УДК 517.938

І. М. Грод (Тернопіл. пед. ін-т),
В. Л. Кулик
(Ін-т математики НАН України, Київ; Політехніка Шльонська, Глівіце (Польща))

ПРО ЛОКАЛЬНІ ЗБУРЕННЯ ЛІНІЙНИХ РОЗШИРЕНЬ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ НА ТОРІ

We investigate a problem of the preservation of regularity property for linear extensions of dynamical systems on a torus under perturbations.

Досліджується задача збереження властивості регулярності лінійних розширень динамічних систем на торі при збуреннях.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \qquad \frac{dx}{dt} = A(\varphi)x, \tag{1}$$

де вектор-функція $a(\varphi)$ і матрична функція $A(\varphi)$ є неперервними за всією сукупністю змінних $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ і 2π-періодичними за кожною змінною φ_j, $j = \overline{1, m}$, тобто задані на m-вимірному торі $\mathcal{T}_m$; $x \in R^n$. Додатково відносно вектор-функції $a(\varphi)$ будемо припускати, що задача Коші

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \varphi|_{t=0} = \varphi_0$$

при кожному фіксованому значенні $\varphi_0 \in \mathcal{T}_m$ має єдиний розв'язок $\varphi_t(\varphi_0)$. Очевидно цей розв'язок визначений при всіх $t \in R$ і неперервно залежить від φ_0.

Нагадаємо [1], що через $C^0(\mathcal{T}_m)$ позначається простір неперервних функцій $F(\varphi)$, 2π-періодичних за кожною змінною φ_j, $j = \overline{1, m}$, а через $C'(\mathcal{T}_m; a)$ — підпростір $C^0(\mathcal{T}_m)$ таких функцій $F(\varphi)$, що функція $F(\varphi_t(\varphi_0))$ є неперервно диференційовною по t при всіх $t \in R$, $\varphi_0 \in \mathcal{T}_m$ і при цьому

$$\left.\frac{d}{dt} F(\varphi_t(\varphi_0))\right|_{t=0} \overset{\mathrm{df}}{=} \dot{F}(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m).$$

Позначимо через $\Omega_0^t(\varphi; A)$ матрицант лінійної системи

$$\frac{dx}{dt} = A(\varphi_t(\varphi))x, \tag{2}$$

$\Omega_{t_0}^t(\varphi; A)|_{t=t_0} = I_n$ — n-вимірна одинична матриця.

Означення. *Нехай існує $(n \times n)$-вимірна матрична функція $C(\varphi) \in \in C^0(\mathcal{T}_m)$, яка задовольняє оцінки*

$$\begin{aligned} \left\|\Omega_0^t(\varphi; A)\, C(\varphi)\right\| &\le Ke^{-\gamma t}, \quad t \ge 0, \\ \left\|\Omega_0^t(\varphi; A)\,(C(\varphi) - I_n)\right\| &\le Ke^{\gamma t}, \quad t < 0, \end{aligned} \tag{3}$$

з додатними сталими K та γ, які не залежать від $\varphi \in \mathcal{T}_m$.

Тоді функцію

$$G_0(\tau, \varphi) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(\varphi; A)\, C(\varphi_\tau(\varphi)), & \tau \le 0; \\ \Omega_\tau^0(\varphi; A)\,[C(\varphi_\tau(\varphi)) - I_n], & \tau > 0, \end{cases} \tag{4}$$

називають функцією Гріна – Самойленка задачі про інваріантні тори для системи (1).

Нагадаємо, що матрицант $\Omega^t_{t_0}(\varphi; A)$ має такі властивості:

$$\Omega^t_{t_0}(\varphi; A) \equiv \Omega^t_{\tau}(\varphi; A)\,\Omega^{\tau}_{t_0}(\varphi; A), \qquad \Omega^t_{t_0}(\varphi_z(\varphi); A) \equiv \Omega^{t+z}_{t_0+z}(\varphi; A)$$

при всіх $t, t_0, \tau, z \in R$ і $\varphi \in \mathcal{T}_m$, з яких, очевидно, випливає

$$\left[\Omega^t_{\tau}(\varphi; A)\right]^{-1} \equiv \Omega^{\tau}_t(\varphi; A).$$

***Зауваження* 1.** Виконання оцінок (3) еквівалентне тому, що

$$\|G_0(\tau, \varphi)\| \le Ke^{-\gamma|\tau|}, \qquad \tau \in R, \qquad \varphi \in \mathcal{T}_m,$$

з тими ж сталими K, γ.

