УДК 517.5

А. А. Лигун, А. А. Шумейко (Днепродзержин. техн. ун-т)

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫХ ВЕСОВЫХ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛАХ НА КЛАССАХ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

A problem of asymptotically optimal quadrature formulas with continuous weight function on classes of differentiable functions is investigated.

Досліджується задача про асимптотично оптимальні квадратурні формули з неперервною ваговою функцією на класах диференційовних функцій.

Введем в рассмотрение наборы индексов $Q_r = \{0, 1, \ldots, r\}$, $I = (I_0, I_1)$, $I_i \subset Q_r$, $i = 0, 1$, наборы коэффициентов

$$\mathcal{A}_n^{\mu} = \left\{\left\{a_{i,\nu}\right\}_{i=1}^{n-1}\right\}_{\nu=0}^{\mu-1}, \quad 1 \le \mu \le r,$$

$$\mathcal{B} = (\mathcal{B}_0(I_0), \mathcal{B}_1(I_1)) \quad (\mathcal{B}_i(I_i) = \left\{b_{\nu,i}\right\}_{\nu \in I_i},\ i = 0, 1),$$

и пусть $\Delta_n = \left\{0 = x_{0,n} < x_{1,n} < \cdots < x_{n,n} = 1\right\}$ — произвольное разбиение отрезка $[0, 1]$.

Выражение вида

$$\mathcal{L}\left(f, \mathcal{A}_n^{\mu}, \Delta_n\right) + \mathcal{L}_0(f, \mathcal{B}_0) + \mathcal{L}_1(f, \mathcal{B}_1), \tag{1}$$

где

$$\mathcal{L}\left(f, \mathcal{A}_n^{\mu}, \Delta_n\right) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{\nu=0}^{\mu-1} a_{i,\nu} f^{(\nu)}\left(x_{i,n}\right), \qquad \mathcal{L}_j\left(f, \mathcal{B}_j\right) = \sum_{\nu \in I_j} b_{\nu,j} f^{(\nu)}(j), \quad j = 0, 1,$$

называется квадратурной формулой или формулой приближенного вычисления интеграла от функции $f(x)$.

Для фиксированного веса $\rho(x)$ через

$$R\left(f, \rho, \mathcal{A}_n^{\mu}, \mathcal{B}, I, \Delta_n\right) = \left|\int_0^1 \rho(x) f(x) dx - \mathcal{L}\left(f, \mathcal{A}_n^{\mu}, \Delta_n\right) - \mathcal{L}_0(f, \mathcal{B}_0) - \mathcal{L}_1(f, \mathcal{B}_1)\right|$$

обозначим погрешность весовой квадратурной формулы (1). Рассмотрим величину

$$R_{n,\mu}(\mathfrak{M}, \rho, I) = \inf_{\mathcal{A}_n^{\mu}; \mathcal{B}(I); \Delta_n} \sup_{f \in \mathfrak{M}} R\left(f, \rho, \mathcal{A}_n^{\mu}, \mathcal{B}, I, \Delta_n\right).$$

Если существует весовая квадратурная формула, на которой достигается нижняя грань, то такая квадратурная формула называется оптимальной квадратурной формулой для веса $\rho(x)$ на классе функций $\mathfrak{M}$ среди формул вида (1).

Многие широко используемые квадратурные формулы строятся на основе сумматорных формул, т. е. выражений вида

$$s(f, x) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{\nu=0}^{\mu-1} f^{(\nu)}\left(x_{i,n}\right) l_{i,\nu}(x), \tag{2}$$

где $l_{i,\nu}(x)$ — некоторые фиксированные интегрируемые функции.

В этом случае полагают

$$\int_0^1 \rho(x) f(x) dx \approx \int_0^1 \rho(x) s(f, x) dx.$$

Тогда получаем весовую квадратурную формулу

$$\mathcal{L}(s(f)) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{\nu=0}^{\mu-1} a_{i,\nu} f^{(\nu)}(x_{i,n}),$$

порожденную сумматорной формулой (2).

Коэффициенты $a_{i,\nu}$ этой квадратурной формулы имеют вид

$$a_{i,\nu} = \int_0^1 \rho(x) l_{i,\nu}(x) dx, \quad i = \overline{0, n-1}, \quad \nu = \overline{0, \mu-1}. \tag{3}$$

Выбирая в качестве $s(f, x)$ интерполяционные кусочно-постоянные функции или интерполяционные ломаные, получаем соответственно квадратурную формулу прямоугольников и трапеций.

В данной работе мы рассмотрим задачу оптимизации по узлам весовых квадратурных формул, порожденных сплайнами.

Пусть $\mathbb{S}_{r,\mu}(\Delta_n)$ — множество всех сплайнов порядка r дефекта μ по разбиению Δ_n, т. е. множество всех функций $s(x)$, совпадающих на каждом из интервалов $(x_{i,n}, x_{i+1,n})$, $i = \overline{0, n-1}$, с алгебраическим полиномом степени не выше r и таких, что

$$s^{(\nu)}(x_{i,n} + 0) = s^{(\nu)}(x_{i,n} - 0) = s^{(\nu)}(x_{i,n}), \quad i = \overline{1, n-1}, \quad \nu = \overline{0, r-\mu}.$$

Наряду с множествами индексов I_i введем в рассмотрение множества индексов $J = (J_0, J_1)$, где $J_i = \{\nu \mid \nu \in \overline{0, r}, r - \nu \in I_i\}$, $i = 0, 1$.

Рассмотрим разбиение

$$\nabla_N = \{0 = t_{0,N} < t_{1,N} < \cdots < t_{N,N} = 1\}$$

и наряду с набором дефектов $\overline{\Omega}_n^\mu = (\Delta_n, \mu)$ интерполяционный набор $\Omega_N^\sigma = (\Delta_N, \sigma)$, где $1 \le \sigma \le r$.

Сплайн

$$s(f, x) = s_r\left(f, \overline{\Omega}_n^\mu, \Omega_N^\sigma, I, x\right) = s_{r,\mu}\left(f, \Delta_n, \Omega_N^\sigma, I, x\right) \in \mathbb{S}_{r,\mu}(\Delta_n)$$

назовем интерполяционным для функции f по набору $\left(\Omega_N^\sigma, I\right)$, если

$$s^{(\nu)}\left(f, t_{j,N} + 0\right) = s^{(\nu)}\left(f, t_{j,N} - 0\right) = f^{(\nu)}\left(t_{j,N}\right), \quad j = \overline{1, N-1}, \quad \nu = \overline{0, \sigma-1},$$

и выполняются граничные условия $s^{(\nu)}(f, i) = f^{(\nu)}(i)$, $\nu \in I_i$, $i = 0, 1$.

Пространство $\mathbb{S}_r\left(\overline{\Omega}_n^\mu\right) = \mathbb{S}_{r,\mu}(\Delta_n)$ будем называть интерполяционным для набора (Ω_N^σ, I), если для каждой функции $f \in C^r$ существует единственный интерполяционный сплайн $s_r\left(f, \overline{\Omega}_n^\mu, \Omega_N^\sigma, I, x\right)$.

Каждый интерполяционный сплайн $s_r\left(f, \overline{\Omega}_n^\mu, \Omega_N^\sigma, I\right)$ порождает весовую квадратурную формулу $\mathcal{L}\left(s_r\left(f, \overline{\Omega}_n^\mu, \Omega_N^\sigma, I\right)\right)$ с коэффициентами, определяемыми равенствами (3). Здесь $l_{i,\nu}$ — фундаментальные интерполяционные сплайны.

