УДК 517.95

М. І. Іванчов (Львів. ун-т)

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ОДНОЧАСНОГО ВИЗНАЧЕННЯ ДВОХ КОЕФІЦІЄНТІВ У ПАРАБОЛІЧНОМУ РІВНЯННІ

We establish conditions for the existence and uniqueness of the solution of inverse problem which consists in simultaneous determination of two unknown coefficients in a parabolic equation. One of the coefficients is leading and depends on a time variable, and another one depends on a space variable.

Встановлено умови існування та єдиності розв'язку оберненої задачі, яка полягає в одночасному визначенні двох невідомих коефіцієнтів у параболічному рівнянні. Один з коефіцієнтів є старшим і залежить від часу, інший — від просторової змінної.

В обернених задачах для параболічних рівнянь часто виникає необхідність визначення не одного, а декількох невідомих параметрів. Це можуть бути теплофізичні характеристики тіла, що виражаються через старші коефіцієнти, або параметри керування, пов'язані з вільним членом, та ін. [1 – 4]. Характерною особливістю таких задач є те, що невідомі параметри, як правило, вважаються залежними від однакових змінних. Це зумовлено різними методами визначення невідомих параметрів в залежності від того, від яких змінних вони залежать — від просторових змінних, від часу, чи від температури. В даній роботі розглянуто обернену задачу для параболічного рівняння з двома невідомими коефіцієнтами, один з яких є функцією часу, а інший залежить від просторової змінної.

В області $Q_T = \{(x,t):\ 0 < x < h,\ 0 < t < T\}$ розглянемо обернену задачу для рівняння

$$u_t = a(t)(u_{xx} + b(x)u_x) + c(x,t)u + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

з невідомими коефіцієнтами $a(t)$ і $b(x)$, початковою умовою

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0,h], \tag{2}$$

крайовими умовами

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(h,t) = \mu_2(t), \quad t \in [0,T], \tag{3}$$

та умовами перевизначення

$$a(t)u_x(0,t) = \mu_3(t), \quad t \in [0,T], \tag{4}$$

$$\int_0^{t_0} a(t)u_x(x,t)\,dt = \psi(x), \quad x \in [0,h], \tag{5}$$

де t_0 — фіксоване число, $t_0 \in (0,T]$.

Теорема 1. *Припустимо, що виконуються умови:*

$A_1)$ $\varphi(x) \in H^{2+\gamma}[0,h]$, $\psi(x) \in H^{1+\gamma}[0,h]$, $\mu_i(t) \in C^1[0,T]$, $i = 1, 2$, $\mu_3(t) \in C[0,T]$, $c(x,t), f(x,t) \in H^{\gamma,0}(\overline{Q}_T)$, $0 < \gamma < 1$ (*означення просторів див. у* [5]);

$A_2)$ $\varphi(x) \le 0$, $\varphi'(x) \ge 0$, $\psi(x) > 0$, $x \in [0,h]$; $\varphi'(0) > 0$; $\mu_1(t) \le 0$, $\mu_2(t) \le 0$, $\mu_3(t) > 0$, $\mu_1'(t) - f(0,t) \le 0$, $\mu_2'(t) - f(h,t) \ge 0$, $t \in [0,T]$, $c(x,t) \le 0$, $f(x,t) \le 0$, $f_x(x,t) \ge 0$, $(x,t) \in \overline{Q}_T$;

$A_3)$ *виконуються умови узгодженості нульового і першого порядків* [5], *в яких значення* $a(0)$, $b(0)$, $b(h)$ *знаходяться з умов* (1) – (5).

Тоді можна вказати таке число t_1, $0 < t_1 \le T$, *що при умові* $t_0 \le t_1$ *задача* (1) – (5) *має розв'язок* $(a(t), b(x), u(x,t))$, *що належить класу* $C[0, t_1] \times \times H^{\gamma}[0, h] \times H^{2+\gamma, 1}(\overline{Q}_{t_1})$, *такий, що* $a(t) > 0$, $t \in [0, t_1]$.

