УДК 517.9

А. В. Плотников (Одес. акад. строительства и архитектуры),
А. В. Тумбрукаки (Южно-укр. пед. ун-т, Одесса)

ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С МНОГОЗНАЧНЫМИ РЕШЕНИЯМИ

The theorem on the existence and uniqueness of classical solution is proved for an integro-differential equation with the Hukuhara derivative and an averaging scheme is justified for equations of this sort in the standard form.

Доводиться теорема існування та єдиності класичного розв'язку для інтегро-диференціального рівняння з похідною Хукухари, а також обгрунтовується одна із схем усереднення для такого типу рівнянь в стандартному вигляді.

В начале 70-х годов появились работы [1 – 5] по дифференциальным уравнениям с компактно выпуклозначными решениями, в которых производная от многозначного отображения понималась в смысле Хукухары. А затем, естественно, была рассмотрена возможность применения одной из схем усреднения к такого типа уравнениям в стандартной форме [1, 6].

В данной работе доказывается теорема существования и единственности классического решения для интегро-дифференциальных уравнений с производной Хукухары и обосновывается одна из схем усреднения для такого типа уравнений в стандартной форме.

Пусть R^n — n-мерное вещественное евклидово пространство с нормой $\|x\| = \left(x_1^2+\ldots+x_n^2\right)^{1/2}$, $x=(x_1,\ldots,x_n)\in R^n$.

Через $\mathrm{Comp}(R^n)$ $(\mathrm{Conv}(R^n))$ обозначим пространство, состоящее из всех непустых компактных (и выпуклых) подмножеств из R^n с метрикой Хаусдорфа

$$h(A,B) = \min\{r\geq 0 \mid A\subset B+S_r(r),\ B\subset A+S_r(0)\},$$

где $A,B\in\mathrm{Comp}(R^n)$; $S_r(a)$ — шар в R^n радиуса $r\geq 0$ с центром в точке $a\in$ $\in R^n$.

Рассмотрим систему интегро-дифференциальных уравнений с производной Хукухары

$$D_hX = F\left(t, X, \int_0^t \Phi(t,s,X(s))\,ds\right), \qquad X(0) = X^0, \tag{1}$$

где $X(\cdot)\colon R^1\to\mathrm{Conv}(R^n)$, $F(\cdot,\cdot,\cdot)\colon R^1\times\mathrm{Conv}(R^n)\times\mathrm{Conv}(R^n)\to\mathrm{Conv}(R^n)$, $\Phi(\cdot,\cdot,\cdot)\colon R^1\times R^1\times\mathrm{Conv}(R^n)\to\mathrm{Conv}(R^n)$ — многозначные отображения; D_hX — производная Хукухары от многозначного отображения $X(\cdot)$ [7]; интеграл от многозначного отображения $\Phi(\cdot,\cdot,\cdot)$ понимается в смысле Ауманна [8]; $X^0\in$ $\in\mathrm{Conv}(R^n)$.

Определение. *Многозначное отображение* $X(\cdot)\colon R^1\to\mathrm{Conv}(R^n)$ *называется классическим решением интегро-дифференциального уравнения* (1) *на отрезке* $[0,T]$, *если оно непрерывно дифференцируемо по Хукухаре на этом отрезке и удовлетворяет системе* (1) *всюду.*

Теперь сформулируем и докажем теорему существования и единственности классического решения для системы (1).

Теорема 1. *Пусть многозначное отображение* $F(\cdot,\cdot,\cdot)$ *в области* $Q\{|t|\leq \leq a,\ h(X,X^0)\leq b,\ h(Y,0)\leq c\}$ *удовлетворяет условиям:*

1) $F(\cdot,\cdot,\cdot)$ *непрерывно по* t, *а по* X *и* Y *удовлетворяет условию Липшица*

$$h\Big(F(t,X',Y'),F(t,X'',Y'')\Big)\leq \lambda(t)h\Big(h(X',X'')+h(Y',Y'')\Big),$$

