УДК 517.929.7

Я. Й. Бігун (Ін-т математики НАН України, Київ)

УСЕРЕДНЕННЯ БАГАТОЧАСТОТНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ З ЛІНІЙНО ПЕРЕТВОРЕНИМ АРГУМЕНТОМ

We establish the existence of a solution and obtain an estimate of error of averaging method for a multifrequency system with linearly transformed argument and multipoint boundary conditions.

Встановлено існування розв'язку і одержано оцінку похибки методу усереднення для багаточастотної системи з лінійно перетвореним аргументом і багатоточковими крайовими умовами.

У цій роботі за допомогою методу усереднення [1] досліджується існування і єдиність розв'язку нелінійної крайової задачі для системи диференціальних рівнянь з швидкими та повільними змінними і лінійно перетвореним аргументом. Одержано явно залежну від малого параметра ε оцінку похибки методу усереднення. Для диференціальних рівнянь без запізнення такі результати одержані в [2] і грунтуються вони на оцінках відповідних осциляційних інтегралів [2, 3]. Для систем із запізненням, які в процесі еволюції проходять через резонанс, аналогічні оцінки осциляційних інтегралів побудовані в [4].

Відзначимо, що крайові задачі для функціонально-диференціальних рівнянь досліджувались в [5, 6]. Дослідженню крайових задач асимптотичними методами та їх застосуванням в теорії керування і нелінійних коливань присвячені праці [7 – 9] та ін.

1. Постановка задачі. Розглянемо систему рівнянь вигляду

$$\frac{dx}{d\tau} = X(\tau, x, x_\lambda, \varphi, \varphi_\theta, \varepsilon),$$
$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + Y(\tau, x, x_\lambda, \varphi, \varphi_\theta, \varepsilon), \tag{1}$$

де $\tau \in [0, L]$, $x, x_\lambda \in D$, $\varphi, \varphi_\theta \in \mathbb{R}^m$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, D — обмежена область в $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^q$ — дійсний q-вимірний векторний простір з нормою $\|z\| = |z_1| + \ldots + |z_q|$; $x_\lambda(\tau) = x(\lambda\tau)$, $\varphi_\theta(\tau) = \varphi(\theta\tau)$, λ і θ — числа із $(0, 1)$.

Методом усереднення система стандартного вигляду [1, с. 15] із змінною x_λ на півосі $\mathbb{R}^+$ досліджувалась в [10].

Нехай $N \geq 1$ і τ_α — точки із $[0, L]$ такі, що $0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_N \leq L$, $y = x(0)$, $\psi = \varphi(0)$. Для системи (1) задамо багатоточкові крайові умови

$$f_\nu(y, \psi, x_\alpha, \varphi_\alpha, \varepsilon) = 0, \qquad \nu = 1, \ldots, n+m. \tag{2}$$

Тут $f_\nu = f_\nu(y, \psi, x_1, \ldots, x_N, \varphi_1, \ldots, \varphi_N, \varepsilon)$ — задані функції, визначені в області $D_0 \times \mathbb{R}^m \times D^N \times \mathbb{R}^{mN} \times (0, \varepsilon_0]$, $D_0 \subset D$.

Припустимо, що виконуються наступні умови:

1. Для цілого $p \geq 2m$ $\omega_j \in \mathbb{C}^{p-1}[0, L]$, $j = 1, \ldots, m$, і для $\tau \in [0, L]$ норма матриці $(V^T(\tau) V(\tau))^{-1} V^T(\tau)$ обмежена, $V(\tau)$ — матриця порядку $p \times 2m$ з елементами $V_{ij}(\tau) = \omega_j^{(i-1)}(\tau)$, $V_{im+j}(\tau) = (\theta\, \omega_j(\theta\tau))^{(i-1)}$ для $j = 1, \ldots, m$, $i = 1, \ldots, p$. Ця умова забезпечує вихід траєкторії $x(\tau)$ із малого околу резонансу

за час $O(\varepsilon^{1/p})$ [4]. Умовою резонансу частот у системі (1) в точці $\tau \in [0, L]$ є виконання співвідношення $\gamma_{kl}(\tau) = (k, \omega(\tau)) + (l, \omega(\theta\tau))\,\theta = 0$, для цілочислових векторів k, l, $\|k\| + \|l\| \neq 0$, $(\cdot\,,\cdot)$ — скалярний добуток.

У випадку $p = 2m$ умова 1 полягає у відмінності від нуля на $[0, L]$ визначника Вронського порядку $2m$, побудованого за системою функцій $\{\omega(\tau), \theta\,\omega(\theta\tau)\}$.

2. В області $G = [0, L] \times D \times D \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times (0, \varepsilon_0]$ вектор-функція $A = [X(\tau, x, z, u, v, \varepsilon), Y(\tau, x, z, u, v, \varepsilon)]$ 2π-періодична по u_ν, v_ν, $\nu = 1, \ldots, m$, $A \in \mathbb{C}^1_{\tau,x,z}(G)$ і обмежена разом з похідними по τ, x, z сталою $a_1 > 0$.