Пусть $R\left(f, \rho, s_r\left(f, \overline{\Omega}_n^\mu, \Omega_N^\sigma, I\right)\right)$ — погрешность этой квадратурной формулы,

$$R\left(\mathfrak{M}, \rho, s_r\left(\overline{\Omega}_n^\mu, \Omega_N^\sigma, I\right)\right) = \sup_{f \in \mathfrak{M}} R\left(f, \rho, s_r\left(\overline{\Omega}_n^\mu, \Omega_N^\sigma, I\right)\right)$$

— погрешность весовой квадратурной формулы, порожденной интерполяционными сплайнами $s_r\left(\overline{\Omega}_n^{\mu}, \Omega_N^{\sigma}, I\right)$ на классе функций $\mathfrak{M}$, а

$$R_n\left(\mathfrak{M}, \rho, s_{r,\mu}\left(\Omega_N^{\sigma}, I\right)\right) = \inf_{\Delta_n} R\left(\mathfrak{M}, \rho, s_r\left(\overline{\Omega}_n^{\mu}, \Omega_N^{\sigma}, I\right)\right)$$

— погрешность оптимальной весовой квадратурной формулы (если она существует) на классе функций $\mathfrak{M}$.

Последовательность разбиений $\left\{\Delta_n^*\right\}_{n=1}^{\infty}$ будем называть асимптотически оптимальной для класса $\mathfrak{M}$, веса $\rho(x)$ и сплайн-оператора $s_r\left(\overline{\Omega}_n^{\mu}, \Omega_N^{\sigma}, I\right)$, если при $n \to \infty$ выполняется соотношение

$$R\left(\mathfrak{M}, \rho, s_{r,\mu}\left(\Delta_n^*, \Omega_N^{\sigma}, I\right)\right) = R_n\left(\mathfrak{M}, \rho, s_{r,\mu}\left(\Omega_N^{\sigma}, I\right)\right)(1+o(1)).$$

Пусть для $p \in (0, \infty)$

$$\| f \|_{p[0,1]} = \| f \|_p = \left(\int_0^1 | f(x)|^p\, dx\right)^{1/p}.$$

Введем обычным образом (см., например, [1]) пространства L_p, $p \in [1, \infty]$, C и классы L_p^r, C^r, W_p^r, $p \in [1, \infty]$. Через V^r обозначим множество функций $f(x)$, у которых $(r-1)$-я производная абсолютно непрерывна на $[0, 1]$ и $f^{(r)}$ имеет конечную вариацию.

Введем необходимые в дальнейшем обозначения:

$$\mathbb{E}\left(f, \mathbb{S}_r\left(\overline{\Omega}_n^{\mu}\right), I\right)_p = \inf\left\{\| f-s \|_p \mid s \in \mathbb{S}_r\left(\overline{\Omega}_n^{\mu}\right);\ f^{(\nu)}(i) = s^{(\nu)}(i),\ \nu \in I_i,\ i = 0,1\right\}$$

и

$$\mathbb{E}_n\left(f, \mathbb{S}_{r,\mu}, I\right)_p = \inf_{\Delta_n} \mathbb{E}\left(f, \mathbb{S}_r\left(\overline{\Omega}_n^{\mu}\right), I\right)_p.$$

Следующее утверждение известно в теории квадратурных формул как метод сведения погрешности квадратурной формулы к задаче минимизации нормы моносплайна. При малых r и $\rho(x) \equiv 1$ это утверждение было установлено С. М. Никольским (см., например, [2]) и в общем случае при $\rho(x) \equiv 1$ приведено в „Добавлении" Н.П. Корнейчука к книге [2]. Для произвольного непрерывного веса доказательство аналогично.

Теорема А. *При всех* $n, r = 1, 2, \ldots$, $p \in [1, \infty]$ *и для любого веса* $\rho(x) \in L$ *справедливо равенство*

$$R_{n,\mu}\left(W_p^{r+1}, \rho, I\right) = \mathbb{E}_n\left(\rho_{r+1}, \mathbb{S}_{r,\mu}, J\right)_q,$$

где $1/p + 1/q = 1$ *и* $\rho_r(x)$ *— любой* r*-й интеграл функции* $\rho(x)$, *например, такой, что* $\rho_r^{(\nu)}(0) = 0$, $\nu = \overline{0, r-1}$.

Приведем аналог этого утверждения для весовых квадратурных формул, порожденных интерполяционными сплайнами.

Теорема 1. *Пусть наборы* $\overline{\Omega}_n^{\mu}$, Ω_N^{σ} *и* I, J *таковы, что пространство* $\mathbb{S}_r\left(\overline{\Omega}_n^{\mu}\right)$ *является интерполяционным по набору* $\left(\Omega_N^{\sigma}, I\right)$, *а пространство* $\mathbb{S}_r\left(\Omega_N^{\sigma}\right)$ *— интерполяционным по набору* $\left(\overline{\Omega}_n^{\mu}, J\right)$. *Тогда для любого веса* $\rho(x) \in L$ *и* $p \in [1, \infty]$ *справедливо равенство*

$$R\left(W_p^{r+1}, \rho, s_r\left(\overline{\Omega}_n^{\mu}, \Omega_N^{\sigma}, I\right)\right) = \left\| \rho_{r+1} - s_r\left(\rho_{r+1}, \Omega_N^{\sigma}, \overline{\Omega}_n^{\mu}, J\right)\right\|_q, \quad p^{-1} + q^{-1} = 1,$$

и среди всех квадратурных формул

$$\mathcal{L}\left(s_r\left(f, \overline{\Omega}_n^{\mu}, \Omega_N^{\sigma}, I\right)\right) = \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{\nu=0}^{\mu-1} a_{i,\nu} f^{(\nu)}\left(t_{i,N}\right) + \sum_{j=0}^{1}\sum_{\nu\in I_j} b_{\nu,j} f^{(\nu)}(j), \tag{4}$$

порожденных сплайнами $s_r\left(f, \overline{\Omega}_n^{\mu}, \Omega_N^{\sigma}, I\right)$, *оптимальная квадратурная формула имеет коэффициенты*

$$a_{i,\nu} = (-1)^{\nu}\Big[s_r^{(r-\nu)}\left(\rho_{r+1}, \Omega_N^{\sigma}, \overline{\Omega}_n^{\mu}, J, t_{i,N}-0\right) -$$

$$- s_r^{(r-\nu)}\left(\rho_{r+1}, \Omega_N^{\sigma}, \overline{\Omega}_n^{\mu}, J, t_{i,N}+0\right)\Big], \quad i = 1,\ldots,n-1, \quad \nu = 0,\ldots,\mu-1, \tag{5}$$

$$b_{\nu,0} = (-1)^{\nu} s_r^{(r-\nu)}\left(\rho_{r+1}, \Omega_N^{\sigma}, \overline{\Omega}_n^{\mu}, J, +0\right), \quad \nu \in I_0, \tag{6}$$

$$b_{\nu,1} = (-1)^{\nu} s_r^{(r-\nu)}\left(\rho_{r+1}, \Omega_N^{\sigma}, \overline{\Omega}_n^{\mu}, J, 1-0\right); \quad \nu \in I_1. \tag{7}$$

Доказательство. В работах [3, 4] установлено, что если для функций $f, g \in V^r$ интерполяционные сплайны $s_r\left(f, \overline{\Omega}_n^{\mu}, \Omega_N^{\sigma}, I\right)$ и $s_r\left(g, \Omega_N^{\sigma}, \overline{\Omega}_n^{\mu}, J\right)$ существуют, то имеет место равенство

$$\int_0^1\left(f(x) - s_r\left(f, \overline{\Omega}_n^{\mu}, \Omega_N^{\sigma}, I, x\right)\right) d\left(g^{(r)}(x)\right) =$$

$$= (-1)^{r+1}\int_0^1\left(g(x) - s_r\left(g, \Omega_N^{\sigma}, \overline{\Omega}_n^{\mu}, J, x\right)\right) d\left(f^{(r)}(x)\right). \tag{8}$$

Таким образом, для любой функции $f \in L_1^{r+1}$ и любого веса $\rho \in L_1$ выполняются равенства

$$R\left(f, \rho, s_r\left(f, \overline{\Omega}_n^{\mu}, \Omega_N^{\sigma}, I\right)\right) = \int_0^1 \rho(x)\left(f(x) - s_r\left(f, \overline{\Omega}_n^{\mu}, \Omega_N^{\sigma}, I, x\right)\right) dx =$$

$$= \int_0^1 \rho_{r+1}^{(r+1)}(x)\left(f(x) - s_r\left(f, \overline{\Omega}_n^{\mu}, \Omega_N^{\sigma}, I, x\right)\right) dx =$$

$$= (-1)^{r+1}\int_0^1\left(\rho_{r+1}(x) - s_r\left(\rho_{r+1}, \Omega_N^{\sigma}, \overline{\Omega}_n^{\mu}, J, x\right)\right) f^{(r+1)}(x)\, dx.$$

Отсюда и из известного соотношения (см., например, [1, с. 301])

$$\sup_{\|\varphi\|_p \le 1}\int_0^1 f(x)\varphi(x)\, dx = \|f\|_q$$

имеем

$$\sup_{f\in W_p^{r+1}} R\left(f, \rho, s_r\left(f, \overline{\Omega}_n^{\mu}, \Omega_N^{\sigma}, I\right)\right) = \left\|\rho_{r+1} - s_r\left(\rho_{r+1}, \Omega_N^{\sigma}, \overline{\Omega}_n^{\mu}, J\right)\right\|_q.$$

Тот факт, что коэффициенты оптимальной весовой квадратурной формулы определяются равенствами (5) – (7), проверяется непосредственно (см. „Дополнения" Н.П. Корнейчука к [2, с. 149 – 151]).

