iota$ и $\kappa,\lambda\in I$. Тогда для некоторых a_1, $a_2\in A$ и $b_1\in G_\kappa\bigcap B$, $b_2\in G_\lambda\bigcap B$ $g=a_1b_1=a_2b_2$, и $a_1^{-1}a_2=b_1b_2^{-1}\in A\bigcap B$. Поскольку $A\bigcap B\subseteq G_\lambda$, то $b_1\in(A\bigcap B)b_2\subseteq G_\lambda$. Следовательно, с учетом произвольности λ, $b_1\in\bigcap_{\lambda\in I}G_\lambda=\bigcap_{\iota\in I}G_\iota$, $g=a_1b_1\in A\bigcap_{\iota\in I}G_\iota$, и в силу произвольности g $\bigcap_{\iota\in I}AG_\iota\subseteq A\bigcap_{\iota\in I}G_\iota$. Аналогично устанавливается второе соотношение.

Лемма 5. *Пусть $G=AB$ — группа, $A,B\le G$; $\{G_\iota\mid\iota\in I\}$ — некоторая локальная система подгрупп группы G, содержащих $A\bigcap B$; $A\bigcap B\subseteq H_i=$ $=(H_\iota\bigcap A)(H_\iota\bigcap B)\le G_\iota$, $\iota\in I$, и $H_\iota(G_\iota\bigcap A)\trianglelefteq G_\iota$, $\iota\in I$. Пусть $\bigcap_{\iota\in I}H_\iota\trianglelefteq G$ и при любом $\lambda\in I$ $\bigcap_{\iota\in I}H_\iota=\bigcap_{\iota\in\Lambda}H_\iota$, где $\Lambda=\{\iota\in I\mid G_\lambda\subseteq G_\iota\}$. Тогда $\left(\bigcap_{\iota\in I}H_\iota\right)A\trianglelefteq G$.*

Доказательство. Пусть $u\in\left(\bigcap_{\iota\in I}H_\iota\right)A$, $g\in G$, $\lambda\in I$ — любое, при котором $u,g\in G_\lambda$. Тогда $u\in G_\lambda\bigcap H_\lambda A$. В силу леммы Дедекинда $G_\lambda\bigcap H_\lambda A=$ $=H_\lambda(G_\lambda\bigcap A)$. Следовательно, поскольку $H_\lambda(G_\lambda\bigcap A)\trianglelefteq G_\lambda$, то $u^g\in$ $\in H_\lambda(G_\lambda\bigcap A)\subseteq H_\lambda A\subseteq H_\iota A$, $\iota\in A$, и, значит, $u^g\in\bigcap_{\iota\in\Lambda}H_\iota A$. Поэтому вследствие леммы 4 $u^g\in\left(\bigcap_{\iota\in\Lambda}H_\iota\right)A=\left(\bigcap_{\iota\in I}H_\iota\right)A$. Тогда в силу произвольности u и g $\left(\bigcap_{\iota\in I}H_\iota\right)A\trianglelefteq G$.

Предложение 11. *Пусть $\{G_\iota\mid\iota\in I\}$ — некоторая локальная система под-*

групп группы G *таких, что* $F(G) \subseteq G_\iota = (G_\iota \cap A)(G_\iota \cap B)$ *и* $F(G_\iota)(A \cap G_\iota) \trianglelefteq$ $\trianglelefteq G_\iota$, $\iota \in I$. *Тогда* $AF(G) \trianglelefteq G$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{X}$ — класс всех локально нильпотентных групп и $H_\iota = F(G_\iota)$, $\iota \in I$. Поскольку для любого $\lambda \in I$ при $\Lambda = \{\iota \in I \mid G_\lambda \subseteq G_\iota\}$ $\{G_\iota \mid \iota \in \Lambda\}$ — локальная система группы G, то в силу предложения 10 $\bigcap_{\iota \in I} H_\iota = \bigcap_{\iota \in \Lambda} H_\iota = F(G)$. Вследствие утверждения 2 теоремы В $A \cap B \subseteq$ $\subseteq H_\iota = (H_\iota \cap A)(H_\iota \cap B)$. Поэтому в силу леммы 5 $AF(G) \trianglelefteq G$.