3. В області $G_1 = [0, L] \times D \times D \times (0, \varepsilon_0]$ для коефіцієнтів Фур'є $A_{kl}(\tau, x, z, \varepsilon)$ функції $A(\tau, x, z, u, v, \varepsilon)$ виконується нерівність

$$\sup\|A_0\| + \sup\left\|\frac{\partial A_0}{\partial \tau}\right\| + \sup\left\|\frac{\partial A_0}{\partial x}\right\| + \sup\left\|\frac{\partial A_0}{\partial z}\right\| \le \bar{a}_2,$$

$$\sum_{\|k\| + \|l\| \neq 0} (\|k\| + \|l\|)^{\chi} \sup\|A_{kl}\| +$$

$$+ \sum_{\|k\| + \|l\| \neq 0} (\|k\| + \|l\|)^{\chi - 1}\left[\sup\left\|\frac{\partial A_{kl}}{\partial \tau}\right\| + \sup\left\|\frac{\partial A_{kl}}{\partial x}\right\| + \sup\left\|\frac{\partial A_{kl}}{\partial x_\lambda}\right\|\right] \le a_2$$

(ціле $\chi \ge 0$ буде вказано нижче).

Побудуємо відповідну (1) усереднену систему

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}}{d\tau} &= X_0(\tau, \bar{x}, \bar{x}_\lambda, \varepsilon), \\ \frac{d\bar{\varphi}}{d\tau} &= \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + Y_0(\tau, \bar{x}, \bar{x}_\lambda, \varepsilon), \end{aligned} \tag{3}$$

де

$$A_0(\tau, x, z, \varepsilon) = (2\pi)^{-2m} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} A(\tau, x, z, u, v, \varepsilon)\, du_1 \ldots dv_m.$$

Нехай D_0 — замкнена множина точок y із D, для яких $\bar{x}(0, y, \varepsilon) = y$ і розв'язок $\bar{x}(\tau, y, \varepsilon) \in D$, коли $\tau \in [0, L]$, разом з деяким ρ-околом. Справедливе наступне твердження.

Теорема 1 [4]. *Припустимо, що* $D_0 \neq \varnothing$, *виконуються умови* 1 – 3 *для* $\chi = 0$. *Тоді можна вказати* $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_0]$ *і незалежну від* ε *сталу* $c_1 > 0$ *таку, що для будь-яких* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$, $y \in D_0$, $\psi \in \mathbb{R}^m$ *існує єдиний розв'язок* $[x(\tau, y, \psi, \varepsilon), \varphi(\tau, y, \psi, \varepsilon)]$ *системи* (1), *визначений на* $[0, L]$, *і вірна оцінка*

$$\|x(\tau, y, \psi, \varepsilon) - \bar{x}(\tau, y)\| + \|\varphi(\tau, y, \psi, \varepsilon) - \bar{\varphi}(\tau, y, \psi, \varepsilon)\| \le c_1 \varepsilon^{1/p}. \tag{4}$$

Нехай $u = [x - \bar{x}, \varphi - \bar{\varphi}]$. Спочатку покажемо, що твердження теореми 1 вірне і для похідних відхилення розв'язків, а саме:

$$\eta_1(\tau, y, \psi, \varepsilon) \equiv \left\|\frac{\partial}{\partial y} u(\tau, y, \psi, \varepsilon)\right\| + \left\|\frac{\partial}{\partial \psi} u(\tau, y, \psi, \varepsilon)\right\| \le c_2 \varepsilon^{1/p}. \tag{5}$$

На підставі оцінок (4), (5) обгрунтуємо метод усереднення для крайової задачі (1), (2).

2. Оцінки похідних розв'язку усередненої системи за початковими значеннями. Побудуємо оцінки перших та деяких других похідних по y, ψ розв'язку $[\bar{x}(\tau, y, \varepsilon), \varphi(\tau, y, \psi, \varepsilon)]$ системи (3). Існування таких похідних доводиться аналогічно [11] (§ 21). А саме, якщо для кожного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ функція $A_0(\tau, x, z, \varepsilon)$ та її похідні по x, z до s-го порядку $(s \geq 1)$ неперервні за сукупністю аргументів (τ, x, z), то розв'язок системи (3) матиме по y, ψ неперервні за сукупністю τ, y, ψ похідні також до s-го порядку для кожного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ і всіх $\tau \in [0, L]$, $y \in D_0$, $\psi \in \mathbb{R}^m$.

Із інтегральних рівнянь для розв'язку усередненої системи (3) одержуємо такі твердження.

Лема 1. *Нехай для кожного* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *функція* $A_0(\tau, x, z, \varepsilon)$ *неперервна разом з першими похідними по* x, y *за сукупністю змінних* (τ, x, z) *і* $D_0 \neq \varnothing$. *Тоді для всіх* $\tau \in [0, L]$, $y \in D_0$, $\psi \in \mathbb{R}^m$ *і* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *справедливі оцінки*

$$\left\| \frac{\partial \bar{x}}{\partial y} \right\| \leq c_3, \qquad \left\| \frac{\partial \bar{x}_\lambda}{\partial y} \right\| \leq c_3,$$

$$\left\| \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} \right\| \leq c_4, \qquad \left\| \frac{\partial \bar{\varphi}_\theta}{\partial y} \right\| \leq \theta c_4,$$

$$\left\| \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \psi} \right\| = \left\| \frac{\partial \bar{\varphi}_\theta}{\partial \psi} \right\| = 1,$$

де $c_3 = \exp[\bar{a}_2(1 + \lambda^{-1})L]$, $c_4 = 2\bar{a}_2 c_3 L$.