Сплайны $s_r\left(\overline{\Omega}_n^{\mu}, \Omega_N^{\sigma}, I\right)$ и $s_r\left(\Omega_N^{\sigma}, \overline{\Omega}_n^{\mu}, J\right)$ будем называть двойственными. Приведем один пример двойственных сплайнов, необходимых нам в дальнейшем. Пусть $N = nr$, разбиение

$$\nabla_N = \left\{\left\{x_{i,n} + \nu\left(x_{i+1,n} - x_{i,n}\right)/r\right\}_{\nu=0}^{r}\right\}_{i=0}^{n-1}$$

и $I_r = (Q_r, Q_r)$. Сплайны $S_{r,1}(\Delta_n) = s_r\left(\Omega_N^1, \overline{\Omega}_n^r, I_r\right)$, введенные в работе [5], двойственны к сплайнам $S_{r,r}(\Delta_n) = s_r\left(\overline{\Omega}_n^r, \Omega_N^1, I^*\right)$, $I^* = (\{0\}, \{0\})$ (на каждом промежутке $[x_{i,n}, x_{i+1,n}]$ это многочлен Лагранжа, интерполирующий функцию в точках разбиения ∇_N). Такие сплайны будем называть сплайнами с дополнительными узлами.

Рассмотрим класс функций $W_p^{r,*} = \{f : f \in W_p^r, f(0) = 0\}$. Через $l(f, \Delta_n)$ обозначим ломаную с узлами из разбиения Δ_n, интерполирующую функцию $f(x)$ в узлах.

Теорема 2. *Для веса $\rho(x) = x^{-3/2}$ среди всех квадратурных формул, порожденных интерполяционными ломаными $l(f, \Delta_n)$ на классе функций $f \in W_\infty^{2,*}$, оптимальной является квадратурная формула*

$$\mathcal{L}\left(l\left(f, \Delta_n^*\right)\right) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{2n}{4i^2-1} f\left(x_i^*\right) + \frac{2}{2n-1} f(1),$$

где $\Delta_n^* = \{x_i^*\}_{i=0}^n = \{(i/n)^2\}_{i=0}^n$.

При этом

$$R\left(W_\infty^{2,*}, x^{-3/2}, l\left(\Delta_n^*\right)\right) = \inf_{\Delta_n} R\left(W_\infty^{2,*}, x^{-3/2}, l(\Delta_n)\right) = \frac{2}{3n^2}.$$

Доказательство. Из (8) следует, что если $f, g \in L_1^2$, то выполняется равенство

$$\int_0^1 g''(x)(f(x) - l(f, \Delta_n, x))\, dx = \int_0^1 f''(x)(g(x) - l(g, \Delta_n, x))\, dx.$$

Сглаживая функцию $g(x) = x^{-3/2}$ с помощью предельного перехода по параметру сглаживания, получаем, что для любой функции $f \in L_1^2$ справедливо соотношение

$$\int_0^1 x^{-3/2}(f(x) - l(f, \Delta_n, x))\, dx = 4\int_0^1 f''(x)(\sqrt{x} - l(\sqrt{\cdot}, \Delta_n, x))\, dx.$$

Это равенство можно проверить и непосредственно.

Кроме того, если $f \in W_\infty^2$ и $\varphi(x) = f(x) - f(0)$, то $f(x) - l(f, \Delta_n, x) = \varphi(x) - l(\varphi, \Delta, x)$ и $\varphi \in W_\infty^{2,*}$. Поэтому

$$\sup_{f \in W_\infty^2} \left| \int_0^1 x^{-3/2}(f(x) - l(f, \Delta_n, x))\, dx \right| = \sup_{f \in W_\infty^{2,*}} \left| \int_0^1 x^{-3/2}(f(x) - l(f, \Delta_n, x))\, dx \right|.$$

Следовательно,

$$R\left(W_\infty^{2,*}, x^{-3/2}, l\right) = 4 \inf_{\Delta_n} \left\| \sqrt{\cdot} - l\left(\sqrt{\cdot}, \Delta_n\right) \right\|_1. \tag{9}$$

Равенство (9) — аналог теоремы 1 для веса $\rho(x) = x^{-3/2}$. Однако формально использовать теорему 1 мы не можем, так как для такого веса на всем классе W_∞^2 найдется функция f (например, $f(x) \equiv 1$) такая, что интеграл $\int_0^1 \rho(x) f(x)\, dx$ будет расходиться.

В силу выпуклости функции $y = \sqrt{x}$ имеем

$$\left\| \sqrt{\cdot} - l\left(\sqrt{\cdot}, \Delta_n\right) \right\|_1 = \left| \int_0^1 \left(\sqrt{x} - l\left(\sqrt{\cdot}, \Delta_n, x\right)\right) dx \right|.$$

Кроме того, каждому разбиению $\Delta_n = \{x_i\}_{i=0}^n$ отрезка $[0,1]$ поставим в соответствие разбиение $\nabla_n = \{y_i\}_{i=0}^n$ отрезка $[0,1]$, где $y_i = \sqrt{x_i}$, $i = \overline{0,\ldots,n}$. При этом будет выполняться соотношение

$$\left|\int_0^1 \left(y^2 - l\left((\cdot)^2, \nabla_n, y\right)\right) dy\right| = \left|\int_0^1 \left(\sqrt{x} - l\left(\sqrt{\cdot}, \Delta_n, x\right)\right) dx\right|.$$

Непосредственные вычисления показывают, что

$$\int_{y_i}^{y_{i+1}} \left(y^2 - l\left((\cdot)^2, \nabla_n, y\right)\right) dy = \frac{h_{i+1/2}^3}{6} \quad \left(h_{i+1/2} = y_{i+1} - y_i,\ i = \overline{0,\ldots,n-1}\right),$$

следовательно,

$$\left|\int_0^1 \left(y^2 - l\left((\cdot)^2, \nabla_n, y\right)\right) dy\right| = \frac{1}{6}\sum_{i=0}^{n-1} h_{i+1/2}^3, \tag{10}$$

и задача (9) свелась к задаче определения минимума величины, содержащейся в правой части (10), при условии $\sum_{i=0}^{n-1} h_{i+1/2} = 1$. Методом неопределенных множителей Лагранжа устанавливается, что этот минимум равен $1/\left(6n^2\right)$ и достигается на разбиении $y_i^* = i/n$, $i = \overline{0,\ldots,n}$. Таким образом,

$$\inf_{\Delta_n}\left|\int_0^1 \left(\sqrt{x} - l\left(\sqrt{x}, \Delta_n, x\right)\right) dx\right| = \left|\int_0^1 \left(\sqrt{x} - l\left(\sqrt{x}, \Delta_n^*, x\right)\right) dx\right| = \frac{1}{6n^2}. \tag{11}$$

Выписывая явный вид ломаной $l(f, \Delta_n, x)$, устанавливаем, что для любой функции $f \in C^1$, $f(0) = 0$, и произвольного разбиения Δ_n будет справедливо равенство

$$\int_0^1 x^{-3/2}\, l(f, \Delta_n, x)\, dx =$$

$$= 4\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\sqrt{x_{i+1}} - \sqrt{x_{i-1}}}{\left(\sqrt{x_i} + \sqrt{x_{i-1}}\right)\left(\sqrt{x_{i+1}} + \sqrt{x_i}\right)} f(x_i) + \frac{2\left(1 - \sqrt{x_{n-1}}\right)}{\left(1 + \sqrt{x_{n-1}}\right)} f(1).$$

Отсюда и из (11) непосредственно следует утверждение теоремы.