Теорема 2. *Пусть* $\mathfrak{G}$ — *локальный класс групп, содержащий вместе с любой своей периодической локально разрешимой группой все ее конечные подгруппы;* $\mathfrak{X}$ *и* $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ — *классы групп, содержащие вместе с любой своей локально разрешимой (соответственно, локально нильпотентной) периодической группой все подпрямые произведения любого конечного числа ее конечных секций. Пусть для всех конечных разрешимых групп* $G^* = A^*B^* \in \mathfrak{X}$ *с нильпотентными подгруппами* $A^* \in \mathfrak{Y}$ *и* $B^* \in \mathfrak{Z}$ *выполняется одно из условий:* а) $G^*/F(G^*) \in \mathfrak{G}$; б) $\langle A^{*G^*}\rangle F(G^*)/F(G^*) \in \mathfrak{G}$; в) $A^*F(G^*) \trianglelefteq G^*$. *Тогда для всех периодических локально разрешимых групп* $G = AB \in \mathfrak{X}$ *с локально нильпотентными подгруппами* $A \in \mathfrak{Y}$ *и* $B \in \mathfrak{Z}$, *удовлетворяющих хотя бы одному из условий* 1–3 *теорем* В–Е, *выполняется то же из условий* а)–в), *что и для групп* $G^* = A^*B^*$.

Доказательство. Пусть одно из условий а), б) выполняется для всех групп $G^* = A^*B^*$, но не выполняется для некоторых групп $G = AB$. Вследствие предложений 8 и 9 среди последних найдется G с $|G : F(G)| < \infty$. Пусть G^* — соответствующая G группа из теоремы 1. Тогда G^*, очевидно, удовлетворяет всем требованиям настоящей теоремы, и для некоторого изоморфизма φ фактор-группы $G/F(G)$ на фактор-группу $G^*/F(G^*)$ $(AF(G)/F(G))^\varphi =$ $= A^*F(G^*)/F(G^*)$. Понятно, что $(\langle A^G\rangle F(G)/F(G))^\varphi = \langle A^{*G^*}\rangle F(G^*)/F(G^*)$. Следовательно, каждое из условий а), б) выполняется для группы G тогда и только тогда, когда оно выполняется для группы G^*. Противоречие.

Пусть условие в) выполняется для всех групп $G^* = A^*B^*$, но не выполняется для некоторой группы $G = AB$. В силу утверждения 4 теоремы В G имеет локальную систему подгрупп $\{G_\iota \mid \iota \in I\}$, для каждой из которых $F(G) \subseteq G_\iota =$ $= (G_\iota \cap A)(G_\iota \cap B)$ и $|G_\iota : F(G)| < \infty$. Поскольку $AF(G) \ntrianglelefteq G$, то в силу предложения 11 для некоторого $\lambda \in I$ $(A \cap G_\lambda)F(G_\lambda) \ntrianglelefteq G_i$. Положим $\overline{G} = G_\lambda$ и $\overline{A} = A \cap G_\lambda$, $\overline{B} = B \cap G_\lambda$. Тогда $\overline{G} = \overline{A}\,\overline{B}$, $\overline{A}$ и $\overline{B}$ локально нильпотентны и $|\overline{G} : F(\overline{G})| < \infty$. Пусть в теореме 1 $G = \overline{G}$ и G^* — группа, построенная в доказательстве этой теоремы. Тогда G^* удовлетворяет всем требованиям настоящей теоремы, и для некоторого изоморфизма φ фактор-группы $\overline{G}/F(\overline{G})$ на $G^*/F(G^*)$ $\left(\overline{A}F(\overline{G})/F(\overline{G})\right)^\varphi = A^*F(G^*)/F(G^*)$. В таком случае, поскольку $A^*F(G^*)/F(G^*) \trianglelefteq G^*/F(G^*)$, то, очевидно, $\overline{A}F(\overline{G}) \trianglelefteq \overline{G}$. Противоречие. Теорема доказана.