Лема 2. *Нехай* $D_0 \neq \varnothing$, *в області* G_1 *вектор-функція* $A_0 \in C^2_{x, x_\lambda}$ *і*

$$\sum_{q=1}^{n} \left(\sup_{G_1} \left\| \frac{\partial^2 A_0}{\partial \bar{x}\, \partial \bar{x}_q} \right\| + \sup_{G_1} \left\| \frac{\partial^2 A_0}{\partial \bar{x}\, \partial \bar{x}_{\lambda q}} \right\| + \sup_{G_1} \left\| \frac{\partial^2 A_0}{\partial \bar{x}_\lambda\, \partial \bar{x}_q} \right\| + \sup_{G_1} \left\| \frac{\partial^2 A_0}{\partial \bar{x}_\lambda\, \partial \bar{x}_{\lambda q}} \right\| \right) \leq a_3, \tag{6}$$

де x_q, $x_{\lambda q}$ — *компоненти векторів* x, x_λ *відповідно. Тоді в області* $[0, L] \times \times D_0 \times (0, \varepsilon_0]$

$$\bar{R}(\tau, y, \varepsilon) \equiv \sum_{\nu=1}^{n} \sup \left\| \frac{\partial^2 \bar{x}(\tau, y, \varepsilon)}{\partial y_\nu\, \partial y} \right\| \leq c_5, \tag{7}$$

де $c_5 = a_3 c_3^2 n L \exp[\bar{a}_2(1 + \lambda^{-1})]$.

Доведення. Оскільки

$$\frac{\partial^2 \bar{x}(\tau, y, \varepsilon)}{\partial y_\nu\, \partial y} = \int_0^\tau \left[\frac{\partial X_0}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial y_\nu\, \partial y} + \frac{\partial X_0}{\partial \bar{x}_\lambda} \frac{\partial^2 \bar{x}_\lambda}{\partial y_\nu\, \partial y} \right] ds +$$

$$+ \int_0^\tau \left[\frac{\partial^2 X_0}{\partial y_\nu\, \partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial y} + \frac{\partial^2 X_0}{\partial y_\nu\, \partial \bar{x}_\lambda} \frac{\partial \bar{x}_\lambda}{\partial y} \right] ds,$$

то, врахувавши оцінки леми 1, одержимо

$$\bar{R}(\tau, y, \varepsilon) \leq \bar{a}_2(1 + \lambda^{-1}) \int_0^\tau \bar{R}(s, y, \varepsilon)\, ds + c_3 L \sum_{\nu=1}^{n} \left(\left\| \frac{\partial^2 X_0}{\partial y_\nu\, \partial \bar{x}} \right\| + \left\| \frac{\partial^2 X_0}{\partial y_\nu\, \partial \bar{x}_\lambda} \right\| \right) \leq$$

$$\leq \bar{a}_2(1 + \lambda^{-1}) \int_0^\tau \bar{R}(s, y, \varepsilon)\, ds + c_3^2 a_3 n L.$$

Із одержаної оцінки і нерівності Гроноулла випливає (7).

Зауваження. Нерівність (7) виконується і для розв'язку $\overline{\varphi}(\tau, y, \psi, \varepsilon)$.

3. Оцінка похідних по y, ψ відхилення $u(\tau, y, \psi, \varepsilon)$.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми* 1 *для* $\chi = 1$ *і для кожного* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *вектор-функція* $A \in C^2_{\tau, x, x_\lambda}$, *а її коефіцієнти Фур'є задовольняють в області* G_1 *нерівність* (6) *і*

$$S(A) \equiv \sum_{\|k\| + \|l\| \neq 0} \left[\sup \left\| \frac{\partial^2 A_{kl}}{\partial \tau \partial x} \right\| + \sup \left\| \frac{\partial^2 A_{kl}}{\partial \tau \partial x_\lambda} \right\| + \right.$$
$$+ \frac{1}{\|k\| + \|l\|} \sum_{q=1}^{n} \left(\sup \left\| \frac{\partial^2 A_{kl}}{\partial x \partial x_q} \right\| + \sup \left\| \frac{\partial^2 A_{kl}}{\partial x \partial x_{\lambda q}} \right\| + \right.$$
$$\left.\left. + \sup \left\| \frac{\partial^2 A_{kl}}{\partial x_\lambda \partial x_q} \right\| + \sup \left\| \frac{\partial^2 A_{kl}}{\partial x_\lambda \partial x_{\lambda q}} \right\| \right) \right] \leq a_4. \tag{8}$$

Тоді для $\varepsilon_1 > 0$, *визначеного оцінкою* (4), *і кожних* $\tau \in [0, L]$, $y \in D_0$, $\psi \in \mathbb{R}^m$ *і* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ *вірна оцінка* (5).