***Замечание* 1.** Отметим, что для равномерного разбиения $\Delta_n^0 = \{i/n\}_{i=0}^n$ имеют место оценки

$$\frac{12}{\sqrt{n}} + \frac{72}{5n} \le R\left(W_\infty^{2,*}, x^{-3/2}, l\left(\Delta_n^0\right)\right) \le \frac{12}{\sqrt{n}} + \frac{92}{5n}.$$

Аналогично предыдущему доказывается следующее утверждение.

Теорема 3. *Для веса* $\rho(x) = \left(1 - x^2\right)^{-3/2}$ *среди всех квадратурных формул, порожденных интерполяционными ломаными* $l(f, \Delta_n)$ *на классе функций*

$$f \in W_{\infty\,[-1,1]}^{2,**} = \left\{f : f \in W_{\infty\,[-1,1]}^2,\ f(-1) = f(1) = 0\right\},$$

оптимальной является квадратурная формула

$$\mathcal{L}\left(\left(1 - x^2\right)^{-3/2} l(f)\right) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\sin \pi/n}{\cos\left((2i-1)\pi/(2n)\right)\cos\left((2i+1)\pi/(2n)\right)} f\left(-\cos\frac{i\pi}{n}\right)$$

и при этом выполняется равенство

$$\inf_{\Delta_n} R\left(W^{2,**}_{\infty[-1,1]}, \left(1-x^2\right)^{-3/2}, l\right) = 0{,}5\left(\pi - n\sin\frac{\pi}{n}\right).$$

Отсюда следует, что справедливо соотношение

$$\inf_{\Delta_n} R\left(W^{2,**}_{\infty[-1,1]}, \left(1-x^2\right)^{-3/2}, l\right) = \frac{\pi^3}{12n^2} - \frac{\pi^5}{240n^4} + \cdots .$$

Рассмотрим следующую задачу: пусть $\left\{P_{r,k}(\cdot,\Delta_n)\right\}_{n=1}^{\infty}$ — некоторая последовательность операторов, отображающих C^k в $\mathbb{S}_{r,k}(\Delta_n)$. В частности, $P_{r,k}(\cdot,\Delta_n)$ может быть интерполяционным сплайном, сплайном, интерполирующим $f(x)$ в среднем на элементарном промежутке, сплайном наилучшего приближения и др.

При фиксированных r, k, и p последовательность разбиений $\left\{\Delta_n^*\right\}_{n=1}^{\infty}$ назовем асимптотически оптимальной для функции $f \in C^{r+1}$ и последовательности операторов $\left\{P_{r,k}(f\cdot,\Delta_n)\right\}_{n=1}^{\infty}$, если при $n\to\infty$ выполняется соотношение

$$\left\| f - P_{r,k}\left(f,\Delta_n^*\right)\right\|_p = \inf_{\Delta_n}\left\| f - P_{r,k}\left(f,\Delta_n\right)\right\|_p (1+o(1)).$$

Задача определения последовательности асимптотически оптимальных разбиений при приближении функций различными видами сплайн-операторов рассматривалась во многих работах (см., например, [6 – 8]).

Из теоремы 1 следует, что если решена задача определения последовательности асимптотически оптимальных разбиений при приближении функций сплайнами, то решена и соответствующая задача об асимптотически оптимальной весовой квадратурной формуле, порожденной двойственными сплайнами.

Через $s_r(f,\Delta_n,x)$ обозначим интерполяционный сплайн минимального дефекта, т. е. сплайн из множества $\mathbb{S}_{r,1}(\Delta_n)$ с интерполяционными условиями

$$s_r\left(f,\Delta_n,x_{i,n}\right) = f\left(x_{i,n}\right), \quad i = \overline{1,\ldots,n-1},$$

при нечетном r и

$$s_r\left(f,\Delta_n,(x_{i,n}+x_{i-1,n})/2\right) = f\left((x_{i,n}+x_{i-1,n})/2\right), \quad i = \overline{1,\ldots,n},$$

при четном r. Кроме того, выполняются следующие граничные условия:

$$s_r^{(\nu)}(f,\Delta_n,i) = f^{(\nu)}(i), \qquad \nu = 0,1,\ldots,\left[(r+1)/2\right], \quad i = 0,1.$$

Здесь [ ] — целая часть числа.

Обозначим через $D_{r+1}(x)$ r-й 1-периодический интеграл, в среднем равный нулю на $[0,1]$, от функции $D_1(x) = x-1/2$. Справедлива следующая теорема (см. [9, 10]).

Теорема В. *Пусть* $r = 1, 2, 3, 4$, $p\in[1,\infty]$, $\alpha = \left(r+1+p^{-1}\right)^{-1}$, $\omega_n = \omega^{1/(r+1)}\left(f^{(r+1)},1/n\right)$ ($\omega(g,x)$ — *модуль непрерывности функции* g) *и* $\{f_n(x)\}$ — *множество функций из* L *таких, что* $\left\|f^{(r+1)}-f_n\right\| \le \omega_n$.

Если определить набор узлов $\left\{\Delta_n^*\right\}_{n=1}^{\infty}$ *из равенств*

$$\int_0^{x_{i,n}^*}\left(|f_n(x)|^{\alpha}+\omega_n\right)dt = \frac{i}{n}\int_0^1\left(|f_n(x)|^{\alpha}+\omega_n\right)dt, \quad i = 1,\ldots,n-1, \tag{12}$$

то для любой функции $f \in C^{r+1}$ *последовательность асимптотически оптимальных разбиений* $\{\Delta_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ *может быть определена из равенств* (12). *При этом*

$$\left\| f - s_r\left(f, \Delta_n^*\right)\right\|_p = \inf_{\Delta_n}\left\| f - s_r\left(f, \Delta_n\right)\right\|_p (1 + o(1)) =$$

$$= \left\| D_{r+1}(\cdot) - D_{r+1}(0)\right\|_p \frac{\left\| f^{(r+1)}\right\|_{\alpha}}{n^{r+1}} (1 + o(1)).$$

Сопоставляя теоремы B и 1, получаем следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть* $r = 1, 2, 3, 4,$ $p \in [1, \infty]$, $p^{-1} + p^{-1} = 1$, $\alpha = \left(r + 1 + q^{-1}\right)^{-1}$, $\rho(x)$ *— непрерывный на* $[0, 1]$ *вес и* $\{f_n(x)\}$ *— множество функций из* L *таких, что* $\|\rho - f_n\|_{\infty} \le \omega_n$ *(здесь* $\omega_n = \omega^{1/(r+1)}(\rho, 1/n)$*).*

Если определить набор узлов $\{\Delta_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ *из равенств* (12) *и коэффициенты*

$$\begin{aligned} a_i^* &= s_r^{(r)}\left(\rho_{r+1}, \Delta_n^*, x_{i,n}^* - 0\right) - s_r^{(r)}\left(\rho_{r+1}, \Delta_n^*, x_{i,n}^* + 0\right), \quad i = \overline{1, n-1}, \\ b_{0,\nu}^* &= (-1)^{\nu} s_r^{(r-\nu)}\left(\rho_{r+1}, \Delta_n^*, x_{0,n}^* + 0\right), \quad \nu = \overline{0, [r/2] - 1}, \\ b_{1,\nu}^* &= (-1)^{\nu} s_r^{(r-\nu)}\left(\rho_{r+1}, \Delta_n^*, x_{n,n}^* - 0\right), \quad \nu = \overline{0, [r/2] - 1}, \end{aligned} \tag{13}$$