Предложение 12. *Пусть* $G = AB$ — *конечная разрешимая группа,* $A, B \leq G$ *и* $A\Phi(G)/\Phi(G)$, $B\Phi(G)/\Phi(G)$ *нильпотентны;* $\mathfrak{X}$ — *класс групп, такой, что для любых конечной разрешимой группы* X *и* $Y, Z \trianglelefteq X$ *из* X/Y, $X/Z \in \mathfrak{X}$ *следует* $X/Y \cap Z \in \mathfrak{X}$. *Пусть для произвольного гомоморфизма* Ψ *группы* G

$G^\Psi \in \mathfrak{X}$ (соответственно, $\langle A^G\rangle^\Psi \in \mathfrak{X}$) каждый раз, когда выполняются следующие требования: 1) *при некотором $p \in \mathbb{P}$ или $|G^\Psi| \in \mathbb{P}$, или одна из подгрупп A^Ψ, B^Ψ является p-, а другая p'-группой;* 2) *$\Phi(G) \subseteq \operatorname{Ker}\psi$, $\Phi(G^\Psi) = 1$ и $\Phi(G^\Psi)$ — единственный минимальный нормальный делитель группы G^Ψ. Тогда $G/\Phi(G) \in \mathfrak{X}$ (соответственно, $\langle A^G\rangle\Phi(G)/\Phi(G) \in \mathfrak{X}$) и, если класс $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}$ замкнут относительно взятия фактор-групп, то $G/F(G) \in \mathfrak{X}$ (соответственно, $\langle A^G\rangle F(G)/F(G) \in \mathfrak{X}$)).*

Доказательство. Вследствие утверждений 1–3 предложения 1 [2] $\Phi(G)$ совпадает с пересечением подгрупп $\operatorname{Ker}\psi$ по всем ψ таким, как выше. Следовательно, $G/\Phi(G) \in \mathfrak{X}$ (соответственно $\langle A^G\rangle\Phi(G)/\Phi(G) \in \mathfrak{X}$).

Предложение 13. *Пусть $G = AB$ — конечная разрешимая группа, A* и *B — ее нильпотентные подгруппы и $\mathfrak{X}$ — такой же класс групп, как в предложении* 12. *Пусть для всех гомоморфных образов G^Ψ группы G, удовлетворяющих требованиям* 1, 2 *из предложения* 12, *выполняется одно из условий:* а) $G^\Psi/F(G^\Psi) \in \mathfrak{X}$; б) $\langle (A^\Psi)^{G^\Psi}\rangle F(G^\Psi)/F(G^\Psi) \in \mathfrak{X}$; в) $A^\Psi F(G^\Psi) \trianglelefteq G^\Psi$. *Тогда для группы G выполняется то же из условий* а)–в).

Доказательство. Пусть $F(G^\Psi) = H^\Psi$ и $\operatorname{Ker}\psi \subseteq H \trianglelefteq G$; K и L — пересечения подгрупп H и $\operatorname{Ker}\psi$ по всем ψ. Тогда K/L изоморфна подпрямому произведению нильпотентных групп $H/\operatorname{Ker}\psi$. Следовательно, K/L нильпотентна. Очевидно, $F(G) \subseteq K$. Поскольку вследствие утверждений 1–3 предложения 1 [2] $L = \Phi(G)$, $L = F(G)$, то в силу теоремы Гашюца K нильпотентна. Следовательно, $K = F(G)$. Далее, группа G/K (соответственно, группа $\langle A^G\rangle K/K$) изоморфна подпрямому произведению групп G/H (соответственно, $\langle A^G\rangle H/H$), взятых по всем ψ.

Пусть выполняется условие а) (соответственно, б)). Поскольку $G/H \simeq \simeq G^\Psi/F(G^\Psi) \in \mathfrak{X}$ (соответственно, $\langle A^G\rangle H/H \simeq \langle A^G\rangle^\Psi F(G^\Psi)/F(G^\Psi) \in \mathfrak{X}$), то $G/F(G) \in \mathfrak{X}$ (соответственно, $\langle A^G\rangle F(G)/F(G) \in \mathfrak{X}$).

Пусть выполняется условие в). Поскольку для пересечения R подгрупп $\langle A^G\rangle H$ по всем ψ фактор-группа R/K, очевидно, нильпотентна, то $A \subseteq R \subseteq \subseteq F_2(G)$. Поэтому вследствие утверждения и предложения 2 [2] $AF(G) \trianglelefteq G$.