Доведення. Вважаючи відомими функції $a(t)$ і $b(x)$, задачу (1) – (3) зведемо до системи інтегральних рівнянь

$$u(x,t) = P_1(a,b,u,v)(x,t), \qquad (x,t) \in \overline{Q}_T, \tag{6}$$

$$v(x,t) = P_2(a,b,u,v)(x,t), \qquad (x,t) \in \overline{Q}_T, \tag{7}$$

де

$$P_1(a,b,u,v)(x,t) = u_0(x,t) + \int_0^t \int_0^h G_1(x,t,\xi,\tau)\big(a(\tau)b(\xi)v(\xi,\tau) + c(\xi,\tau)u(\xi,\tau)\big)d\xi d\tau,$$

$$P_2(a,b,u,v)(x,t) = u_{0x}(x,t) + \int_0^t \int_0^h G_{1x}(x,t,\xi,\tau)\big(a(\tau)b(\xi)v(\xi,\tau) + c(\xi,\tau)u(\xi,\tau)\big)d\xi d\tau,$$

$u_0(x,t)$ — розв'язок рівняння

$$u_{0t} = a(t)u_{0xx} + f(x,t), \qquad (x,t) \in Q_T, \tag{8}$$

що задовольняє умови (2), (3), а $G_1(x,t,\xi,\tau)$ — функція Гріна задачі (8), (2), (3) [6].

З умови перевизначення (4) отримуємо рівняння

$$a(t) = P_3(a,b,u,v)(t), \qquad t \in [0,T], \tag{9}$$

в якому

$$P_3(a,b,u,v)(t) = \frac{\mu_3(t)}{P_2(a,b,u,v)(0,t)}.$$

Інтегруючи рівняння (1) по t від 0 до t_0 і використовуючи умову перевизначення (5), приходимо до рівняння

$$b(x) = P_4(a,b,u,v)(x), \qquad x \in [0,h], \tag{10}$$

де оператор P_4 задається формулою

$$P_4(a,b,u,v)(t) = \frac{1}{\psi(x)}\Big(u(x,t_0) - \varphi(x) - \psi'(x) - $$

$$- \int_0^{t_0} c(x,t)u(x,t)dt - \int_0^{t_0} f(x,t)dt\Big), \qquad x \in [0,h],$$

в якій $u(x,t)$ визначається з рівняння (6).

Отже, задачу (1) – (5) зведено до системи рівнянь (6), (7), (9), (10).

Встановимо існування неперервного розв'язку вказаної системи, застосовуючи до неї теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора. Для цього спочатку оцінимо розв'язки системи (6), (7), (9), (10).

За принципом максимуму [5] для розв'язку $u(x,t)$ задачі (1) – (3) з довільними неперервними функціями $a(t) > 0$, $b(x)$ справедлива оцінка

$$|u(x,t)| \le M_0 < \infty, \qquad (x,t) \in \overline{Q}_T, \tag{11}$$

де стала M_0 визначається тільки заданими величинами.

Внаслідок еквівалентності задачі (1) – (3) та системи інтегральних рівнянь

(6), (7) оцінка (11) справедлива і для розв'язків системи (6), (7), (9), (10). З (10) і (11) випливає оцінка

$$|b(x)| \leq B_0 < \infty, \quad x \in [0, h], \tag{12}$$

де стала B_0 залежить тільки від відомих величин.

Встановимо оцінку $v(x, t)$. З означення функції $u_0(x, t)$ знаходимо

$$|u_{0x}(x, t)| \leq C_1 + C_2 \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}}, \tag{13}$$

де $C_i > 0$, $i = 1, 2,$ — сталі, $\theta(t) = \int_0^t a(\tau) d\tau$.

Позначимо $v_0(t) = \max_{x \in [0,h]} |v(x, t)|$. Враховуючи оцінки (11) – (13), з рівняння (7) одержуємо нерівність

$$v_0(t) \leq C_1 + C_3 \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} + C_4 \int_0^t \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}}\right) a(\tau) v_0(\tau) d\tau.$$

Застосовуючи дану нерівність саму до себе і проводячи міркування, аналогічні до тих, що використовуються при доведенні леми Гронуолла, отримуємо

$$|v(x, t)| \leq C_5 + C_6 \sqrt{\theta(t)} + C_7 \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} + r_0(\theta(t)), \tag{14}$$

де $r_0(\sigma) \geq 0$ — відома неперервна при $\sigma \geq 0$ функція така, що $r_0(0) = 0$.