Доведення. Введемо такі позначення: $\bar{z} = [\bar{x}, \overline{\varphi}]$, $\bar{z}_{\lambda\theta} = [\bar{x}_\lambda, \overline{\varphi}_\theta]$, $u_{\lambda\theta} = [x_\lambda - \bar{x}_\lambda, \varphi_\theta - \overline{\varphi}_\theta]$,

$$B(A) = \left[\frac{\partial A}{\partial x}, \frac{\partial A}{\partial \varphi} \right], \quad B_{\lambda\theta}(A) = \left[\frac{\partial A}{\partial x_\lambda}, \frac{\partial A}{\partial \varphi_\theta} \right],$$
$$\tilde{A} = A(\tau, x, x_\lambda, \varphi, \varphi_\theta, \varepsilon) - A_0(\tau, x, x_\lambda, \varepsilon),$$
$$\overline{A}_0 = A_0(\tau, x, x_\lambda, \varepsilon) - A_0(\tau, \bar{x}, \bar{x}_\lambda, \varepsilon).$$

Із систем (1) і (3) для $\tau \in [0, L]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$, $y \in D_0$ і $\psi \in \mathbb{R}^m$ одержимо

$$\left[\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial \psi} \right] = \int_0^\tau \left[B(A) \frac{\partial u}{\partial y}, B(A) \frac{\partial u}{\partial \psi} \right] ds + \int_0^\tau \left[B_{\lambda\theta}(A) \frac{\partial u_{\lambda\theta}}{\partial y}, B_{\lambda\theta}(A) \frac{\partial u_{\lambda\theta}}{\partial \psi} \right] ds +$$
$$+ \int_0^\tau \left[B(\tilde{A}) \frac{\partial \bar{z}}{\partial y} + B_{\lambda\theta}(\tilde{A}) \frac{\partial \bar{z}_{\lambda\theta}}{\partial y}, B(\tilde{A}) \frac{\partial \bar{z}}{\partial \psi} + B_{\lambda\theta}(\tilde{A}) \frac{\partial \bar{z}_{\lambda\theta}}{\partial \psi} \right] ds +$$
$$+ \int_0^\tau \left[\frac{\partial \overline{A}_0}{\partial x} \frac{\partial \bar{x}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{A}_0}{\partial x_\lambda} \frac{\partial \bar{x}_\lambda}{\partial y}, 0 \right] ds \equiv$$
$$\equiv \int_0^\tau \left[B(A) \frac{\partial u}{\partial y}, B(A) \frac{\partial u}{\partial \psi} \right] ds + R_1 + R_2 + R_3.$$

Звідси для $\eta_1(\tau, y, \psi, \varepsilon)$ випливає оцінка

$$\eta_1(\tau, y, \psi, \varepsilon) \leq 2a_1 \int_0^\tau \eta_1(s, y, \psi, \varepsilon)\, ds + \|R_1\| + \|R_2\| + \|R_3\|. \tag{9}$$

Нескладно одержуються і такі оцінки:

$$\|R_1\| \leq 2a_1 \int_0^\tau \left(\left\| \frac{\partial u_{\lambda\theta}}{\partial y} \right\| + \left\| \frac{\partial u_{\lambda\theta}}{\partial \psi} \right\| \right) ds \leq 2a_1 \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\theta} \right) \int_0^\tau \eta_1(s, y, \psi, \varepsilon)\, ds,$$

$$\|R_3\| \leq a_3 c_3 L \|x(\tau, y, \psi, \varepsilon) - \bar{x}(\tau, y, \varepsilon)\| \leq a_3 c_1 c_3 L \varepsilon^{1/p}.$$

Для побудови оцінки $\|R_2\|$ використаємо оцінку осциляційного інтеграла [4]

$$\left\| \int\limits_0^\tau f_{kl}(s, \varepsilon) \exp\left[\frac{i}{\varepsilon} \int\limits_0^s \gamma_{kl}(z)\, dz\right] ds \right\| \leq$$

$$\leq c_6 \varepsilon^{1/p} \left(\sup \|f(\tau, \varepsilon)\| + \frac{1}{\|k\| + \|l\|} \sup \left\| \frac{\partial f(\tau, \varepsilon)}{\partial \tau} \right\| \right), \tag{10}$$

справедливу для всіх $\tau \in [0, L]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$, якщо виконується умова 1 п. 1, $f \in C_\tau^1$ і разом з похідною обмежена на $[0, L] \times (0, \varepsilon_0]$ сталою, незалежною від ε.

Справді, для R_2 маємо

$$\|R_2\| \leq \sum_{\|k\| + \|l\| \neq 0} \sum_{\nu = 1}^{n} \sup_{\tau \in [0, L]} \left\| \int\limits_0^\tau f_{kl}^{(\nu)}(s, \varepsilon) \exp\left[\frac{i}{\varepsilon} \int\limits_0^s \gamma_{kl}(z)\, dz\right] ds \right\|,$$

де $f_{kl}^{(\nu)}(\tau, \varepsilon)$, $\nu = 1, 2, 3$, рівні відповідно функціям

$$\frac{\partial A_{kl}}{\partial x}(\tau, x, x_\lambda, \varepsilon) \frac{\partial \bar{x}}{\partial y} + \frac{\partial A_{kl}}{\partial x_\lambda}(\tau, x, x_\lambda, \varepsilon) \frac{\partial \bar{x}_\lambda}{\partial y},$$

$$A_{kl}(\tau, x, x_\lambda, \varepsilon) \left(k \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} + l \frac{\partial \bar{\varphi}_\theta}{\partial y} \right), \quad A_{kl}(\tau, x, x_\lambda)(k + l),$$