Відомо [1], що існування функції Гріна – Самойленка (4) еквівалентне існуванню симетричної матриці $S(\varphi) \in C'(\mathcal{T}_m; a)$, для якої виконується умова

$$\left\langle \left[\dot{S}(\varphi) - S(\varphi)A^*(\varphi) - A(\varphi)S(\varphi)\right]x,\ x\right\rangle \ge \|x\|^2, \qquad \forall\, x \in R^n, \tag{5}$$

де $*$ означає транспонування матриці.

У випадку, коли матриця $S(\varphi)$ є невиродженою при всіх $\varphi \in \mathcal{T}_m$, існує єдина функція Гріна – Самойленка, тобто система (1) є регулярною.

Із умови (5) видно, що при малих змінах матриці $A(\varphi)$ система (1) також буде мати функцію Гріна – Самойленка. Виникає задача: описати клас збурень матриці $A(\varphi)$, не обов'язково малих за нормою, при яких зберігається регулярність системи (1).

Дослідженню цієї задачі і присвячена дана робота.

Справедливе наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай для матрицанта* $\Omega^t_0(\varphi; A)$ *лінійної системи рівнянь* (2) *виконується оцінка*

$$\left\|\Omega^t_0(\varphi; A)\right\| \le Ke^{-\gamma t}, \qquad t \ge 0 \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{T}_m \tag{6}$$

з додатними сталими K *та* γ, *незалежними від* $\varphi \in \mathcal{T}_m$ *і* $t \in R_+$.

Тоді збурена система

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \qquad \frac{dx}{dt} = (A(\varphi) + B(\varphi))\,x \tag{7}$$

при кожній матричній функції $B(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m)$ *з умовою*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \|B(\varphi_\sigma(\varphi))\|\,d\sigma \le K_1, \tag{8}$$

де стала $K_1 < \infty$, *буде регулярною.*

Доведення. Легко переконатись, що матрицант $\Omega^t_0(\varphi; A + B) = X(t)$ збуреної лінійної системи

$$\dot{x} = (A(\varphi_t(\varphi)) + B(\varphi_t(\varphi)))\,x$$

задовольняє інтегральне рівняння

$$X(t) = \Omega^t_0(\varphi; A)\left[I_n + \int\limits_0^t \Omega^{\sigma}_0(\varphi; A)\,B(\varphi_\sigma(\varphi))\,X(\sigma)\,d\sigma\right].$$

На основі цього рівняння з урахуванням оцінки (5) отримуємо

$$\|X(t)\| \le Ke^{-\gamma t}\left(1+\int_0^t e^{\gamma\sigma}\|B(\varphi_\sigma(\varphi))\|\,\|X(\sigma)\|\,d\sigma\right), \quad t \ge 0.$$

Проводячи далі добре відомі з теорії диференціальних рівнянь міркування, маємо

$$\Omega_0^t(\varphi_z(\varphi); A) \equiv \left\|\Omega_0^t(\varphi; A+B)\right\| \le Ke^{-\gamma t} e^{K\int_0^t \|B(\varphi_\sigma(\varphi))\| d\sigma}, \quad t \ge 0. \tag{9}$$

Тепер з урахуванням умови (8) на основі (9) можна стверджувати, що система має єдину функцію Гріна – Самойленка

$$G_0(\tau, \varphi) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(\varphi; A+B), & \tau \le 0; \\ 0, & \tau > 0, \end{cases}$$

тобто система (7) є регулярною.

Зауваження 2. Оцінку (6) можна замінити такою:

$$\left\|\Omega_0^t(\varphi; A)\right\| \le K_3 e^{\gamma t}, \quad t \le 0 \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{T}_m,$$

де K_3, γ — додатні сталі; при цьому теорема 1 залишається справедливою.