З оцінок (12), (14) встановлюємо

$$\left| \int_0^t \int_0^h G_{1x}(0, t, \xi, \tau) a(\tau) b(\xi) v(\xi, \tau) d\xi d\tau \right| \leq B_0 \int_0^t a(\tau) v_0(\tau) d\tau \times$$

$$\times \int_0^h G_{1x}(0, t, \xi, \tau) d\xi \leq \frac{B_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{a(\tau) v_0(\tau) d\tau}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} \leq r_1(\theta(t)), \tag{15}$$

де $r_1(\sigma)$ — відома функція з такими ж властивостями, що й $r_0(\sigma)$.

За принципом максимуму $u(x, t) \leq 0$ в $\overline{Q}_T$ і, отже, $c(x, t) u(x, t) \geq 0$ в $\overline{Q}_T$. Крім цього, з означення функції $u_0(x, t)$ та умови A_2 випливає, що

$$u_{0x}(0, t) \geq \int_0^h G_2(0, t, \xi, 0) \varphi'(\xi) d\xi > 0,$$

де $G_2(x, t, \xi, \tau)$ — функція Гріна для рівняння (8) з крайовими умовами другого роду.

Разом з оцінкою (15) це дає можливість отримати з рівняння (9) нерівність

$$a(t) \leq \frac{C_8}{\int_0^h G_2(0, t, \xi, 0) \varphi'(\xi) d\xi - r_1(\theta(t))}, \quad C_8 = \max_{[0,T]} \mu_3(t), \tag{16}$$

в якій знаменник є додатним на деякому проміжку $[0, t_1]$ внаслідок умови $r_1(0) = 0$. Домножаючи на знаменник обидві частини нерівності (16), інтегруючи результат від 0 до t і проводячи в інтегралі заміну $\sigma = \theta(t)$, зводимо нерівність (16) до вигляду

$$r_2(\theta(t)) \leq C_8 t, \quad t \in [0, t_1], \tag{17}$$

де

$$r_2(s) = \int_0^s \left(\frac{1}{\sqrt{\pi\sigma}} \int_0^h \varphi'(\xi) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(\xi+2nh)^2}{4\sigma} \right) d\xi - r_1(\sigma) \right) d\sigma .$$

Позначимо через $[0, s_0]$ проміжок, на якому виконується нерівність

$$\frac{1}{\sqrt{\pi\sigma}} \int_0^h \varphi'(\xi) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(\xi+2nh)^2}{4\sigma} \right) d\xi - r_1(\sigma) > 0, \quad \sigma \in [0, s_0].$$

Тоді $r_2'(s) > 0,\ s \in [0, s_0]$, й існує функція $r_2^{-1}(y)$, обернена до $r_2(s)$, яка визначена на проміжку $[0, R_0]$, де $R_0 = r_2(s_0)$. Це дає можливість встановити з (17) оцінку

$$\theta(t) \le r_2^{-1}(C_8 t) \tag{18}$$

при умові, що $C_8 t \le R_0$. Нехай $t_1,\ 0 < t_1 \le T$, — число, що задовольняє вказану умову. Тоді з (18) одержуємо

$$\theta(t) \le \Theta_0 < \infty, \quad t \in [0, t_1], \tag{19}$$

з сталою $\Theta_0 > 0$, що залежить від відомих величин. Повертаючись до нерівності (16) і враховуючи (19), отримуємо оцінку $a(t)$ зверху

$$a(t) \le \frac{C_8}{\min\limits_{\sigma \in [0,\Theta_0]} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi\sigma}} \int_0^h \varphi'(\xi) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(\xi+2nh)^2}{4\sigma} \right) d\xi - r_1(\sigma) \right)}$$

або

$$a(t) \le A_1 < \infty, \quad t \in [0, t_1]. \tag{20}$$

В свою чергу, за допомогою (14), (19) з рівняння (9) знаходимо

$$a(t) \ge \frac{C_9}{C_{10} + C_{11} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}}}$$