помноженим на

$$\exp\left[i(k, \varphi) + i(l, \varphi_\theta) - \frac{i}{\varepsilon} \int\limits_0^\tau \gamma_{kl}(z)\, dz \right].$$

Тоді, враховуючи нерівності умови 3 п. 1 для $\chi = 1$ і (8), на підставі (10) отримуємо

$$\|R_2\| \leq c_6 \varepsilon^{1/p} \left\{ \sum_{\|k\| + \|l\| \neq 0} \left((a_1(1 + 2c_3 + c_4) + c_4)(\|k\| + \theta\|l\| + \right.\right.$$

$$+ \|k\| + \|l\|) \sup_{G_1} \|A_{kl}\| + (1 + 3a_1)(1 + c_3 + c_4) \times$$

$$\left.\left. \times \left(\sup_{G_1} \left\| \frac{\partial A_{kl}}{\partial \tau} \right\| + \sup_{G_1} \left\| \frac{\partial A_{kl}}{\partial x} \right\| + \sup_{G_1} \left\| \frac{\partial A_{kl}}{\partial x_\lambda} \right\| \right) \right) + c_3 S(A) \right\} \leq c_7 \varepsilon^{1/p},$$

де $c_7 = c_6[1 + c_1 + 3a_1](a_1 + c_3 + c_4) \max(1, a_2, a_4)$.

На підставі оцінок для R_1, R_2 і R_3 із нерівності (9) одержуємо

$$\eta_1(\tau, y, \psi, \varepsilon) \leq (a_3 c_1 c_3 L + c_7) \exp\left[2a_1 L \left(1 + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\theta} \right) \right] \varepsilon^{1/p} \equiv c_2 \varepsilon^{1/p}$$

для всіх $\tau \in [0, L]$, $y \in D_0$, $\psi \in \mathbb{R}^m$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$. Теорему доведено.

4. Крайова задача. Розглянемо крайову задачу (1), (2) і відповідну їй усереднену систему (3) з крайовими умовами

$$f_\nu(\bar{y}, \bar{\psi}, \bar{x}_\alpha, \bar{\varphi}_\alpha, \varepsilon) = 0, \quad \nu = 1, \ldots, n + m. \tag{11}$$

де $\bar{x}_\alpha = \bar{x}(\tau_\alpha, \bar{y}, \varepsilon)$, $\bar{\varphi}_\alpha = \bar{\varphi}(\tau_\alpha, \bar{y}, \bar{\psi}, \varepsilon)$.

Дослідимо питання існування єдиного розв'язку $v = [x(\tau, y, \psi, \varepsilon), \varphi(\tau, y, \psi, \varepsilon)]$ задачі (1), (2) у малому околі розв'язку $\bar{v} = [\bar{x}(\tau, \bar{y}, \varepsilon), \bar{\varphi}(\tau, \bar{y}, \bar{\psi}, \varepsilon)]$ усередненої задачі (3), (11), існування якого припускається, і покажемо, що правильна оцінка

$$\|v(\tau, y, \psi, \varepsilon) - \bar{v}(\tau, \bar{y}, \bar{\psi}, \varepsilon)\| \le c_8 \varepsilon^{1/p}, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_2], \quad \tau \in [0, L], \tag{12}$$

де $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_1]$.

Введемо наступні позначення. Нехай $M = (\bar{y}, \bar{\psi}, \bar{x}_\nu, \bar{\varphi}_\nu, \varepsilon)$ — точка в $D^{N+1} \times \mathbb{R}^{m(N+1)} \times (0, \varepsilon_0]$,

$$R_{\bar{y}}(\varepsilon) = \frac{\partial f}{\partial \bar{y}}(M) + \sum_{\alpha=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}_\alpha}(M) \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{y}}(\tau_\alpha, \bar{y}, \varepsilon) + \frac{\partial f}{\partial \bar{\varphi}_\alpha}(M) \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{y}}(\tau_\alpha, \bar{y}, \bar{\psi}, \varepsilon) \right),$$

$$R_{\bar{\psi}}(\varepsilon) = \frac{\partial f}{\partial \bar{\varphi}}(M) + \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial \bar{\varphi}_\alpha}(M),$$

$R_{\bar{y}\bar{\psi}} = [R_{\bar{y}}, R_{\bar{\psi}}]$ — матриця порядку $n + m$, складена із матриць $R_{\bar{y}}$ і $R_{\bar{\psi}}$.