На підставі зауваження 2 можна стверджувати, що система вигляду

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \dot{x}_1 = A^+(\varphi)\,x_1, \quad \dot{x}_2 = A^-(\varphi)\,x_2 \tag{10}$$

з матрицантами $\Omega_\tau^t(\varphi; A^+)$, $\Omega_\tau^t(\varphi; A^-)$, які задовольняють оцінки

$$\begin{aligned} \left\|\Omega_0^t(\varphi; A^+)\right\| &\le Ke^{-\gamma t}, \quad 0 \le t, \quad \varphi \in \mathcal{T}_m, \\ \left\|\Omega_0^t(\varphi; A^-)\right\| &\le Ke^{\gamma t}, \quad t \le 0, \quad \varphi \in \mathcal{T}_m, \end{aligned} \tag{11}$$

зберігає властивість регулярності при збуреннях:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= a(\varphi), \\ \frac{dx_1}{dt} &= \left(A^+(\varphi) + B_1(\varphi)\right)x_1, \\ \frac{dx_2}{dt} &= \left(A^-(\varphi) + B_2(\varphi)\right)x_2, \end{aligned} \tag{12}$$

де матриці $B_i(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m)$ задовольняють умову (8).

Слід відмітити, що при виконанні оцінок (11) тривіальний тор $x_i = 0$ системи (10) є експоненціально дихотомічним, тобто лінійна система $\dot{x}_1 = A^+(\varphi_t(\varphi))\,x_1$, $\dot{x}_2 = A^-(\varphi_t(\varphi))\,x_2$ експоненціально дихотомічна на всій осі R рівномірно за параметрами $\varphi \in \mathcal{T}_m$. Виникає питання: чи буде зберігатись регулярність системи (16), якщо збурення $B(\varphi)$ вибирати не блочно-діагонального вигляду?

В системі (11) збурення $B(\varphi) = \operatorname{diag}\{B_1(\varphi), B_2(\varphi)\}$. Приклади показують, що регулярність системи (16) може порушуватись. Розглянемо один з таких прикладів:

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dt} &= \sin(\varphi),\\ \frac{dx_1}{dt} &= \cos(\varphi)x_1,\\ \frac{dx_2}{dt} &= \sin(\varphi)x_1 - \cos(\varphi)x_2.\end{aligned} \tag{13}$$

Переконаємось, що система (13) є регулярною. З цією метою розглянемо квадратичну форму

$$V(\varphi, x_1, x_2) = (\cos(\varphi))\,x_1^2 + 2(\sin(\varphi))\,x_1x_2 - (\cos(\varphi))\,x_2^2.$$

Матриця, яка відповідає цій квадратичній формі,

$$s(\varphi) = \begin{pmatrix}\cos(\varphi) & \sin(\varphi)\\ \sin(\varphi) & -\cos(\varphi)\end{pmatrix},$$

очевидно, є невиродженою, $\det s(\varphi) = -\cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi) = -1$ і власні значення такі: $\lambda_1 = +1$, $\lambda_2 = -1$.

Візьмемо похідну від квадратичної форми. В силу системи (13) маємо

$$\begin{aligned}\dot V(\varphi, x_1, x_2) &= -(\sin(\varphi))^2x_1^2 + 2(\cos(\varphi))^2x_1^2 + 2\cos(\varphi)\sin(\varphi)\,x_1x_2 +\\ &+ 2\sin(\varphi)\cos(\varphi)\,x_1x_2 + 2\sin(\varphi)\,x_1\big(\sin(\varphi)\,x_1 - \cos(\varphi)\,x_2\big) +\\ &+ (\sin(\varphi))^2x_2^2 - 2(\cos(\varphi))\,x_2\big(\sin(\varphi)\,x_1 - \cos(\varphi)\,x_2\big) =\\ &= \big(\sin^2(\varphi) + 2\cos^2(\varphi)\big)x_1^2 + 2\cos(\varphi)\sin(\varphi)\,x_1x_2 + \big(\sin^2(\varphi) + 2\cos^2(\varphi)\big)x_2^2 \ge\\ &\ge x_1^2 + \sin(2\varphi)\,x_1x_2 + x_2^2 \ge x_1^2 - |x_1||x_2| + x_2^2 \ge\\ &\ge x_1^2 - \frac{1}{2}\big(x_1^2 + x_2^2\big) + x_2^2 = \frac{1}{2}\big(x_1^2 + x_2^2\big).\end{aligned}$$

Таким чином, система (13) є регулярною, тривіальний тор $x = 0$ є експоненціально дихотомічним і розмір підпросторів E^+ і E^- рівний 1.