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ и $\mathfrak{Z}$ — такие же, как в теореме* 2, *и класс $\mathfrak{G} \cap \mathfrak{S} \cap \mathfrak{F}$ замкнут по фактор-группам и вместе с любыми двумя своими группами содержит все их подпрямые произведения. Пусть для всех отличных от единицы конечных разрешимых групп $G^* = A^*B^* \in \mathfrak{X}$ с $\Phi(G^*) = 1$, единственным минимальным нормальным делителем $F(G^*)$, нильпотентными подгруппами $A^* \in \mathfrak{Y}$ и $B^* \in \mathfrak{Z}$, одна из которых является p-, а другая p'-группой, где $\{p\} = \pi(F(G^*))$, выполняется одно из условий:* а) $G^*/F(G^*) \in \in \mathfrak{G}$; б) $\langle A^{*G^*}\rangle F(G^*)/F(G^*) \in \mathfrak{G}$; в) $A^*F(G^*) \trianglelefteq G^*$. *Тогда для всех периодических локально разрешимых групп $G = AB \in \mathfrak{X}$ с локально нильпотентными подгруппами $A \in \mathfrak{Y}$ и $B \in \mathfrak{Z}$, удовлетворяющих хотя бы одному из требований* 1–3 *теорем* B–E (*см. с.* 1698) *выполняется то же из условий* а)–в), *что и для групп $G^* = A^*B^*$.*

Доказательство. Вследствие предложения 13 для произвольной конечной

$A^*F(G^*) \trianglelefteq G^*$. Поэтому вследствие теоремы 2 $AF(G) \trianglelefteq G$, в силу чего $l_{\mathfrak{N}}(G) \leq 3$.

6. Пусть $\mathfrak{G}$ — класс всех радикальных групп с $l_{\mathfrak{N}}(X) \leq 2\max_{p \in \mathbb{P}}(t_p) - 1$ и $\mathfrak{X}$ — класс всех групп; $\mathfrak{Y}$ — класс всех периодических локально нильпотентных групп X с $\exp(X_p) \leq \exp(A_p)$, $p \in \mathbb{P}$; в случае, когда B_2 абелева, $\mathfrak{Z}$ — класс всех периодических локально нильпотентных групп X с абелевой X_2, и в случае, когда B_2 неабелева, $\mathfrak{Z}$ — класс всех групп; $G^* = A^*B^*$ — произвольная конечная разрешимая группа с нильпотентными подгруппами $A^* \in \mathfrak{Y}$ и $B^* \in \mathfrak{Z}$. Тогда в силу утверждения 1 теоремы 1 [2] $\left\langle A^{*G^*} \right\rangle F(G^*)/F(G^*) \in \mathfrak{G}$. Поэтому вследствие теоремы 2 $\langle A^G \rangle F(G)/F(G) \in \mathfrak{G}$ и, вместе с этим, $l_{\mathfrak{N}}(\langle A^G \rangle) \leq 2\max_{p \in \mathbb{P}}(t_p)$. Отсюда вытекает, что $l_{\mathfrak{N}}(G) \leq 2\max_{p \in \mathbb{P}}(t_p) + 1$. Теорема доказана.

***Замечание* 3.** Из доказательства утверждений 2 и 3 теоремы D вытекает, что неравенства для $d(G/F(G)_{\upsilon})$ будут выполняться, если n и m заменить на $\min(d_1, d_2)$ и $\max(d_1, d_2)$, где $d_1 = d(AF(G)_{\upsilon}/F(G)_{\upsilon})$ и $d_2 = d(BF(G)_{\upsilon}/F(G)_{\upsilon})$, или на величины из утверждения 3, взятые от $c(AF(G)_{\upsilon}/F(G)_{\upsilon})$ и $c(BF(G)_{\upsilon}/F(G)_{\upsilon})$.