где $\lambda(t)$ — *непрерывная на* R^1 *функция;*

2) *для любого элемента* (t,X,Y) *из области* Q *выполняется неравенство*

$$h(F(t,X,Y),0)\leq M,$$

а многозначное отображение $\Phi(t,s,X)$ *удовлетворяет следующим условиям:*

а) $\Phi(\cdot,\cdot,\cdot)$ *непрерывно по* t *и* s, *а по* X *удовлетворяет условию Липшица*

$$h\Big(\Phi(t,s,X'),\ \Phi(t,s,X'')\Big)\leq \mu(t,s)\,h(X',X''),$$

где $\mu(t,s)$ — *непрерывная на* $R^1\times R^1$ *функция;*

б) для любого элемента (t,s,X) *из области* Q *выполняется неравенство*

$$h\Big(\Phi(t,s,X),\ \Phi(t,s,X^0)\Big)\leq N.$$

Тогда существует и притом единственное классическое решение $X=X(\cdot)$ *системы* (1) *на отрезке* $I=\{t:|t|\leq d\}$, $d=\min\{a,b/M,c/N\}$, *и* $\kappa= =\sup_{t\in I}\{\lambda^0(t)+\mu^0(t)\}<1$, *где*

$$\lambda^0(t)=\int_0^t\lambda(\tau)d\tau,\qquad \mu^0(t)=\int_0^t\lambda(\tau)\int_0^\tau\mu(\tau,s)ds\,d\tau,\qquad \mu_1(t)=\int_0^t\mu(t,s)ds.$$

Доказательство. Очевидно, что система (1) эквивалентна интегральной системе вида

$$X(t)=X^0+\int_0^t F\left(\tau,X(\tau),\int_0^\tau\Phi(\tau,s,X(s))ds\right)d\tau. \tag{2}$$

Будем искать решения данной системы методом последовательных приближений:

$$X_1(t)=X^0,$$

$$X_2(t)=X^0+\int_0^t F\left(\tau,X^0,\int_0^\tau\Phi\big(\tau,s,X^0\big)ds\right)d\tau,$$

$$X_k(t)=X^0+\int_0^t F\left(\tau,X_{k-1}(\tau),\int_0^\tau\Phi\big(\tau,s,X_{k-1}(s)\big)ds\right)d\tau,$$

$$Y_0(\tau)=\int_0^\tau\Phi\big(\tau,s,X^0\big)ds,\qquad Y_k(\tau)=\int_0^\tau\Phi(\tau,s,X_k(s))ds.$$

Легко убедиться, что при $|t|\leq d$ и $k=1,2,\ldots$

$$h\left(X_k(t), X^0\right) \le b, \qquad h(Y_k(t), 0) \le c.$$

Далее рассмотрим для $t \in I$

$$h\left(X_{k+1}(t), X_k(t)\right) =$$

$$= h\left(\int_0^t F\left(\tau, X_k(\tau), \int_0^\tau \Phi(\tau, s, X_k(s))\, ds\right) d\tau, \int_0^t F\left(\tau, X_{k-1}(\tau), \int_0^\tau \Phi\left(\tau, s, X_{k-1}(s)\right) ds\right) d\tau\right) \le$$

$$\le \int_0^t \left[\lambda(\tau) h\left(X_k(\tau), X_{k-1}(\tau)\right) + h\left(\int_0^\tau \Phi(\tau, s, X_k(s))\, ds, \int_0^\tau \Phi\left(\tau, s, X_{k-1}(s)\right) ds\right)\right] d\tau \le$$

$$\le \int_0^t \lambda(\tau) h\left(X_k(\tau), X_{k-1}(\tau)\right) d\tau + \int_0^t \lambda(\tau) \int_0^\tau \mu(\tau, s) h\left(X_k(s), X_{k-1}(s)\right) ds\, d\tau \le$$

$$\le \int_0^t \lambda(\tau) \sup_{t \in I} h\left(X_k(t), X_{k-1}(t)\right) d\tau + \int_0^t \lambda(\tau) \int_0^\tau \mu(\tau, s) \sup_{t \in I} h\left(X_k(t), X_{k-1}(t)\right) ds\, d\tau =$$

$$= \sup_{t \in I} h\left(X_k(t), X_{k-1}(t)\right) \left(\int_0^t \lambda(\tau)\, d\tau + \int_0^t \lambda(\tau) \int_0^\tau \mu(\tau, s)\, ds\, d\tau\right) =$$

$$= \sup_{t \in I} h\left(X_k(t), X_{k-1}(t)\right) (\lambda_0(t) + \mu_0(t)) \le \sup_{t \in I} h\left(X_k(t), X_{k-1}(t)\right) \kappa.$$

Если обозначить

$$\sup_{t \in I} h(X_2(t), X_1(t)) = L,$$

то можно убедиться, что

$$\sup_{t \in I} h\left(X_{k+1}(t), X_k(t)\right) \le L\kappa^{k-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots .$$