Для системи (13) матриця $A(\varphi)$ має вигляд

$$A(\varphi) = \begin{pmatrix}\cos(\varphi) & 0\\ \sin(\varphi) & -\cos(\varphi)\end{pmatrix}.$$

Тепер за матрицю $B(\varphi)$ вибираємо

$$B(\varphi) = \begin{pmatrix}0 & 0\\ -\sin(\varphi) & 0\end{pmatrix}.$$

Таким чином, збурена система має вигляд

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dt} &= \sin(\varphi),\\ \frac{dx_1}{dt} &= \cos(\varphi)x_1,\\ \frac{dx_2}{dt} &= -\cos(\varphi)x_2.\end{aligned} \tag{14}$$

Очевидно, система (14) не є регулярною. При цьому покажемо, що матриця $B(\varphi)$ задовольняє умову (8).

Дійсно, нехай $\varphi_t(\varphi_0)$ — розв'язок рівняння $\dot{\varphi} = \sin(\varphi)$ такий, що $\varphi|_{t=0} = \varphi_0$. Тоді, очевидно, можна записати $\frac{d}{dt}\varphi_t(\varphi_0) = \sin\varphi_t(\varphi_0)$. Далі, виділивши окремо три випадки: 1) $\varphi_0 \in (0, \pi)$; 2) $\varphi_0 = 0$ і $\varphi_0 = \pi$; 3) $\varphi_0 \in (\pi, 2\pi)$, розглянемо перший з них:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \| B(\varphi_\sigma(\varphi_0)) \| d\sigma = \lim_{\substack{T_1 \to -\infty \\ T_2 \to +\infty}} \int_{T_1}^{T_2} |\sin(\varphi_\sigma(\varphi_0))| d\sigma = \lim_{\substack{T_1 \to -\infty \\ T_2 \to +\infty}} \int_{T_1}^{T_2} \frac{d}{dt}\varphi_t(\varphi_0) dt =$$

$$= \lim_{\substack{T_1 \to -\infty \\ T_2 \to +\infty}} \left[\varphi_{T_1}(\varphi_0) - \varphi_{T_2}(\varphi_0) \right] = \pi - 0 = \pi.$$

Аналогічно для двох наступних випадків отримуємо:

2) при $\varphi_0 = 0$ і при $\varphi_0 = \pi$, враховуючи, що $\varphi_t(0) \equiv 0$, $\varphi_t(\pi) \equiv \pi$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \| B(\varphi_\sigma(\varphi_0)) \| d\sigma = 0;$$

3) при $\varphi_0 \in (\pi, 2\pi)$ $\quad \int_{-\infty}^{\infty} \| B(\varphi_\sigma(\varphi_0)) \| d\sigma = -(\pi - 2\pi) = \pi.$

Таким чином,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \| B(\varphi_\sigma(\varphi_0)) \| d\sigma = \begin{cases} \pi, & \varphi \neq \pi k; \\ 0, & \varphi = \pi k. \end{cases}$$

Теорема 2. *Нехай система з відокремленими змінними* (10) *є регулярною і відповідно для матрицантів* $\Omega_0^t(\varphi; A^{\pm})$ *виконуються оцінки* (11). *Тоді збурена система*

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi),$$
$$\frac{dx_1}{dt} = \left(A^+(\varphi) + B_1(\varphi) \right) x_1, \tag{15}$$
$$\frac{dx_2}{dt} = B_3(\varphi) x_1 + \left(A^-(\varphi) + B_2(\varphi) \right) x_2$$

при будь-яких матрицях $B_i(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m)$, $i = 1, 2$, *що задовольняють умову* (8), *буде регулярною*.