то среди всех весовых квадратурных формул, порожденных сплайнами s_r, *последовательность квадратурных формул*

$$\mathcal{L}_n(\rho, s_r) = \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} a_i^* f\left(x_{i,n}^*\right) + \sum_{j=0}^{1} \sum_{\nu=0}^{[r/2]-1} b_{j,\nu}^* f^{(\nu)}(j) \right\}_{n=1}^{\infty}, \tag{14}$$

асимптотически оптимальна на классе W_p^{r+1} *и при этом выполняется соотношение*

$$R\left(W_p^{r+1}, \rho, s_r\left(\Delta_n^*\right)\right) = R\left(W_p^{r+1}, \rho, s_r\right)(1 + o(1)) =$$

$$= \left\| D_{r+1}(\cdot) - D_{r+1}(0)\right\|_q \frac{\|\rho\|_{\alpha}}{n^{r+1}} (1 + o(1)).$$

Далее будем рассматривать наилучшие квадратурные формулы вида (1). Рассмотрим величины

$$\mathscr{E}\left(f, \mathbb{S}_{r,k}(\Delta_n)\right)_p = \inf\Big\{ \| f - s\|_p \mid s \in \mathbb{S}_{r,k}(\Delta_n);$$

$$f^{(\nu)}(0) - s^{(\nu)}(0) = f^{(\nu)}(1) - s^{(\nu)}(1) \quad \left(\nu = \overline{1, r}\right)\Big\},$$

и $\mathscr{E}_{r,k,n}(f)_p = \inf_{\Delta_n} \mathscr{E}\left(f, \mathbb{S}_{r,k}(\Delta_n)\right)_p$.

Обозначим через $\mathbb{D}_{r,k}$, $r = 1, 2, \ldots,$ $k = \overline{1, r}$, множество всех функций $g(x)$ вида

$$g(x) = D_r(x) - \lambda_0 - \sum_{i=1}^{[(k-1)/2]} \lambda_i D_{r-2i}(x)$$

и пусть $D_{r,k,p} \in \mathbb{D}_{r,k}$ такова, что $\left\| D_{r,k,p}\right\|_p = \inf\left\{ \| g\|_p \mid g \in \mathbb{D}_{r,k}\right\}$.

Проведем некоторые построения, необходимые в дальнейшем. Для каждого n и r через $M_n = M_n(\rho, r)$ обозначим любое целое число, удовлетворяющее неравенству

$$0{,}1n^{-r-1}\omega^{1/2}(\rho, 1/n) \leq M_n^{-r-1}\omega(\rho, 1/M_n) \leq 10n^{-r-1}\omega^{1/2}(\rho, 1/n). \tag{15}$$

Если $\omega(\rho, t) = t^{\beta}$, $\beta > 0$, то условие (15) можно заменить условием

$$0{,}1n^{1-\beta/(2(r+1+\beta))} \leq M_n \leq 10n^{1-\beta/(2(r+1+\beta))}.$$

Вычислим набор чисел m_i, $i = \overline{1, M_n}$, согласно правилу

$$m_i = \left[\frac{n\left(\left|\rho_{i-1/2}\right|^{\alpha} + \omega^{\gamma}\left(\rho, n^{-1}\right)\right)}{\sum_{i=1}^{M_n}\left(\left|\rho_{i-1/2}\right|^{\alpha} + \omega^{\gamma}\left(\rho, n^{-1}\right)\right)}\right], \tag{16}$$

где $\rho_{i-1/2} = \rho\left((2i-1)/(2M_n)\right)$, $i = \overline{1, M_n}$, и $[\cdot]$ — целая часть числа.

Разобьем промежуток $[0, 1]$ на M_n равных частей, а i-й промежуток в свою очередь разобьем на m_i равных частей. Совокупное разбиение обозначим Δ_N^{ρ}. Точки этого разбиения определяются таким образом:

$$\Delta_N^{\rho} = \left\{\left\{\frac{1}{M_n}\left(i + \frac{j}{m_i}\right)\right\}_{j=0}^{m_i}\right\}_{i=0}^{M_n-1}, \tag{17}$$

и при этом $N = \sum_{i=1}^{M_n-1} m_i = n - \theta M_n$, $0 \leq \theta \leq 1$. Следовательно, при $n \to \infty$ будет $N = n + o(n)$.

Теорема 5. *Пусть* $r = 1, 2, \ldots$, $k = \overline{1, r}$, $p \in [1, \infty]$, $\alpha = \left(r + 1 + q^{-1}\right)^{-1}$. *Для любых* $I_i \in \{0, 1, \ldots, r\}$, $i = 0, 1$, *справедливо соотношение*

$$R_{n,k}\left(W_p^{r+1}, \rho, I\right) = \left\|D_{r+1, k, q}\right\|_q \frac{\|\rho\|_{\alpha}}{n^{r+1}}(1 + o(1));$$

при этом последовательность разбиений (17) *асимптотически оптимальна.*

Если вес $\rho(x)$ *непрерывный и не имеет нулей на* $[0,1]$, *то последовательность асимптотически оптимальных узлов можно определять равенствами* (17) *при*

$$m_i = \left[\frac{n\left|\rho_{i-1/2}\right|^{\alpha}}{\sum_{i=1}^{M_n}\left|\rho_{i-1/2}\right|^{\alpha}}\right].$$

$\mathbb{D}_{r,1}$ есть множество функций вида $D_r(x) - \lambda$, где $\lambda \equiv \mathrm{const}$. При r нечетном $\left\|D_{r,1,p}\right\|_p = \|D_r\|_p = \inf\left\{\|z\| \mid z \in \mathbb{D}_{r,1}\right\}$. Следовательно, $D_{r,1,p}(x) = D_r(x) = D_r(x) - D_r(0)$. Прежде чем доказывать теорему 5, отметим, что, сопоставляя утверждения теорем 5 и 4, непосредственно получаем следующий результат.

Теорема 6. *Пусть* $r = 2$ *или* 4, $p \in [1, \infty]$ *и* $\alpha = \left(r + 1 + q^{-1}\right)^{-1}$. *Среди всех квадратурных формул*

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i f\left(x_{i,n}\right) + \mathcal{L}_0(f, \mathcal{B}_0) + \mathcal{L}_1(f, \mathcal{B}_1)$$

на классе функций W_p^{r+1} *асимптотически оптимальной является формула* (14) *и при* $n \to \infty$

$$R_{n,1}\left(W_p^{r+1}, \rho, I\right) = R\left(W_p^{r+1}, \rho, s_r\left(\Delta_n^*\right)\right)(1 + o(1)) = \|D_{r+1}\|_q \frac{\|\rho\|_{\alpha}}{n^{r+1}}(1 + o(1)).$$

***Доказательство теоремы* 5.** Введем еще необходимые нам в дальнейшем величины. Пусть $\overline{\mathcal{L}}(f, C) = \sum_{i=1}^{n-1} c_i\left(f^{(i)}(0) - f^{(i)}(1)\right)$. Через

$$\mathcal{R}\left(f, \rho, \mathcal{A}_n^{\mu}, C, \Delta_n\right) = \left|\int_0^1 \rho(x) f(x)\, dx - \mathcal{L}\left(f, \mathcal{A}_n^{\mu}, \Delta_n\right) - \overline{\mathcal{L}}(f, C)\right|$$

обозначим погрешность весовой квадратурной формулы Эйлера – Маклорена. Обычным образом вводится величина $\mathcal{R}_{n,\mu}(\mathfrak{M}, \rho)$.

Лемма 1. *Пусть вес* $\rho \in L_1$ *и класс* $\mathfrak{M} \in C^r$ *функций таков, что производная порядка* ν, $\nu = \overline{1, r}$, *произвольной функции из этого класса в любой точке из* $[0, 1]$ *приближается с любой наперед заданной точностью разделенными разностями. Тогда для любых* I_i, $i = 0, 1$, *и* $n > 2r + 2$ *верно соотношение*

$$\mathcal{R}_{n+2r+2,\mu}(\mathfrak{M}, \rho) \le R_{n,\mu}(\mathfrak{M}, \rho, I) \le \mathcal{R}_{n-2r-2,\mu}(\mathfrak{M}, \rho).$$

***Доказательство леммы* 1.** Если $I_0 = I_1 = Q_r$ (в этом случае будем писать $I_r = (Q_r, Q_r)$), то соответствующая квадратурная формула (1) называется замкнутой; если $I_0 = I_1 = \varnothing$, то соответствующая формула называется открытой, при этом будем писать $I_{\varnothing} = (\varnothing, \varnothing)$.