Таким образом, для всех $t \in I$

$$h\left(X_{k+1}(t), X_k(t)\right) \le L\kappa^{k-1}.$$

Проведя аналогичные рассуждения, можно убедиться, что для $k \ge 2$

$$h\left(D_h X_{k+1}(t), D_h X_k(t)\right) \le \lambda(t) \sup_{t \in I} h\left(X_k(t), X_{k-1}(t)\right)(1 + \mu_1(t)).$$

А поскольку

$$\sup_{t \in I} h\left(X_k(t), X_{k-1}(t)\right) \le L\kappa^{k-2},$$

то

$$h\left(D_h X_{k+1}(t), D_h X_k(t)\right) \le \bar{\lambda} \kappa^{k-2}(1 + \bar{\mu}_1) L,$$

где $\bar{\lambda} = \sup_{t \in I} \{\lambda(t)\}$, $\bar{\mu}_1 = \sup_{t \in I} \{\mu_1(t)\}$.

Из изложенного выше следует, что последовательности $\{D_h X_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{X_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$ будут сходиться при $\kappa < 1$ и притом равномерно.

Если $\lim_{k \to \infty} X_k(\cdot) = Z(\cdot)$, то $Z(\cdot)$ имеет непрерывную производную и при $t \in I$ удовлетворяет неравенству $h(Z(t), X^0) \le b$.

Теперь покажем, что многозначное отображение удовлетворяет системе (1).

Для этого в равенстве

$$X_k(t) = X^0 + \int_0^t F\left(\tau, X_{k-1}(\tau), \int_0^\tau \Phi\big(\tau, s, X_{k-1}(s)\big)\,ds\right)d\tau \tag{3}$$

перейдем к пределу при $k \to \infty$. Для этого необходимо доказать возможность предельного перехода под знаком интеграла, т. е. что

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^t F\left(\tau, X_{k-1}(\tau), \int_0^\tau \Phi\big(\tau, s, X_{k-1}(s)\big)\,ds\right)d\tau = \int_0^t F\left(\tau, Z(\tau), \int_0^\tau \Phi(\tau, s, Z(s))\,ds\right)d\tau, \tag{4}$$

$$h\left(\int_0^t F\left(\tau, X_{k-1}(\tau), \int_0^\tau \Phi\big(\tau, s, X_{k-1}(s)\big)\,ds\right)d\tau, \int_0^t F\left(\tau, Z(\tau), \int_0^\tau \Phi(\tau, s, Z(s))\,ds\right)d\tau\right) \le$$

$$\le \int_0^t \lambda(\tau) h\big(X_{k-1}(\tau), Z(\tau)\big)\,d\tau + \int_0^t \lambda(\tau)\int_0^\tau h\Big(\Phi\big(\tau, s, X_{k-1}(s)\big), \Phi(\tau, s, Z(s))\Big)\,ds\,d\tau.$$

Поскольку $X_{k-1}(t) \to Z(t)$, $\Phi\big(\tau, s, X_{k-1}(s)\big) \to \Phi(\tau, s, Z(s))$ при $k \to \infty$, то последние интегралы при $|t| \le d$ как угодно малы, если k достаточно велико. Следовательно, равенство (4) имеет место. Переходя теперь в (3) к пределу при $k \to \infty$, получаем

$$Z(t) = X^0 + \int_0^t F\left(\tau, Z(\tau), \int_0^\tau \Phi(\tau, s, Z(s))\,ds\right)d\tau.$$

Таким образом, получили, что многозначное отображение $Z(\cdot)$ удовлетворяет системе (1). Покажем единственность этого решения.

Пусть существует $R(\cdot)$ — другое решение системы (1). Тогда, так как для любого $t \in I$

$$h(R(t), Z(t)) \le \sup_{t\in I} h(R(t), Z(t))\,(\lambda_0(t) + \mu_0(t)),$$

то

$$\sup_{t\in I} h(R(t), Z(t)) \le \sup_{t\in I} h(R(t), Z(t))\,\kappa.$$

Учитывая, что $\kappa < 1$, видим противоречивость последнего неравенства, из чего следует, что $R(t) = Z(t)$. Теорема доказана.

Теперь рассмотрим одну из схем усреднения для интегро-дифференциального уравнения вида

$$D_h X = \varepsilon F\left(t, X, \int_0^t \Phi(t, s, X(s))\,ds\right), \quad X(0) = X^0, \tag{5}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр.