Доведення. Дійсно, з регулярності обох систем (11) випливає, що існує невироджена квадратична форма

$$V(\varphi, x_1, x_2) = \langle S_1(\varphi) x_1, x_1 \rangle + \langle S_2(\varphi) x_2, x_2 \rangle,$$

яка має знаковизначену похідну $\dot{V}$ в силу системи (12), тобто

$$\dot{V} \geq \| x_1 \|^2 + \| x_2 \|^2.$$

Тепер, вибираючи квадратичну форму

$$V_p(\varphi, x_1, x_2) = p \langle S_1(\varphi) x_1, x_1 \rangle + \langle S_2(\varphi) x_2, x_2 \rangle,$$

безпосередньо переконуємось, що при великих значеннях параметра $p > 0$ її похідна в силу системи (15) буде знаковизначеною. Це і дає, очевидно, можливість стверджувати, що система (15) є регулярною. Теорему доведено.

Теорема 3. *Нехай система* (1) *має єдину функцію Гріна – Самойленка* (3), (4) *з матрицею проектування* $C(\varphi) = C^2(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m)$. *Тоді система*

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= a(\varphi), \\ \frac{dx}{dt} &= \big(A(\varphi) + B(\varphi) - C(\varphi)B(\varphi)(I_n - C(\varphi))\big)\,x \end{aligned} \tag{16}$$

при кожній $(n \times n)$*-вимірній матриці* $B(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m)$, *яка задовольняє умову* (8), *є регулярною.*

Доведення. Нехай матриця $L(\varphi)$ зводить матрицю $C(\varphi)$ до жорданової форми:

$$L^{-1}(\varphi)\, C(\varphi)\, L(\varphi) = \operatorname{diag}\{I_r, 0\}. \tag{17}$$

Відомо, що матрицю $L(\varphi)$ не завжди можна вибрати 2π-періодичною по φ_j, $j = \overline{1, m}$. При цьому $L(\varphi_t(\varphi))$ неперервно диференційовна по t і $\dot{L}(\varphi) \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{d}{dt} L(\varphi_t(\varphi))\Big|_{t=0}$. Зауважимо, що заміна змінних

$$x = L(\varphi)\, y \tag{18}$$

в системі (1) зводить її до розщепленого вигляду за нормальними змінними, тобто

$$L^{-1}(\varphi)\big(A(\varphi)\, L(\varphi) - \dot{L}(\varphi)\big) = \operatorname{diag}\big\{A^+(\varphi),\ A^-(\varphi)\big\}.$$

Проведемо заміну змінних (18) в системі (16). З урахуванням (17) одержуємо систему

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= a(\varphi), \\ \dot{y} &= \left[\begin{pmatrix} A^+(\varphi) & 0 \\ 0 & A^-(\varphi) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \overline{B}_{11}(\varphi) & 0 \\ \overline{B}_{21}(\varphi) & \overline{B}_{22}(\varphi) \end{pmatrix}\right] y, \end{aligned}$$

де матриця

$$\overline{B}(\varphi) = \begin{pmatrix} \overline{B}_{11}(\varphi) & 0 \\ \overline{B}_{21}(\varphi) & \overline{B}_{22}(\varphi) \end{pmatrix} = L^{-1}(\varphi)\,[B(\varphi) - C(\varphi)\, B(\varphi)\,(I_n - C(\varphi))]\, L(\varphi),$$

очевидно, задовольняє умову (8). Таким чином, на основі теореми 2 ми переконуємось в справедливості теореми 3.

Зауваження 3. Теорема 3 залишається справедливою і в тому випадку, коли збурююча матриця має вигляд

$$B(\varphi) - (I_n - C(\varphi))\, B(\varphi)\, C(\varphi).$$

1. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Исследования дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. – Киев: Наук. думка, 1990. – 272 с.
2. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. – М.: Наука, 1987. – 302 с.
3. *Богданов Ю. С.* О преобразовании переменной матрицы к каноническому виду // Докл. АН БССР. – 1963. – **7**, № 3. – С. 152 – 154.

Одержано 12.11.97,
після доопрацювання — 20.04.99