Непосредственно из определения и того факта, что множество всех открытых квадратурных формул включается в множество всех квадратурных формул Эйлера – Маклорена, которые в свою очередь включаются в множество всех замкнутых квадратурных формул, получаем соотношение

$$R_{n,\mu}(\mathfrak{M}, \rho, I_r) \le \mathcal{R}_{n,\mu}(\mathfrak{M}, \rho) \le R_{n,\mu}(\mathfrak{M}, \rho, I_{\varnothing}). \tag{18}$$

Осталось доказать, что

$$R_{n+2r+2,\mu}(\mathfrak{M}, \rho, I_{\varnothing}) \le R_{n,\mu}(\mathfrak{M}, \rho, I_r). \tag{19}$$

Пусть соотношение (19) не верно, т. е. пусть

$$R_{n+2r+2,\mu}(\mathfrak{M}, \rho, I_{\varnothing}) > R_{n,\mu}(\mathfrak{M}, \rho, I_r). \tag{20}$$

Тогда найдется такая замкнутая квадратурная формула (т. е. найдутся такие наборы $\hat{\mathcal{A}}_n^{\mu}$, $\hat{\mathcal{B}}_0(Q_r)$, $\hat{\mathcal{B}}_1(Q_r)$ и разбиение $\hat{\Delta}_n$), что

$$R\left(\mathfrak{M}, \rho, \hat{\mathcal{A}}_n^{\mu}, \hat{\mathcal{B}}, I_r, \hat{\Delta}_n\right) + \varepsilon < R_{n+2r+2,\mu}(\mathfrak{M}, \rho, I_{\varnothing}). \tag{21}$$

Из условия теоремы следует, что для любого положительного ε найдутся точки

$$0 < \xi_{0,0} < \xi_{1,0} < \dots < \xi_{r,0} < \hat{x}_1, \qquad \hat{x}_{n-1} < \xi_{0,1} < \xi_{1,1} < \dots < \xi_{r,1} < 1$$

и набор чисел $p_{\nu,\mu}^{i}$, $\nu, \mu = \overline{0, r}$, $i = 0, 1$, такие, что

$$\sup\left\{\left|f^{(\nu)}(i) - \sum_{\mu=0}^{r} p_{\nu,\mu}^{i} f(\xi_{\mu,i})\right| \mid f \in \mathfrak{M}\right\} < \frac{\varepsilon}{M},$$

где

$$M = \sum_{\nu=0}^{r}\left|\hat{b}_{\nu,0}\right| + \sum_{\nu=0}^{r}\left|\hat{b}_{\nu,1}\right|.$$

Таким образом, формула

$$\int_0^1 \rho(x)f(x)dx \approx \mathcal{L}\left(f, \hat{\mathcal{A}}_n^{\mu}, \hat{\Delta}_n\right) + \sum_{\nu=0}^{r} \hat{b}_{\nu,0} f^{(\nu)}(0) + \sum_{\nu=0}^{r} \hat{b}_{\nu,1} f^{(\nu)}(1) \approx$$

$$\approx \mathcal{L}\left(f, \hat{\mathcal{A}}_n^{\mu}, \hat{\Delta}_n\right) + \sum_{\mu=0}^{r}\left(\sum_{\nu=0}^{r} \hat{b}_{\nu,0}\, p_{\nu,\mu}^{0}\right) f(\xi_{m,0}) + \sum_{\mu=0}^{r}\left(\sum_{\nu=0}^{r} \hat{b}_{\nu,1}\, p_{\nu,\mu}^{1}\right) f(\xi_{m,1})$$

есть открытая квадратурная формула с $n+2r+2$ узлами и, следовательно, погрешность ее на классе $\mathfrak{M}$ будет не меньше, чем погрешность наилучшей на классе $\mathfrak{M}$ открытой квадратурной формулы, т. е. не меньше величины $\mathrm{R}_{n+2r+2,\mu}(\mathfrak{M}, \rho, I_{\varnothing})$, что противоречит (21).

Замечание 2. Из этой леммы и теоремы А вытекает, что для любых I_i, $i = 0, 1$, и $n > 2r+2$ верно неравенство

$$\mathscr{E}_{r,k,n+2r+2}\left((\cdot)^{r+1}\right)_p \le \mathbb{E}\left((\cdot)^{r+1}, \mathbb{S}_{r,k}, I\right)_p \le \mathscr{E}_{r,k,n-2r-2}\left((\cdot)^{r+1}\right)_p.$$

Теорема С. *Пусть* n, $r = 1, 2, \ldots$, $k = \overline{1, r}$, $p \in [1, \infty]$. *Тогда существует единственный сплайн* $s(x)$ *порядка* $r-1$ *дефекта* k *с* n *узлами такой, что*

$$s^{(\nu)}(0) - s^{(\nu)}(1) = \frac{1}{(r-\nu)!}, \quad \nu = \overline{1, r-1},$$

причем

$$\mathscr{E}_{r-1,k,n}\left(\frac{(\cdot)^r}{r!}\right) = \left\|\frac{(\cdot)^r}{r!} - s\left(\frac{(\cdot)^r}{r!}\right)\right\|_p = \frac{1}{r}\left\|D_{r,k,p}\right\|_p.$$

Это утверждение является одним из основных достижений теории квадратурных формул и при некоторых r, k, p получено в работах С. М. Никольского, Н. П. Корнейчука, Н. Е. Лушпая, В. П. Моторного, А. А. Женсыкбаева, А. А. Лигуна и др., а в общем случае — в работе Б. Боянова [11]. Подробная библиография по этому вопросу приведена в „Добавлении" Н. П. Корнейчука к книге [2] и в работах [12, 13].

Перейдем к доказательству теоремы 5. Для функции $f(x)$ через $s_{r+1,n}(f)$ обозначим интерполяционный сплайн порядка $r+1$ минимального дефекта по равномерному разбиению $\Delta_n^0 = \{i/n\}_{i=0}^{n}$ на отрезке $[0, 1]$. Тогда для непрерывного веса ρ при $n \to \infty$ будут выполняться соотношения (см., например, [14])

$$\left\|\rho_{r+1} - s_{r+1,M_n}(\rho_{r+1})\right\|_\infty = O\left(\frac{\omega(\rho, 1/M_n)}{n^{r+1}}\right),$$
$$\left\|\rho - s_{r+1,M_n}^{(r+1)}(\rho_{r+1})\right\|_\infty = O(\omega(\rho, 1/M_n)). \tag{22}$$

Положим $c_i = s_{r+1,M_n}^{(r+1)}(\rho_{r+1}, i/M_n - 0)$, $i = \overline{1, M_n}$. Пусть $\tilde{\Delta}_{\mathcal{N}} = \Delta_n \cup \Delta_{M_n}^0$ и m — число точек разбиения $\tilde{\Delta}_{\mathcal{N}}$, попавших в промежуток $[(i-1)/M_n, i/M_n]$. Тогда $\mathcal{N} = n + o(n)$ при $n \to \infty$.