Вычислим интеграл $\int_0^t \Phi(t, s, X)\,ds$ по явно входящей переменной s, считая t и X параметрами, и обозначим

$$\int_0^t \Phi(t, s, X)\,ds = \Phi_1(t, X).$$

Пусть существует предел

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T F\big(t, X, \Phi_1(t, X)\big)\,dt = \overline{F}(X). \tag{6}$$

Тогда системе (5) поставим в соответствие следующую усредненную систему дифференциальных уравнений:

$$D_h R = \varepsilon \overline{F}(R), \quad R(0) = X_0, \tag{7}$$

где $\overline{F}(\cdot) : \mathrm{Conv}(R^n) \to \mathrm{Conv}(R^n)$.

Теорема 2. *Пусть отображения* $F(t, X, Y)$ *и* $\Phi(t, s, X)$ *определены и непрерывны в области* $Q\{t \geq 0,\ s \geq 0,\ X \in D \subset \mathrm{Conv}(R^n),\ Y \in \mathrm{Conv}(R^m)\}$ *и пусть в этой области:*

1) *отображения* $F(t, X, Y)$ *и* $\Phi(t, s, X)$ *удовлетворяют условию Липшица*

$$h\big(F(t, X', Y'),\ F(t, X'', Y'')\big) \leq \lambda\big(h(X', X'') + h(Y', Y'')\big),$$

$$h\big(\Phi(t, s, X'),\ \Phi(t, s, X'')\big) \leq \mu(t, s)\, h(X', X'');$$

2) $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t d\tau \int_0^\tau \mu(\tau, s)\, ds = 0, \quad \lambda > 0;$

3) *в каждом* $X \in D$ *существует предел* (6) *и*

$$h(\overline{F}(X), 0) \leq M, \quad h\big(\overline{F}(X'), \overline{F}(X'')\big) \leq \nu h(X', X'');$$

4) *решение* $R(\cdot)$, $R(0) = X^0 \in D$ *усредненного уравнения* (7) *определено для всех* $t \geq 0$ *и лежит в области* D *с некоторой* ρ*-окрестностью.*

Тогда для любых $\eta > 0$ *и* $L > 0$ *можно указать такое* $\varepsilon_0 > 0$, *что при* $\varepsilon < \varepsilon_0$ *на отрезке* $0 \leq t \leq L\varepsilon^{-1}$ *будет выполняться неравенство*

$$h(X(t), R(t)) < \eta.$$

Доказательство. Представив системы (5) и (7) в виде интегральных уравнений, получим

$$h(X(t), R(t)) = h\left(\varepsilon \int_0^t F\left(\tau, X(\tau), \int_0^\tau \Phi(\tau, s, X(s))\, ds\right) d\tau,\ \varepsilon \int_0^t \overline{F}(R(\tau))\, d\tau\right) \leq$$

$$\leq \varepsilon h\left(\int_0^t F\left(\tau, X(\tau), \int_0^\tau \Phi(\tau, s, X(s))\, ds\right) d\tau,\ \int_0^t F\left(\tau, R(\tau), \int_0^\tau \Phi(\tau, s, R(s))\, ds\right) d\tau\right) +$$

$$+ \varepsilon h\left(\int_0^t F\left(\tau, R(\tau), \int_0^\tau \Phi(\tau, s, R(s))\, ds\right) d\tau,\ \int_0^t F\left(\tau, R(\tau), \int_0^\tau \Phi(\tau, s, R(\tau))\, ds\right) d\tau\right) +$$

$$+ \varepsilon h\left(\int_0^t F\left(\tau, R(\tau), \int_0^\tau \Phi(\tau, s, R(\tau))\, ds\right) d\tau,\ \int_0^t \overline{F}(R(\tau))\, d\tau\right) =$$

$$= \varepsilon h\left(\int_0^t F\left(\tau, X(\tau), \int_0^\tau \Phi(\tau, s, X(s))\, ds\right) d\tau,\ \int_0^t F\left(\tau, R(\tau), \int_0^\tau \Phi(\tau, s, R(s))\, ds\right) d\tau\right) +$$

$$+ \varepsilon h\left(\int_0^t F\left(\tau, R(\tau), \int_0^\tau \Phi(\tau, s, R(s))\, ds\right) d\tau,\ \int_0^t \hat{F}(\tau, R(\tau))\, d\tau\right) +$$

$$+ \varepsilon h\left(\int_0^t \hat{F}(\tau, R(\tau))\, d\tau,\ \int_0^t \overline{F}(R(\tau))\, d\tau\right), \tag{8}$$