Теорема 3. *Нехай*:

1) $A \in C^2_{\tau, x, x_\lambda}(G)$, *виконуються умови* 1 *і* 3 *п.* 1 *для* $\chi = 1$, *а також нерівності* (6) *і* (8);

2) *для кожного* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ *існує єдиний розв'язок крайової задачі* (3), (11), *який лежить в* D *разом з деяким* ρ*-околом*;

3) *вектор-функціонал* l, $lv = f(y, \psi, x_\alpha, \varphi_\alpha, \varepsilon)$, *для кожного* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ *визначений в кулі* $B(\bar{v}, r) \subset C[0, L]$, $r > 0$ — *деяка стала*;

4) $f_\nu \in C^2_{y, \psi, x_\alpha, \varphi_\alpha}(G)$ *і обмежена разом з похідними до другого порядку включно*;

5) *для кожного* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ *матриця* $R_{\bar{y}\bar{\psi}}$ *невироджена і*

$$\sup_{\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]} \|R^{-1}_{\bar{y}\bar{\psi}}(\varepsilon)\| \le a_5.$$

Тоді можна вказати таке $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$, *що для кожного* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2]$ *в околі розв'язку усередненої крайової задачі існує єдиний розв'язок крайової задачі* (1), (2) *і для будь-яких* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2]$ *і* $\tau \in [0, L]$ *вірна оцінка* (12).

Доведення. Нехай $\mu \in \mathbb{R}^n$, $\xi \in \mathbb{R}^m$ такі, що $\|\mu\| + \|\xi\| \le \rho_1 = 0{,}5\rho c_9$, де $c_9 = \exp(-\bar{a}_2 \lambda^{-1})$. Тоді для вказаних μ, ξ із системи (3) і умови 3 одержимо

$$\|\bar{v}(\tau, \bar{y} + \mu, \bar{\psi} + \xi, \varepsilon) - \bar{v}(\tau, \bar{y}, \bar{\psi}, \varepsilon)\| \le 0{,}5\rho, \quad \tau \in [0, L], \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0].$$

Тому для кожного $\varepsilon \in \left(0, \varepsilon_1\left(\frac{\rho}{2}\right)\right)$, як випливає з теореми 1, існує єдиний розв'язок $v(\tau, \bar{y} + \mu, \bar{\psi} + \xi, \varepsilon)$ системи (1) і для нього вірна оцінка (4).

Якщо такий розв'язок задовольняє і крайові умови (2), то для деякого $c_{10} > 0$ і $\|\mu\| + \|\xi\| \le c_{10} \varepsilon^{1/p}$, всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ і $\tau \in [0, L]$, одержуємо

$$\|\bar{v}(\tau, \bar{y} + \mu, \bar{\psi} + \xi, \varepsilon) - \bar{v}(\tau, \bar{y}, \bar{\psi}, \varepsilon)\| \le$$

$$\le \|\bar{v}(\tau, \bar{y} + \mu, \bar{\psi} + \xi, \varepsilon) - \bar{v}(\tau, \bar{y} + \mu, \bar{\psi} + \xi, \varepsilon)\| +$$

$$+\ \|\overline{v}(\tau,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)-\overline{v}(\tau,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon)\|\le$$
$$\le (c_1+c_{10})\varepsilon^{1/p} = c_8\varepsilon^{1/p}. \tag{13}$$

Підставимо розв'язок $v(\tau,\overline{x}+\mu,\overline{\varphi}+\xi,\varepsilon)$, де $\|z\| = \|\mu\|+\|\xi\|\le\rho_1$, в крайову умову (3). Тут $z = \mathrm{col}(\mu,\xi)$. Розклавши функції $f_\nu(\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,$ $x(\tau_\alpha,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon),\ \varphi(\tau_\alpha,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon),\varepsilon)$, $\nu=1,\ldots,m+n$, за формулами Тейлора в точці M, одержимо

$$R_{\overline{y}\overline{\psi}}(\varepsilon)z =$$
$$= -\Bigg[\sum_{\alpha=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial\overline{x}_\alpha}(M)\big(x(\tau_\alpha,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)-\overline{x}(\tau_\alpha,\overline{y}+\mu,\varepsilon)\big)+P_1(\mu,\varepsilon),$$
$$\sum_{\alpha=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial\overline{\varphi}_\alpha}(M)\big(\varphi(\tau_\alpha,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)-\overline{\varphi}(\tau_\alpha,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)\big)+P_2(\mu,\xi,\varepsilon)\Bigg]\equiv$$
$$\equiv \Phi_1(z,\varepsilon).$$

Тут $P_1(\mu,\varepsilon)$ і $P_2(\mu,\xi,\varepsilon)$ утворені залишковими членами розкладу функцій $f_\nu(\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\overline{x}(\tau_\alpha,\overline{y}+\mu,\varepsilon),\overline{\varphi}(\tau_\alpha,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon),\varepsilon)$ в точці M.

Із умов на праві частини системи (3) і нерівності (7) випливає, що

$$\left\|\overline{x}(\tau_\alpha,\overline{y}+\mu,\varepsilon)-\overline{x}(\tau_\alpha,\overline{y},\varepsilon)-\frac{\partial\overline{x}}{\partial\overline{y}}(\tau_\alpha,\overline{y},\varepsilon)\mu\right\|\le 0{,}5\,c_5 n\|\mu\|^2$$

і правильна і аналогічна нерівність для $\overline{\varphi}(\tau_\alpha,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)$. На підставі цих оцінок і умови 4 теореми для $\varepsilon\in(0,\varepsilon_1]$ одержимо

$$\|P_1(\mu,\varepsilon)\|+\|P_2(\mu,\xi,\varepsilon)\|\le c_{11}(\varepsilon^{1/p}+\|z\|)\|z\|, \tag{14}$$
$$c_{11}\equiv\mathrm{const}>0.$$