Для любого $q \in [1, \infty)$ выполняется соотношение

$$\mathbb{E} = \mathbb{E}\left(s_{r+1,M_n}(\rho_{r+1}), \mathbb{S}_{r,k}(\Delta_n), J\right)_q \ge \mathbb{E}\left(s_{r+1,M_n}(\rho_{r+1}), \mathbb{S}_{r,k}\left(\tilde{\Delta}_{\mathcal{N}}\right), J\right)_q \ge$$

$$\ge \left(\sum_{i=1}^{M_n} \mathbb{E}\left(s_{r+1,M_n}(\rho_{r+1}), \mathbb{S}_{r,k}\left(\tilde{\Delta}_{\mathcal{N}}\right), I_r\right)_{q[(i-1)/M_n, i/M_n]}^q\right)^{1/q}. \tag{23}$$

Из определения $s_{r+1,M_n}(\rho_{r+1})$ следует, что на каждом промежутке $[(i-1)/M_n, i/M_n]$ его можно представить в виде

$$s_{r+1,M_n}(\rho_{r+1},x) = c_i\frac{x^{r+1}}{(r+1)!} + p_r(x), \tag{24}$$

где $p_r(x)$ — алгебраический многочлен степени не выше r. Отсюда и из (23) имеем

$$\mathbb{E} \ge \frac{1}{(r+1)!}\left(\sum_{i=1}^{M_n}|c_i|^q \mathbb{E}\left((\cdot)^{r+1}, \mathbb{S}_{r,k}(\tilde{\Delta}_{\mathcal{N}}), I_r\right)^q_{q[(i-1)/M_n,\, i/M_n]}\right)^{1/q}.$$

С помощью замены переменных переходя к отрезку $[0,1]$, получаем

$$\mathbb{E} \ge \frac{1}{(r+1)!}\left(\sum_{i=1}^{M_n}\frac{|c_i|^q}{M_n^{q/\alpha}}\mathbb{E}_{m_i}\left((\cdot)^{r+1}, \mathbb{S}_{r,k}, I_r\right)\right)^{1/q}.$$

Сопоставляя последнее неравенство с теоремой С и замечанием 2, непосредственно имеем

$$\mathbb{E} \ge \frac{\|D_{r+1,k,q}\|_q}{M_n^{1/\alpha}}\left(\sum_{i=1}^{M_n}\frac{|c_i|^q}{(m_i+2r+2)^{(r+1)/q}}\right)^{1/q} \ge$$

$$\ge \frac{\|D_{r+1,k,q}\|_q^q}{M_n^{q/\alpha}}\inf\left\{\sum_{i=1}^{M_n}|c_i|^q\beta^{-(r+1)q} \;\Big|\; \sum_{i=1}^{M_n}\beta_i \le n + M_n(2r+3)\right\}.$$

Методом неопределенных множителей Лагранжа устанавливается, что при $\gamma > 1$ задача: $\sum_{i=1}^{m}|b_i|c_i^{-\gamma} \to \inf$ при условиях $\sum_{i=1}^{m} c_i = C$ имеет единственное решение

$$c_i = C\frac{|b_i|^{1/(\gamma+1)}}{\sum_{j=1}^{m}|b_j|^{1/(\gamma+1)}}$$

и ее экстремальное значение равно

$$\left(\sum_{j=1}^{m}|b_j|^{1/(\gamma+1)}\right)^{\gamma+1} C^{-\gamma}.$$

Отсюда и из предыдущего следует, что

$$\mathbb{E} \ge \frac{\|D_{r+1,k,q}\|_q}{(n+(2r+3)M_n)^{r+1}}\left(\sum_{i=1}^{M_n}\frac{|c_i|^{1/(r+1+q^{-1})}}{M_n}\right)^{r+1+1/q}.$$

Кроме того, так как функция $s^{(r+1)}_{r+1,M_n}(\rho_{r+1},x) = c_i \equiv \mathrm{const}$ на каждом промежутке $[(i-1)/M_n, i/M_n]$, $i=\overline{0,M_n}$, то

$$\frac{1}{M_n}\sum_{i=1}^{M_n}|c_i|^\alpha = \int_0^1\left|s^{(r+1)}_{r+1,M_n}(\rho_{r+1},x)\right|^\alpha dx.$$

Отсюда и из (22) при $n\to\infty$ получаем

$$\int_0^1\left|s^{(r+1)}_{r+1,M_n}(\rho_{r+1},x)\right|^\alpha dx \to \int_0^1|\rho(x)|^\alpha dx = \|\rho\|_\alpha^\alpha. \tag{25}$$

Таким образом, учитывая выбор M_n, для любого разбиения Δ_n имеем

$$\mathbb{E}\big(\rho_{r+1}, \mathbb{S}_{r,k}(\Delta_n), J\big)_q \geq \left\| D_{r+1,k,q} \right\|_q \frac{\|\rho\|_\alpha}{n^{r+1}}(1+o(1)).$$

Отсюда непосредственно получаем оценку снизу.

Перейдем к доказательству оценки сверху. Зафиксируем i и положим $a_i = i / M_n$ и $b_i = (i + (m_i - r - 1) / m_i) / M_n$.

Введем в рассмотрение сплайн $s(\rho, x) = s(\rho, r, k, q, x)$ из множества $\mathbb{S}_{r,k}(\Delta_N^\rho)$ (разбиение Δ_N^ρ определено соотношением (17)) такой, что для каждого фиксированного i, $i = \overline{1, M_n}$, при $x \in [a_i, b_i]$

$$\left\| s_{r+1,M_n}(\rho_{r+1}) - s(\rho) \right\|_{q[a_i, b_i]} = \mathbb{E}\big(s_{r+1,M_n}(\rho_{r+1}), \mathbb{S}_{r,k}(\Delta_N^\rho \cap [a_i, b_i]), I_r\big)_{q[a_i, b_i]},$$

а при $x \in [b_i, a_{i+1}]$ сплайн $s(\rho)$ совпадает со сплайном с дополнительными узлами $S_{r,1}\big(s_{r+1,M_n}(\rho_{r+1}), \Delta_N^\rho \cap [b_i, a_{i+1}]), x\big)$, который введен ранее.

По построению

$$\left\| s_{r+1,M_n}(\rho_{r+1}) - s(\rho) \right\|_{q[0,1]}^q = \sum_{i=1}^{M_n} \left\| s_{r+1,M_n}(\rho_{r+1}) - s(\rho) \right\|_{q[(i-1)/M_n, i/M_n]}^q = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2,$$

где

$$\mathcal{A}_1 = \sum_{i=1}^{M_n} \mathcal{A}_{1,i} = \sum_{i=1}^{M_n} \left\| s_{r+1,M_n}(\rho_{r+1}) - s(\rho) \right\|_{q[a_i, b_i]}^q,$$

$$\mathcal{A}_2 = \sum_{i=1}^{M_n - 1} \mathcal{A}_{2,i} = \sum_{i=1}^{M_n - 1} \left\| s_{r+1,M_n}(\rho_{r+1}) - s(\rho) \right\|_{q[b_i, a_{i+1}]}^q.$$

Вначале рассмотрим величину $\mathcal{A}_1$. Покажем, что при $n \to \infty$ равномерно по i

$$\mathcal{A}_{1,i} \leq \frac{\left\| D_{r+1,k,q} \right\|_q^q}{n^{q(r+1)+1}} \|\rho\|_\alpha^q m_i (1+o(1)).$$

Из определения сплайна $s(\rho)$ и представления (24) сплайна $s_{r+1,M_n}(\rho_{r+1})$ следует

$$\mathcal{A}_{1,i} = |c_i|^q \mathbb{E}\left(\frac{(\cdot)^{r+1}}{(r+1)!}, \mathbb{S}_{r,k}\big(\Delta_N^\rho \cap [a_i, b_i]\big), I_r \right)_{q[a_i, b_i]}^q.$$

Переходя к отрезку $[0,1]$ и используя замечание 2, получаем

$$\mathcal{A}_{1,i} \leq |c_i|^q (b_i - a_i)^{q/\alpha} \mathcal{E}_{r,k,m_i - 3r - 3}^q \left(\frac{(\cdot)^{r+1}}{(r+1)!} \right)_{q[0,1]}.$$

Для достаточно больших n (при этом все m_i будут достаточно большими) отсюда и из теоремы C непосредственно следует соотношение

$$\mathcal{A}_{1,i} \leq |c_i|^q \frac{(b_i - a_i)^{q/\alpha}}{(m_i - 3r - 3)^{(r+1)q}} \left\| D_{r+1,k,q} \right\|_q^q.$$

Поскольку $b_i - a_i = (m_i - r - 1) / (M_n m_i)$, то при $n \to \infty$ равномерно по i получаем

$$\mathcal{A}_{1,i} \leq \frac{|c_i|^q \left\| D_{r+1,k,q} \right\|_q^q}{(M_n m_i)^{q/\alpha}} m_i (1+o(1)). \tag{26}$$