где

$$F\left(\tau, R(\tau), \int_0^\tau \Phi(\tau, s, R(\tau))\, ds\right) \equiv F(\tau, R(\tau), \Phi_1(\tau, R(\tau))) \equiv \hat{F}(\tau, R(\tau)).$$

Заметим, что многозначное отображение $\hat{F}(\tau,\cdot)$ удовлетворяет условию Липшица вида

$$h\left(\hat{F}(\tau, R'), \hat{F}(\tau, R'')\right) \le \lambda\left[h\left(R', R''\right) + h\left(\Phi_1(\tau, R'), \Phi_1(\tau, R'')\right)\right] \le$$

$$\le \lambda\left[h\left(R', R''\right) + \int_0^\tau \mu(\tau, s) h\left(R', R''\right) ds\right] \le \lambda\left(1 + \int_0^\tau \mu(\tau, s)\, ds\right) h\left(R', R''\right).$$

Полагая

$$\int_0^\tau \mu(\tau, s)\, ds = \mu_0(\tau),$$

получаем

$$h\left(\hat{F}(\tau, R'), \hat{F}(\tau, R'')\right) \le \lambda(1 + \mu_0(\tau)) h\left(R', R''\right), \tag{9}$$

причем, согласно условиям теоремы,

$$\overline{\mu}_0(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \mu_0(\tau)\, d\tau, \qquad \lim_{t\to\infty} \overline{\mu}_0(\tau) = 0.$$

Оценим последнее слагаемое неравенства (8). Покажем, что каково бы ни было число $a > 0$, всегда можно указать такое $\varepsilon_1 > 0$, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ на отрезке $[0, L\varepsilon^{-1}]$ будет выполняться неравенство

$$\varepsilon h\left(\int_0^t \hat{F}(t, R(\tau))\, d\tau, \int_0^t \overline{F}(R(\tau))\, d\tau\right) < a.$$

Проведем разбиение отрезка $[0, L\varepsilon^{-1}]$ с шагом $L/(\varepsilon m)$, где m — натуральное число, и обозначим $t_i = iL/(\varepsilon m)$, $i = \overline{0, m}$, $R_i = R(t_i)$.

Предположим, что для некоторого k, $0 \le k \le m-1$, $t \in (t_k, t_{k+1})$. Тогда

$$\varepsilon h\left(\int_0^t \hat{F}(\tau, R(\tau))\, d\tau, \int_0^t \overline{F}(R(\tau))\, d\tau\right) \le \varepsilon\left[\sum_{i=0}^{k-1}\left(h\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \hat{F}(\tau, R(\tau))\, d\tau, \int_{t_i}^{t_{i+1}} \hat{F}(\tau, R_i)\, d\tau\right) +\right.\right.$$

$$\left.+ h\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \hat{F}(\tau, R_i)\, d\tau, \int_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{F}(R_i)\, d\tau\right) + h\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{F}(R_i)\, d\tau, \int_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{F}(R(\tau))\, d\tau\right)\right) +$$

$$+ h\left(\int_{t_k}^t \overline{F}(\tau, R(\tau))\, d\tau, \int_{t_k}^t \hat{F}(\tau, R_k)\, d\tau\right) + h\left(\int_{t_k}^t \hat{F}(\tau, R_k)\, d\tau, \int_{t_k}^t \overline{F}(R_k)\, d\tau\right) +$$

$$\left.+ h\left(\int_{t_k}^t \overline{F}(R_k)\, d\tau, \int_{t_k}^t \overline{F}(R(\tau))\, d\tau\right)\right] \le \varepsilon \sum_{i=0}^{m-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} h\left(\hat{F}(\tau, R(\tau)), \hat{F}(\tau, R_i)\right) d\tau +$$

$$+ \varepsilon \sum_{i=0}^{m-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} h\left(\overline{F}(R_i), \overline{F}(R(\tau))\right) d\tau + \varepsilon \sum_{i=0}^{m-1} h\left(\int_0^{t_{i+1}} \hat{F}(\tau, R_i)\, d\tau, \int_0^{t_{i+1}} \overline{F}(R_i)\, d\tau\right) +$$

$$+ \varepsilon \sum_{i=0}^{m-1} h\left(\int_0^{t_i} \hat{F}(\tau, R_i)\, d\tau, \int_0^{t_i} \overline{F}(R_i)\, d\tau\right) + \varepsilon h\left(\int_0^t \hat{F}(\tau, R_k)\, d\tau, \int_0^t \overline{F}(R_k)\, d\tau\right).$$