Доказательство теоремы E. Покажем, что $\left\langle A_p^G \right\rangle^{\Psi} \cap \left\langle A_{p'}^G \right\rangle^{\Psi} = 1$, $p \in \mathbb{P}$. Пусть это не так; $g \in G$ и $g^{\Psi} \in \left\langle A_p^G \right\rangle^{\Psi} \cap \left\langle A_{p'}^G \right\rangle^{\Psi}$, $g^{\Psi} \neq 1$; $X, Y, Z \subseteq G$, $U \subseteq A_p$ и $V \subseteq A_{p'}$ — конечные, причем $g^{\Psi} \in \left\langle U^Y \right\rangle^{\Psi} \cap \left\langle V^Z \right\rangle^{\Psi}$. В силу утверждения 4 теоремы B найдется подгруппа $K \leq G$ такая, что $\langle g \rangle$, $X, Y, Z, U, V, F(G) \subseteq K = (K \cap A)(K \cap B)$ и $|K : F(G)| < \infty$. Пусть $\overline{G} = K$, $\overline{A} = K \cap A$, $\overline{B} = K \cap B$ и в теореме 1 $G = \overline{G}$, $A = \overline{A}$, $B = \overline{B}$, а ζ и ξ — естественные гомоморфизмы групп $\overline{G}$ и G^* на фактор-группы $\overline{G}/F(\overline{G})$ и $G^*/F(G^*)$. Очевидно, $g^{\zeta} \in \left\langle (\overline{A})_p^{\overline{G}} \right\rangle^{\zeta} \cap \left\langle (\overline{A})_p^{\overline{G}} \right\rangle^{\zeta}$. Поскольку вследствие утверждения 2 теоремы [4] $\left\langle (A^*)_p^{G^*} \right\rangle^{\xi} \cap \left\langle (A^*)_{p'}^{G^*} \right\rangle^{\xi} = 1$, то ввиду теоремы 1 $\left\langle (\overline{A})_p^{\overline{G}} \right\rangle^{\zeta} \cap \left\langle (\overline{A})_p^{\overline{G}} \right\rangle^{\zeta} = 1$. Следовательно, $g^{\zeta} = 1$, $g \in F(\overline{G})$ и, вместе с тем, $\langle g^X \rangle$ локально нильпотентна. Поэтому ввиду произвольности X $\langle g^G \rangle$ локально нильпотентна. В таком случае, $g \in F(G)$ и $g^{\Psi} = 1$. Противоречие. Следовательно, выполняется первое из соотношений (14); второе из них справедливо в силу теоремы C (см. второе из соотношений (4)). Точно так же $\left\langle B_p^G \right\rangle^{\Psi} \cap \left\langle B_{p'}^G \right\rangle^{\Psi} = 1$, $p \in \mathbb{P}$.

Далее, пусть $g \in R_{pp}$. Тогда с учетом (14) для некоторых $a \in A_p^{\Psi}$, $b \in B_{p'}^{\Psi}$ и $b_1 \in B_p^{\Psi}$, $a_1 \in A_{p'}^{\Psi}$ $g = ab = b_1 a_1$. В таком случае, $b_1^{-1}a = a_1 b^{-1} \in B_p^{\Psi} A_p^{\Psi} \cap A_{p'}^{\Psi} B_{p'}^{\Psi}$. В силу утверждений 2 и 5 теоремы B $A^{\Psi} \cap B^{\Psi} = 1$, $B_p^{\Psi} A_p^{\Psi}$ и $A_{p'}^{\Psi} B_{p'}^{\Psi}$, соответственно p- и p'-группы. Таким образом, $b_1^{-1}a = a_1 b^{-1} = 1$ и, значит, $a = b_1 \in A^{\Psi} \cap B^{\Psi} = 1$, $b = a_1 \in A^{\Psi} \cap B^{\Psi} = 1$ и $g = ab = 1$. Следовательно, $1 = R_{pp} = D_{pp}$. Теперь можно утверждать, что справедливо первое из соотношений (15) (см. доказательство предложения 5 [4]).

Пусть $R_{pq} \neq 1$ и $g \in R_{pq}$. Тогда $p \neq q$. В силу (14) для некоторы х $a_p \in A_p^{\Psi}$, разрешимой группы $G^* = A^*B^* \in \mathfrak{X}$ с нильпотентными подгруппами $A^* \in \mathfrak{Y}$ и $B^* \in \mathfrak{Z}$ выполняется соответствующее из условий а)–в). Поэтому в силу теоремы 2 это же условие выполняется и для группы G.

***Доказательство теоремы* D.** 1. Если $\alpha \neq 0$, то утверждение 1 справедливо вследствие утверждения 3 теоремы 1 из [3].