або

$$\min_{[0,t_1]} a(t) \ge \frac{C_9}{C_{10} + C_{12} \left(\min\limits_{[0,t_1]} a(t) \right)^{-1/2}} . \tag{21}$$

Розв'язуючи нерівність (21) відносно $\left(\min\limits_{[0,t_1]} a(t) \right)^{1/2}$, отримуємо оцінку $a(t)$ знизу

$$a(t) \ge A_0 > 0, \quad t \in [0, t_1], \tag{22}$$

яка разом з (19) дає можливість встановити на підставі нерівності (14) оцінку для $v(x, t)$:

$$|v(x, t)| \le M_1 < \infty, \quad (x, t) \in \overline{Q}_{t_1} . \tag{23}$$

Позначимо $\omega = (a, b, u, v)$, $P = (P_1, P_2, P_3, P_4)$. Тоді систему рівнянь (6), (7), (9), (10) можна розглядати як операторне рівняння

$$\omega = P\omega, \tag{24}$$

в якому внаслідок оцінок (11), (12), (20), (22), (23) оператор P переводить множину

$$\mathcal{N} \equiv \{ (a(t), b(x), u(x,t), v(x,t)) \in C[0, t_1] \times C[0,h] \times C(\overline{Q}_{t_1}) \times C(\overline{Q}_{t_1}) :$$
$$A_0 \le a(t) \le A_1, |b(x)| \le B_0, |u(x,t)| \le M_0, |v(x,t)| \le M_1 \}$$

в себе. Для застосування теореми Шаудера залишається переконатись у тому, що множина $P\mathcal{N}$ є одностайно неперервною. Для цього достатньо повторити міркування, наведені в [6]. Отже, за теоремою Шаудера існує неперервний розв'язок системи (6), (7), (9), (10).

Покажемо, що розв'язок системи рівнянь (6), (7), (9), (10) є і розв'язком задачі (1) – (5).

За властивостями теплових потенціалів [7] маємо $u(x,t) \in H^{2+\gamma,1}(\overline{Q}_{t_1})$, що забезпечує належність $b(x)$ до класу $H^{\gamma}[0,h]$. Виконання умови (4) є очевидним. Покажемо, що умова (5) теж виконується. Нехай

$$\int_0^{t_0} a(t) u_x(x,t)\,dt = \chi(x), \quad \chi(x) \not\equiv \psi(x), \quad x \in [0,h].$$

Інтегруючи рівняння (1) і використовуючи введене позначення, маємо

$$\chi'(x) = p(x) - b(x)\chi(x), \tag{25}$$

де

$$p(x) = u(x,t_0) - \varphi(x) - \int_0^{t_0} c(x,t) u(x,t)\,dt - \int_0^{t_0} f(x,t)\,dt.$$

Оскільки функція $b(x)$ задовольняє рівняння (10), підставимо в (25) замість $b(x)$ його значення, знайдене з цього рівняння:

$$\chi'(x) = p(x) - \frac{p(x) - \psi'(x)}{\psi(x)} \chi(x).$$

Подамо отриману рівність у вигляді

$$q'(x) = -\frac{p(x)}{\psi(x)} q(x), \quad \text{де} \quad q(x) = 1 - \frac{\chi(x)}{\psi(x)}.$$

З означення функції $\chi(x)$ та умов узгодженості A_3 маємо

$$\chi(0) = \int_0^{t_0} a(t) u_x(0,t)\,dt = \int_0^{t_0} \mu_3(t)\,dt = \psi(0),$$

тобто $q(0) = 0$. Звідси $q(x) \equiv 0$, $x \in [0,h]$, а отже, $\chi(x) \equiv \psi(x)$, і умова (5) задовольняється. Це означає, що розв'язок системи рівнянь (6), (7), (9), (10) має потрібну гладкість і задовольняє умови (1) – (5). Теорему доведено.