Из условия 3 теоремы и (9) имеем

$$\varepsilon \sum_{i=0}^{m-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} h(\overline{F}(R_i), \overline{F}(R(\tau)))\,d\tau \le \varepsilon \sum_{i=0}^{m-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \nu h(R(\tau), R_i)\,d\tau \le$$

$$\le \varepsilon^2 \nu M \sum_{i=0}^{m-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (\tau - t_i)\,d\tau = \frac{\nu M L^2}{2m},$$

$$\varepsilon \sum_{i=0}^{m-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} h\left(\hat{F}(\tau, R(\tau)), \hat{F}(\tau, R_i)\right) d\tau \le \varepsilon \sum_{i=0}^{m-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \lambda(1+\mu_0(\tau))\, h(R(\tau), R_i)\,d\tau \le$$

$$\le \varepsilon^2 \lambda M \sum_{i=0}^{m-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (1+\mu_0(\tau))(\tau - t_i)\,d\tau =$$

$$= \varepsilon^2 \lambda M \sum_{i=0}^{m-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (\tau - t_i)\,d\tau + \varepsilon^2 \lambda M \sum_{i=0}^{m-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mu_0(\tau)(\tau - t_i)\,d\tau \le$$

$$\le \frac{\lambda M L^2}{2m} + \frac{\varepsilon M L \lambda}{m} \int_0^{L\varepsilon^{-1}} \mu_0(\tau)\,d\tau \le \frac{\lambda M L^2}{2m} + \frac{\lambda M L}{m}\,\delta(\varepsilon) \equiv \alpha(m, \varepsilon),$$

где

$$\varepsilon \int_0^t \mu_0(\tau)\,d\tau = \varepsilon t \overline{\mu}_0(t) \le \sup_{0 \le \tau \le L} \tau \overline{\mu}_0\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) = \delta(\varepsilon), \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \delta(\varepsilon) = 0.$$

Вводя обозначение

$$\Psi(t, R) = \frac{1}{t} h\left(\int_0^t \hat{F}(\tau, R)\,d\tau,\ \int_0^t \overline{F}(R)\,d\tau\right),$$

$$\Psi_0(\varepsilon, R) = \sup_{0 \le \tau \le L} \tau \Psi\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, R\right),$$

получаем

$$\varepsilon \sum_{i=0}^{m-1} h\left(\int_0^{t_{i+1}} \hat{F}(\tau, R_i)\,d\tau,\ \int_0^{t_{i+1}} \overline{F}(R_i)\,d\tau\right) = \varepsilon \sum_{i=0}^{m-1} t_{i+1} \Psi\left(t_{i+m}, R_i\right),$$

$$\varepsilon \sum_{i=0}^{m-1} h\left(\int_0^{t_i} \hat{F}(\tau, R_i)\,d\tau,\ \int_0^{t_i} \overline{F}(R_i)\,d\tau\right) = \varepsilon \sum_{i=0}^{m-1} t_i \Psi(t_i, R_i),$$

$$\varepsilon h\left(\int_0^t \hat{F}(\tau, R_k)\,d\tau,\ \int_0^t \overline{F}(R_k)\,d\tau\right) = \varepsilon t \Psi(t, R_k).$$

Ясно, что при каждом фиксированном $R \in D$ функция $\Psi(t, R)$ стремится к нулю при $t \to \infty$. Поэтому при фиксированных m, k, i, R_k, R_i имеем

$$\Psi\left(\frac{(i+1)L}{\varepsilon m}, R_i\right) \to 0, \qquad \Psi\left(\frac{iL}{\varepsilon m}, R_i\right) \to 0,$$

$$\Psi_0(\varepsilon, R_k) \to 0, \qquad \varepsilon \to 0, \quad i = \overline{0, m-1}, \quad k = \overline{1, m-1}.$$