Покладемо

$$c_{10} = 2a_5c_1c_{12},$$
$$c_{12} = \sum_{\alpha=1}^{N}\left(\sup_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]}\left\|\frac{\partial f}{\partial\overline{x}_\alpha}(M)\right\|+\sup_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]}\left\|\frac{\partial f}{\partial\overline{\varphi}_\alpha}(M)\right\|\right),$$
$$c_{13} = a_5(c_{12}(c_2+2c_5c_{10})+c_{14}(1+c_{10})),$$
$$\varepsilon_2 = \min\left(\varepsilon_1,(2a_5c_{11}(1+c_{10}))^{-p},(\rho_1c_{10}^{-1})^p,(2c_{13})^{-p},(rc_8^{-1})^p\right),$$

c_{14} — деяка стала.

Тоді для $\varepsilon\in(0,\varepsilon_2]$ із нерівностей (4), (14) і умови 5 теореми випливає

$$\|R_{\overline{y}\overline{\psi}}^{-1}(\varepsilon)\Phi_1(z,\varepsilon)\|\le\left(\sup_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_2]}\|R_{\overline{y}\overline{\psi}}^{-1}(\varepsilon)\|\right)\|\Phi_1(z,\varepsilon)\|\le$$
$$\le a_5(c_1c_{12}\varepsilon^{1/p}+c_{11}\|z\|(\|z\|+\varepsilon^{1/p})).$$

Якщо $\|z\|\le c_{10}\varepsilon^{1/p}$, то згідно з вибором ε_2

$$\|\Phi(z,\varepsilon)\|\le 0{,}5\,c_{10}\varepsilon^{1/p}+a_5c_{11}(c_{10}+1)\varepsilon^{1/p}\|z\|\le c_{10}\varepsilon^{1/p},$$

де $\Phi(z,\varepsilon) = R_{\overline{y}\overline{\psi}}^{-1}(\varepsilon)\Phi_1(z,\varepsilon)$.

Отже, $\Phi(z,\varepsilon)$ для кожного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2]$ відображає множину $S_\varepsilon = \{z: \|z\| \le c_{10}\varepsilon^{1/p}\}$ у себе. Це відображення є також стискуючим для $z \in S_\varepsilon$. Справді, скориставшись тотожністю

$$z = -R^{-1}_{\bar{y}\bar{\psi}}(\varepsilon)\big(f_\nu(\bar{y}+\mu, \bar{\psi}+\xi, \bar{x}(\tau_\alpha, \bar{y}+\mu, \bar{\psi}+\xi, \varepsilon), \bar{\varphi}(\tau_\alpha, \bar{y}+\mu, \bar{\psi}+\xi, \varepsilon), \varepsilon) - \\ - R_{\bar{y}\bar{\psi}}(\varepsilon)z\big) \equiv \Phi(z,\varepsilon),$$

одержимо

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z}(z,\varepsilon) = R^{-1}_{\bar{y}\bar{\psi}}\left\{\sum_{\alpha=1}^{N}\left[\frac{\partial f}{\partial\bar{x}_\alpha}(M), \frac{\partial f}{\partial\bar{\varphi}_\alpha}(M)\right]\left(\left[\frac{\partial}{\partial y}(w_\alpha - \bar{w}_\alpha), \frac{\partial}{\partial\psi}(w_\alpha - \bar{w}_\alpha)\right] + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left[\frac{\partial}{\partial y}(\bar{w}_\alpha - \bar{w}(\tau_\alpha, \bar{y}, \bar{\psi}, \varepsilon)), \frac{\partial}{\partial\psi}(\bar{w}_\alpha - \bar{w}(\tau_\alpha, \bar{y}, \bar{\psi}, \varepsilon))\right]\right) + [P_3(z,\varepsilon), P_4(z,\varepsilon)]\right\},$$

де $w_\alpha = v(\tau_\alpha, \bar{y}+\mu, \bar{\psi}+\xi, \varepsilon)$, $\bar{w}_\alpha = \bar{v}(\tau_\alpha, \bar{y}+\mu, \bar{\psi}+\xi, \varepsilon)$. Матричні функції $P_3(z,\varepsilon)$ і $P_4(z,\varepsilon)$ на підставі (4), (7) і умови 4 теореми задовольняють нерівність

$$\|P_3\| + \|P_4\| \le c_{14}(\|z\| + \varepsilon^{1/p}), \quad c_{14} = \text{const} > 0. \tag{15}$$

Нарешті, враховуючи (5), (7), (15) і вибір ε_2, маємо

$$\left\|\frac{\partial\Phi(z,\varepsilon)}{\partial z}\right\| \le a_5(c_2c_{12}\varepsilon^{1/p} + 2c_5c_{12}\|z\| + c_{14}(\|z\| + \varepsilon^{1/p})) \le \\ \le c_{13}\varepsilon^{1/p} \equiv q(\varepsilon) \le \frac{1}{2}.$$

Таким чином, на підставі теореми про нерухому точку [12, с. 9] існує єдиний розв'язок $z^* = [\mu^*, \xi^*]$ із $c_{10}\varepsilon^{1/p}$-околу точки $\bar{z}$. Цьому розв'язку відповідає єдиний розв'язок $v(\tau, \bar{y}+\mu^*, \bar{\varphi}+\xi^*, \varepsilon)$ крайової задачі (1), (2) і на підставі (13) виконується оцінка (12). Теорему доведено.