Пусть $\alpha = 0$, $\mathfrak{G}$ — класс всех радикальных групп X с $l_{\mathfrak{N}}(\mathfrak{G}) \leq 2n-1$, $\mathfrak{X} = \mathfrak{Z}$ — класс всех групп и $\mathfrak{Y}$ — класс всех разрешимых ступени $\leq n$ групп; $G^* = A^*B^*$ — произвольная конечная разрешимая группа с нильпотентными подгруппами $A^* \in \mathfrak{Y}$ и $B^* \in \mathfrak{Z}$. Вследствие леммы 3 [1] $\mathfrak{G}$ локален. В силу утверждения 2 теоремы 1 [2] $\left\langle A^{*G^*} \right\rangle F(G^*)/F(G^*) \in \mathfrak{G}$. Поэтому вследствие теоремы 1 $\langle A^G \rangle F(G)/F(G) \in \mathfrak{G}$ и, значит, $l_{\mathfrak{N}}(\langle A^G \rangle) \leq 2n$, $A \subseteq F_{2n}(G)$. Тогда $G = F_{2n}(G)B$, и фактор-группа $G/F_{2n}(G) \simeq B/B \cap F_{2n}(G)$ локально нильпотентна. Поэтому $l_{\mathfrak{N}}(G) \leq 2n+1$. В случае, когда $d(A)$, $d(B) \leq n$, $A, B \subseteq F_{2n}(G)$ и, значит, $G = AB = F_{2n}(G)$ и $l_{\mathfrak{N}}(G) \leq 2n$.

2. Пусть $\mathfrak{G}$ — класс всех разрешимых ступени $\leq mn + n(n+1)/2 + m$, а в случае, когда A_2 и B_2 — абелевы, класс всех разрешимых ступени $\leq mn + m$ групп. Тогда вследствие предложений 3 и 7 $G/F(G)_{\upsilon} \in \mathfrak{G}$ и, значит, справедливы неравенства для $d(G/F(G)_{\upsilon})$. Пусть $\mathfrak{G}$ — класс всех разрешимых ступени $\leq mn + n(n+1)/2$, а в отмеченном случае — ступени $\leq mn$ групп; $\mathfrak{X}$ — класс всех групп, $\mathfrak{Y}$ и $\mathfrak{Z}$ — классы всех разрешимых ступени $\leq n$ и $\leq m$ периодических локально нильпотентных групп, а в случае, когда A_2 и B_2 — абелевы, — подклассы, состоящие из всех их групп с абелевой силовской 2-подгруппой; $G^* = A^*B^*$ — произвольная конечная разрешимая группа с нильпотентными подгруппами $A^* \in \mathfrak{Y}$ и $B^* \in \mathfrak{Z}$. Ввиду утверждения 2 теоремы A $G^*/F(G^*) \in \mathfrak{G}$. Поэтому вследствие теоремы 2 $G/F(G) \in \mathfrak{G}$ и, значит, справедливы неравенства для $G/F(G)$.

3. Поскольку для произвольной нильпотентной группы X $d(X) \leq [\log_2 \max c(X)] + 1$, то вследствие утверждения 2 выполняются неравенства из него. Пусть $\mathfrak{G}$ — класс всех разрешимых ступени $\leq c(A) + c(B)$ групп. Поскольку согласно соответствующей теореме Ф. Холла–Хигмэна [7] для произвольной конечной разрешимой группы $G^* = A^*B^*$ с нильпотентными подгруппами A^* и B^* взаимно простых порядков $d(G^*) \leq c(A^*) + c(B^*)$ и, вместе с тем, $d(G^*/F(G^*)) \leq c(A^*) + c(B^*) - 1$, то последние неравенства справедливы соответственно вследствие предложения 7 и теоремы 2.

4. Пусть $\mathfrak{G}$ — класс всех разрешимых ступени $\leq l = \max(d(A), d(B), c(A) + c(B) - 1)$ групп, $\mathfrak{X}$ — класс всех периодических групп, которые не имеют элементов простых нечетных порядков $< p$, $\mathfrak{Y}$ и $\mathfrak{Z}$ — классы всех периодических нильпотентных групп X с абелевой X_2 и соответственно с $c(X) \leq c(A)$, $d(X) \leq d(A)$ и $c(X) \leq c(B)$, $d(X) \leq d(B)$; $G^* = A^*B^*$ — произвольная конечная разрешимая группа из $\mathfrak{X}$ с нильпотентными подгруппами $A^* \in \mathfrak{Y}$ и $B^* \in \mathfrak{Z}$. Если G^* ненильпотентна, то в силу утверждения 3 теоремы A $d(G^*/F(G^*)) \leq l$, а если нильпотентна, то $d(G^*/F(G^*)) = 1 \leq l$. Таким образом, $G^*/F(G^*) \in \mathfrak{G}$. Поэтому вследствие теоремы 2 $G/F(G) \in \mathfrak{G}$, т. е. $d(G/F(G)) \leq l$.