Теорема 2. *При виконанні умов* $c(x,t) \in H^{\gamma}(\overline{Q}_T)$, $\mu_3(t) \ne 0$, $t \in [0,T]$, $\psi(x) \ne 0$, $x \in [0,h]$, *розв'язок задачі* (1) – (5) $(a(t), b(x), u(x,t))$, *що належить класу* $C[0,T] \times H^{\gamma}[0,h] \times H^{2+\gamma,1}(\overline{Q}_T)$, *єдиний.*

Доведення. Якщо $(a_i(t), b_i(x), u_i(x,t))$, $i = 1, 2$, — два розв'язки задачі (1) – (5), то їх різниця $a(t) = a_1(t) - a_2(t)$, $b(x) = b_1(x) - b_2(x)$, $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ задовольняє умови

$$u_t = a_1(t)(u_{xx} + b_1(x) u_x) + c(x,t) u + a(t)(u_{2xx}(x,t) + b_1(x) u_{2x}(x,t)) +$$
$$+ a_2(t) b(x) u_{2x}(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{26}$$

$$u(x,0)=0,\quad x\in[0,h],\qquad u(0,t)=u(h,t)=0,\quad t\in[0,T], \tag{27}$$

$$a_1(t)u_x(0,t)=-a(t)u_{2x}(0,t),\quad t\in[0,T], \tag{28}$$

$$\int_0^{t_0} a_1(t)u_x(x,t)\,dt=-\int_0^{t_0} a(t)u_{2x}(x,t)\,dt,\qquad x\in[0,h]. \tag{29}$$

Позначимо через $G(x,t,\xi,\tau)$ функцію Гріна [5] для рівняння

$$u_t=a_1(t)\big(u_{xx}+b_1(x)u_x\big)+c(x,t)u$$

з умовами (27). За її допомогою знайдемо розв'язок задачі (26), (27) і підставимо його в умову (28):

$$a(t)u_{2x}(0,t)=-a_1(t)\int_0^t\int_0^h G_x(0,t,\xi,\tau)\big(a(\tau)\big(u_{2\xi\xi}(\xi,\tau)+$$

$$+\,b_1(\xi)\,u_{2\xi}(\xi,\tau)\big)+a_2(\tau)b(\xi)\,u_{2\xi}(\xi,\tau)\big)\,d\xi\,d\tau,\qquad t\in[0,T]. \tag{30}$$

Проінтегруємо рівняння (26) по t від 0 до t_0, враховуючи при цьому умови (27), (29):

$$u(x,t_0)=b(x)\int_0^{t_0} a_2(t)u_{2x}(x,t)\,dt.$$

Звідси, використовуючи умову (5), в яку підставлено функцію $u_2(x,t)$, отримуємо рівність

$$b(x)\psi(x)=u(x,t_0)$$

або, підставляючи розв'язок задачі (26), (27), маємо

$$b(x)\psi(x)=\int_0^{t_0}\int_0^h G(x,t_0,\xi,\tau)\big(a(\tau)\big(u_{2\xi\xi}(\xi,\tau)+$$

$$+\,b_1(\xi)\,u_{2\xi}(\xi,\tau)\big)+a_2(\tau)b(\xi)\,u_{2\xi}(\xi,\tau)\big)\,d\xi\,d\tau,\qquad x\in[0,h]. \tag{31}$$

Отже, функції $a(t)$ і $b(x)$ є розв'язком системи інтегральних рівнянь (30), (31), з яких одне є рівнянням Вольтерра, а інше — рівнянням Фредгольма.

Розглянемо рівняння

$$b(x)\psi(x)=\int_0^{t_0}\int_0^h G(x,t_0,\xi,\tau)\,a_2(\tau)b(\xi)u_{2\xi}(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau,\qquad x\in[0,h], \tag{32}$$

і покажемо, що воно має тільки тривіальний розв'язок $b(x)\equiv 0$. Позначимо через $(b(x),w(x,t))$ розв'язок оберненої задачі, що складається з рівняння

$$w_t=a_1(t)\big(w_{xx}+b_1(x)w_x\big)+c(x,t)w+a_2(t)b(x)\,u_{2x}(x,t),\quad (x,t)\in Q_T, \tag{33}$$