Наслідок. *Задамо для системи* (1) *крайові умови вигляду*

$$\sum_{\nu=0}^{N} A_\nu(\varepsilon)x(\tau_\nu) = a(\varepsilon), \qquad \sum_{\nu=0}^{N} B_\nu(\varepsilon)\varphi(\tau_\nu) = b(y, x_\alpha, \varepsilon),$$

де $A_\nu(\varepsilon)$ *і* $B_\nu(\varepsilon)$ — *задані квадратні матриці порядку* n *і* m *відповідно, функції* $a(\varepsilon)$ *і* $b(y, x_\alpha, \varepsilon)$ *визначені в області* $G_2 = D_1^{N+1} \times (0, \varepsilon_0]$. *Умови* 4, 5 *теореми* 3 *виконуються, якщо* $b \in \mathbb{C}^1_{y,x_\alpha}(G_3)$, *для всіх* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, *матриці*

$$A(\varepsilon) = A_0(\varepsilon) + \sum_{\nu=1}^{N} A_\nu(\varepsilon)\frac{\partial\bar{x}(\tau_\nu, \bar{y}, \varepsilon)}{\partial\bar{y}},$$

$$B(\varepsilon) = B_0(\varepsilon) + \sum_{\nu=1}^{N} B_\nu(\varepsilon)$$

невироджені і

$$\sup_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]}\|A^{-1}(\varepsilon)\| + \sup_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]}\|B^{-1}(\varepsilon)\| < \infty.$$

Зауваження. Оцінку (12) можна покращити, якщо побудувати послідовні наближення для початкових значень

$$z^{(i)} = -R_{\overline{y}\overline{\psi}}^{-1}(\varepsilon)\{f(\overline{y}+\mu^{(i-1)}, \overline{\psi}+\xi^{(i-1)}, x(\tau_\nu, \overline{y}+\mu^{(i-1)}, \overline{\psi}+\xi^{(i-1)}, \varepsilon),$$

$$\varphi(\tau_\nu, \overline{y}+\mu^{(i-1)}, \overline{\psi}+\xi^{(i-1)}, \varepsilon), \varepsilon) - [R_{\overline{y}}(\varepsilon)\mu^{(i-1)}, R_{\overline{\psi}}(\varepsilon)\xi^{(i-1)}]\}, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

$$z^{(0)} = 0.$$

Як відомо [9, с. 25], для i-го наближення справедлива оцінка

$$\|z^{(i)} - z^*\| \le \frac{q^i(\varepsilon)}{1 - q(\varepsilon)}\|z^{(1)}\| \le 2c_8 c_{13}^i \varepsilon^{(i+1)/p}. \tag{16}$$

Тоді i-те наближення розв'язку крайової задачі (1), (2) визначається із системи (1) з початковими умовами $\overline{y}+\mu^{(i)}$, $\overline{\psi}+\xi^{(i)}$.

Із системи (1) на підставі нерівності Гронуолла і (16) одержимо оцінку

$$\|v^{(i)}(\tau, \overline{y}+\mu^{(i)}, \overline{\psi}+\xi^{(i)}, \varepsilon) - v^{(i)}(\tau, \overline{y}+\mu^*, \overline{\psi}+\xi^*, \varepsilon)\| \le$$

$$\le \|z^{(i)} - z^*\| \exp(c_{15}L) \le c_{16}\varepsilon^{(i+1)/p},$$

$c_{15} = 3a_1(1+\lambda^{-1})(1+\theta^{-1})$, $c_{16} = 2c_8 c_{13}^i \exp(c_{15}L)$, справедливу для всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2]$, $\tau \in [0, L]$.

1. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике. – Киев: Наук. думка, 1971, 440 с.
2. *Самойленко А. М., Петришин Р. І.* Багаточастотні коливання нелінійних систем. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1998. – 340 с.
3. *Самойленко А. М.* К вопросу обоснования метода усреднения для многочастотных колебательных систем // Дифференц. уравнения. – 1987. – **23**, № 2. – С. 267–278.
4. *Бігун Я. Й.* Метод усереднення в багаточастотних системах з запізненням // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 2. – С. 299–303.
5. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1991. – 280 с.
6. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. – 320 с.
7. *Акуленко Л. Д.* Асимптотические методы оптимального управления. – М.: Наука, 1987. – 368 с.
8. *Плотников В. А.* Метод усреднения в задачах управления. – Киев; Одесса: Лыбидь, 1992. – 188 с.
9. *Митропольский Ю. А., Байнов Д. Д., Милушева С. Д.* Применение метода усреднения для решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений // Мат. физика. – 1979. – Вып. 25. – С. 3–22.
10. *Самойленко А. М., Мустафаев Х. З.* О принципе усреднения для одного класса систем дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 10. – С. 1363–1369.
11. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1970. – 280 с.
12. *Приближенное* решение операторных уравнений / М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко, П. П. Забрейко и др. – М.: Наука, 1969. – 456 с.

Одержано 20.01.99