5. В силу утверждения 4 теоремы A у произвольной конечной разрешимой группы $G^* = A^*B^*$ с нильпотентными подгруппами A^* и B^* и с теми же ограничениями на A_p^*, что и на A_p в утверждении 5 настоящей теоремы,

$b \in B^{\Psi}$ и $b_q \in B_q^{\Psi}$, $a \in A^{\Psi}$ $g = a_p b = a b_q$. Тогда $b b_q^{-1} = a_p^{-1} a \in A^{\Psi} \cap B^{\Psi} = 1$, а значит $b = b_q \in B_q^{\Psi}$ и $g = a_p b \in A_p^{\Psi} B_q^{\Psi}$. Следовательно, $R_{pq}, D_{pq} \trianglelefteq A_p^{\Psi} B_q^{\Psi}$. Поэтому в силу леммы 2.13 [8] и утверждения 5 теоремы B выполняются соотвественно вторые из соотношений (15), (16) и последние из них. Вторые из (17) имеет место в силу теоремы C (см. соотношение (3)). На основании утверждения 2 теоремы B и (16) $A \cap B \subseteq F(G) = (F(G) \cap A)(F(G) \cap B)$ и $H^{\Psi} = (H^{\Psi} \cap A^{\Psi})(H^{\Psi} \cap B^{\Psi})$. Поэтому ввиду леммы [4] выполняются первые из (17). Теорема доказана.

1. *Черников Н. С.* Периодические локально разрешимые группы, факторизуемые двумя локально нильпотентными подгруппами // Вопр. алгебры (Гомель). – 1997. – **11**. – С. 90–115.
2. *Черников Н. С.* О конечных разрешимых группах, разложимых в произведение двух нильпотентных подгрупп // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 6. – С. 809–819.
3. *Черников Н. С.* О периодических локально разрешимых группах, разложимых в произведение двух локально нильпотентных подгрупп // Там. же. – № 7. – С. 965–970.
4. *Черников Н. С.* Свойства конечной группы, представимой в виде произведения двух нильпотентных подгрупп // Там же. – 2001. – **53**, № 4. –С. 531–541.
5. *Беляев В. В.* Локально конечные группы Шевалле // Исследования по теории групп. – Свердловск: Изд. Ин-та математики и механики УрО АН СССР, 1984. – С.39–50.
6. *Чунихин С. А.* Подгруппы конечных групп. – Минск: Наука и техника, 1964. – 168 с.
7. *Hall Ph., Higman G.* On the p-length of p-soluble groups and reduction theorems for Burnside's problem // Proc. London Math. Soc. – 1956. – **6**, № 21. – P. 1–42.
8. *Черников Н. С.* Группы, разложимые в произведение перестановочных подгрупп. – Киев: Наук. думка, 1987. – 206 с.
9. *Брюханова Е. Г.* Связь между 2-длиной и производной длиной силовской 2-подгруппы в конечной группе // Мат. заметки. – 1981. – **29**, № 2. – С. 161–170.
10. *Amberg B., Franciosi S., de Giovanni F.* Products of groups. – Oxford: Clarendon Press, 1992. – 220 p.
11. *Huppert B.* Endliche Gruppen. I. – Berlin etc.: Springer, 1967. – 793 S.
12. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. – М.: Наука, 1972. – 240 с.
13. *Hartley B.* Sylow theory in locally finite groups // Compos. Math. – 1972. – **25**, № 3. – P. 263–280.
14. *Черников Н. С.* Факторизация бесконечных групп попарно перестановочными подгруппами // Строение групп и их подгрупповая характеризация. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1984. – С. 47–66.
15. *Kegel O. H.* Produkte nilpotenten Gruppen // Arch. Math. – 1961. – **12**, № 2. – S. 90–93.
16. *Wielandt H.* Über Produkte von nilpotenten Gruppen // Ill. J. Math. – 1968. – **2**, № 4B. – S. 611–618.
17. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
18. *Черников Н. С* Обобщенно разрешимые группы, факторизуемые подгруппами конечного специального ранга // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Т. 4. – Екатеринбург: Ин-т математики и механики УрО РАН, 1996. – С. 83–117.
19. *Плоткин Б. И.* Группы автоморфизмов алгебраических систем. – М.: Наука, 1966. – 604 с.

Получено 13.08.2001