та умов (27) і

$$\int_0^{t_0} a_1(t)w_x(x,t)\,dt=0. \tag{34}$$

Як випливає з викладеного вище, задача (33), (27), (34) зводиться до рівняння (32). Позначимо

$$g(x,t)=a_2(t)b(x)\,u_{2x}(x,t).$$

Тоді розв'язок задачі (33), (27) визначається за формулою

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \int_0^t g_n(\tau) \exp(-\lambda_n(\theta_1(t) - \theta_1(\tau))) d\tau, \tag{35}$$

де $X_n(x)$, λ_n, $n = 1, 2, \ldots$, — власні функції і власні значення відповідної задачі Штурма–Ліувілля, $g_n(t)$, $n = 1, 2, \ldots$, — коефіцієнти розкладу функції $g(x, t)$ в ряд Фур'є за власними функціями $X_n(x)$. Підставимо (35) в умову (34):

$$\sum_{n=1}^{\infty} X'_n(x) \int_0^{t_0} a_1(t)\, dt \int_0^t g_n(\tau) \exp(-\lambda_n(\theta_1(t) - \theta_1(\tau))) d\tau = 0.$$

Звідси

$$\int_0^{t_0} a_1(t)\, dt \int_0^t g_n(\tau) \exp(-\lambda_n(\theta_1(t) - \theta_1(\tau))) d\tau = 0. \tag{36}$$

Після зміни порядку інтегрування в (36) приходимо до рівності

$$\int_0^{t_0} g_n(\tau) \exp(-\lambda_n(\theta_1(t) - \theta_1(\tau))) d\tau = 0. \tag{37}$$

Враховуючи (37), з (35) отримуємо $w(x, t_0) = 0$, $x \in [0, h]$, або, подаючи розв'язок $w(x, t)$ задачі (33), (27) за допомогою функції Гріна, маємо

$$\int_0^{t_0} \int_0^h G(x, t_0, \xi, \tau) a_2(\tau) b(\xi) u_{2\xi}(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau = 0, \qquad x \in [0, h].$$

Тоді з (32) випливає, що $b(x) \equiv 0$, $x \in [0, h]$. Отже, рівняння (32) має тільки тривіальний розв'язок, а розв'язок рівняння (31) існує і єдиний при довільному вільному члені. Це дає можливість з рівняння (31) виразити $b(x)$ через $a(t)$ і підставити його в рівняння (30), що перетворить його в однорідне інтегральне рівняння Вольтерра другого роду, єдиним розв'язком якого є $a(t) \equiv 0$, $t \in [0, T]$. Тоді і $u(x, t) \equiv 0$ в $\overline{Q}_T$ як розв'язок однорідного рівняння, що відповідає рівнянню (26), з однорідними умовами (27). Теорему доведено.

Зауважимо, що отримані теореми можна застосувати для знаходження старшого коефіцієнта $a(t) b(x)$ в рівнянні

$$u_t = a(t) b(x) u_{xx} + c(x, t) u + f(x, t),$$

яке заміною $y = \int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{b(\xi)}}$ зводиться до рівняння вигляду (1).

1. *Искендеров А. Д.* Об одной обратной задаче для квазилинейного параболического уравнения // Дифференц. уравнения. – 1974. – **10**, № 5. – С. 890–898.
2. *Ахундов А. Я.* Обратная задача для линейных параболических уравнений // Докл. АН АзССР. – 1983. – **39**, № 5. – С. 3–6.
3. *Музылев Н. В.* Об единственности одновременного определения коэффициентов теплопроводности и объемной теплоемкости // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1983. – **23**, № 1. – С. 102–108.
4. *Иванчов Н. И.* Об обратной задаче одновременного определения коэффициентов теплопроводности и теплоемкости // Сиб. мат. журн. – 1994. – **35**, № 3. – С. 612–621.
5. *Ладыженская О.А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
6. *Іванчов М. І.* Обернені задачі теплопровідності з нелокальними умовами. – Київ, 1995. – 84 с. – (Препринт / Міністерство освіти України. ІСДО).
7. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – М.: Мир, 1968. – 428 с.

Одержано 23.03.98,
після доопрацювання – 08.12.98