Кроме того, в силу (22) имеем

$$|c_i|^q \le \left(|\rho_{i-1/2}|^\alpha + \omega^\gamma(\rho, 1/n)\right)^{q/\alpha} + O\left(\omega^q(\rho, 1/M_n)\right). \tag{27}$$

Сопоставляя соотношения (26), (27) и учитывая определение (16), приходим к выводу, что равномерно по i

$$\mathcal{A}_{1,i} \le \frac{\left\| D_{r+1,k,q} \right\|_q^q \left(|\rho_{i-1/2}|^\alpha + \omega^\gamma(\rho, 1/n)\right)^{q/\alpha}}{(M_n n)^{q/\alpha}} \times$$

$$\times \left[\frac{\sum_{i=1}^{M_n} \left(|\rho_{i-1/2}|^\alpha + \omega^\gamma(\rho, 1/n)\right)}{\left(|\rho_{i-1/2}|^\alpha + \omega^\gamma(\rho, 1/n)\right)}\right]^{q/\alpha} m_i(1+o(1)) =$$

$$= \frac{\left\| D_{r+1,k,q} \right\|_q^q}{n^{q/\alpha}} \left(\frac{1}{M_n} \sum_{i=1}^{M_n} \left(|\rho_{i-1/2}|^\alpha + \omega^\gamma(\rho, 1/n)\right)\right)^{q/\alpha} m_i(1+o(1)).$$

Согласно теореме о среднем значении интеграла существует точка $\xi_i \in$ $\in [(i-1)/M_n,\ i/M_n]$ такая, что

$$\frac{1}{M_n}\left(|\rho(\xi_i)|^\alpha + \omega^\gamma(\rho, 1/n)\right) = \int\limits_{(i-1)/M_n}^{i/M_n} \left(|\rho(x)|^\alpha + \omega^\gamma(\rho, 1/n)\right) dx.$$

Отсюда и из предыдущего непосредственно получаем

$$\mathcal{A}_{1,i} \le \frac{\left\| D_{r+1,k,q} \right\|_q^q}{n^{q(r+1)+1}} \left(\int\limits_0^1 \left(|\rho(x)|^\alpha + \omega^\gamma(\rho, 1/n)\right) dx\right)^{q/\alpha} m_i(1+o(1)) =$$

$$= \left\| D_{r+1,k,q} \right\|_q^q \frac{\|\rho\|_\alpha^q}{n^{q(r+1)+1}} m_i(1+o(1)).$$

Поскольку $\sum_{i=1}^{M_n-1} m_i = n + o(n)$ и $M = o(n)$, при $n \to \infty$

$$\mathcal{A}_1 \le \left\| D_{r+1,k,q} \right\|_q^q \frac{\|\rho\|_\alpha^q}{n^{q(r+1)+1}} (1+o(1)).$$

Осталось доказать, что

$$\mathcal{A}_2 = o\left(\frac{1}{n^{(r+1)q}}\right). \tag{28}$$

Из (8) следует, что для $x \in [b_i, a_{i+1}]$

$$s_{r+1,M_n}(\rho_{r+1}, x) - s(\rho, x) =$$

$$= \frac{(-1)^{r+1}}{r!} \int\limits_{b_i}^{a_{i+1}} \left((t-x)_+^r - S_{r,r}\left((\cdot - x)_+^r, \Delta_N^\rho \cap [b_i, a_{i+1}], t\right)\right) s_{r+1,M_n}^{(r+1)}(\rho_{r+1}, t)\, dt,$$

где $S_{r,r}$ и $S_{r,1}$ – двойственные сплайы с дополнительными узлами.

Переходя с помощью замены переменных к отрезку $[0,1]$, получаем

$$\int\limits_{b_i}^{a_{i+1}} \left((t-x)_+^r - S_{r,r}\left((\cdot - x)_+^r, \Delta_N^\rho \cap [b_i, a_{i+1}], t\right)\right) dt =$$

$$= (a_{i+1} - b_i)^{r+1} \int\limits_0^1 \left((t-x)_+^r - S_{r,r}\left((\cdot - x)_+^r, \Delta_{1,r[0,1]}^\rho, t\right)\right) dt.$$

Положим

$$C_r = \max_{x \in [0,1]} \frac{1}{r!} \int_0^1 \left| \left((t-x)_+^r - S_{r,r}\left((\cdot - x)_+^r, \Delta_{1, r[0,1]}^{\rho}, t \right) \right) \right| dt.$$

Отсюда и из соотношения

$$\mathcal{A}_{2,i} = \left\| s_{r+1, M_n}(\rho_{r+1}) - s(\rho) \right\|_{q[b_i, a_{i+1}]}^q \le (a_{i+1} - b_i) \left\| s_{r+1, M_n}(\rho_{r+1}) - s(\rho) \right\|_{\infty[b_i, a_{i+1}]}^q$$

непосредственно получаем

$$\mathcal{A}_{2,i} \le (a_{i+1} - b_i)^{q(r+1)+1} C_r^q.$$

Учитывая (16) и тот факт, что $a_{i+1} - b_i = (r+1)/(M_n m_i)$, имеем

$$\mathcal{A}_{2,i} \le \frac{C}{n^{(r+1)q+1}} \quad (C \equiv \text{const}) \quad \text{и} \quad \mathcal{A}_2 \le \frac{C}{n^{(r+1)q+1}} M_n.$$

А так как $M = o(n)$, то при $n \to \infty$ будет выполняться соотношение (28) и

$$\left\| \rho_{r+1} - s(\rho) \right\|_q \le \left\| D_{r+1,k,q} \right\|_q \frac{\|\rho\|_\alpha}{n^{r+1}} (1 + o(1)),$$

что и завершает доказательство.

Случай $p = 1$ т. е. $q = \infty$, рассматривается аналогично.

1. *Корнейчук Н.П.* Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
2. *Никольский С.М.* Квадратурные формулы. – М.: Наука, 1979. – 254 с.
3. *Корнейчук Н.П., Лигун А.А.* Об оценке погрешности сплайн-интерполяции в интегральной метрике // Укр. мат. журн. – 1981. – **33**, № 5. – С. 391 – 394.
4. *Лигун А.А.* Об уклонении интерполяционных сплайнов на классах дифференцируемых функций // Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям. – Днепропетровск: Днепропетр. ун-т, 1985. – С. 25 – 32.
5. *Субботин Ю.Н., Черных Н.И.* Порядок наилучших сплайн-приближений некоторых классов функций // Мат. заметки. – 1970. – **7**, № 1. – С. 31 – 42.
6. *Лигун А.А., Шумейко А.А.* Оптимальный выбор узлов при приближении функций сплайнами // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1984. – № 6. – С. 18 – 22.
7. *Лигун А.А., Шумейко А.А.* О выборе узлов при приближении функций сплайнами наилучшего приближения // Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям. – Днепропетровск: Днепропетр. ун-т, 1985. – С. 32 – 39.
8. *Pence D.D.* Further asymptotic properties of best approximation by splines // J. Approxim. Theory. 1987. – **47**. – P. 1 – 17.
9. *Лигун А. А., Шумейко А. А.* Об оптимальном выборе узлов при приближении функций интерполяционными сплайнами // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1984. – **24**, № 9. – С. 1283 – 1293.
10. *Шумейко А.А.* О выборе узлов для интерполяционных параболических сплайнов // Изв. вузов. Математика. – 1990. – № 4. – С. 67 – 71.
11. *Bojanov B.D.* Uniqueness the optimal nodes of quadrature formula // Math. Comp. – 1981. – **36**, № 154. – P. 532 – 546.
12. *Моторный В.П., Лигун А.А., Доронин В.Г.* Оптимальное восстановление функций и функционалов. – Днепропетровск: Днепропетр. ун-т, 1994. –223 с.
13. *Моторный В.П.* Исследования днепропетровских математиков по оптимизации квадратурных формул // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 1. – С. 18 – 33.
14. *Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н.* Сплайны в вычислительной математике. – М.: Наука, 1976. – 248 с.

Получено 12.03.97,
после доработки — 02.09.98