Тогда

$$\varepsilon h\left(\int_0^t \hat{F}(\tau, R(\tau))\,d\tau, \int_0^t \overline{F}(R(\tau))\,d\tau\right) \le \alpha(m,\varepsilon) + \frac{\nu M L^2}{2m} +$$

$$+ L\left[\sum_{i=0}^{m-1}\Psi\left(\frac{(i+1)L}{\varepsilon m}, R_i\right) + \sum_{i=0}^{m-1}\Psi\left(\frac{iL}{\varepsilon m}, R_i\right)\right] + \max_{0\le k\le m-1}\Psi_0(\varepsilon, R_k) \equiv \alpha(\varepsilon, m).$$

Итак,

$$\varepsilon h\left(\int_0^t \hat{F}(\tau, R(\tau))\,d\tau, \int_0^t \overline{F}(R(\tau))\,d\tau\right) \le \alpha(\varepsilon, m).$$

Заметим, что соответствующим выбором достаточно большого m и достаточно малого ε величина $\alpha(\varepsilon, m)$ может быть сделана сколь угодно малой.

Теперь из (8) получаем

$$h(X(t), R(t)) \le \varepsilon\lambda \int_0^t h(X(t), R(t))\,d\tau + \alpha(\varepsilon, m) +$$

$$+ \varepsilon\lambda \int_0^t d\tau \int_0^\tau \mu(\tau, s) h(X(s), R(s))\,ds + \varepsilon\lambda \int_0^t d\tau \int_0^\tau \mu(\tau, s) h(R(s), R(\tau))\,d\tau,$$

или

$$h(X(t), R(t)) \le \varepsilon\lambda \int_0^\tau h(X(\tau), R(\tau))\,d\tau + \alpha(\varepsilon, m) +$$

$$+ \varepsilon\lambda \int_0^t d\tau \int_0^\tau \mu(\tau, s) h(X(s), R(s))\,ds + \lambda M L\,\delta(\varepsilon).$$

Следовательно, на отрезке $[0, L\varepsilon^{-1}]$ имеем

$$h(X(t), R(t)) \le [a + \lambda M L \delta(\varepsilon)] e^{\lambda L + \lambda\delta(\varepsilon)}. \tag{10}$$

Если $X(\cdot)$ на всем отрезке $[0, L\varepsilon^{-1}]$ не выходит из области D, то, полагая

$$\alpha(\varepsilon, m) + \lambda M L\,\delta(\varepsilon) < e^{-\lambda(1+L)} \min(\rho, \eta), \qquad \delta(\varepsilon) < 1,$$

получаем утверждение теоремы. Покажем, что $X(t) \in D$ на всем отрезке $[0, L\varepsilon^{-1}]$. Действительно, так как $X(0) = X^0$ находится внутри области D, то на некотором отрезке $[0, t^*]$ решение $X(\cdot)$ будет находиться в области D.

Пусть

$$\alpha(\varepsilon, m) + \lambda M L\,\delta(\varepsilon) < e^{-\lambda(1+L)} \min\left\{\frac{\rho}{2}, \frac{\eta}{2}\right\}, \qquad \delta(\varepsilon) < 1.$$

Тогда на всем отрезке $[0, t^*]$, на котором $X(\cdot) \in D$, будем иметь

$$h(X(t), R(t)) < \rho/2.$$

Если теперь предположим, что $t^* < L\varepsilon^{-1}$, то на отрезке $[0, L\varepsilon^{-1}]$ в силу непрерывности $X(\cdot)$ и $R(\cdot)$ найдется такая точка T, в которой будет выполняться неравенство

$$\rho/2 < h(X(t), R(t)) < \rho.$$

Однако из этого неравенства следует, что при $t = T$ решение $X(\cdot)$ еще находится в области D. Поэтому $0 \le T \le t^*$, следовательно,

$$h(X(t), R(t)) < \rho/2.$$

Полученное противоречие свидетельствует о том, что $t^* \ge L\varepsilon^{-1}$. Теорема доказана.

Аналогично доказательству предыдущей теоремы можно доказать и следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть многозначные отображения $F(t, X, Y)$ и $\Phi(t, s, X)$ определены и непрерывны в области $Q\{t \ge 0,\ s \ge 0,\ X \in D \subset \mathrm{Conv}(R^n),\ Y \in \mathrm{Conv}(R^m)\}$ и пусть в этой области:*

1) *отображения $F(t, X, Y)$ и $\Phi(t, s, X)$ удовлетворяют условиям Липшица*

$$h\big(F(t, X', Y'), F(t, X'', Y'')\big) \le \lambda\big[h(X', X'') + h(Y', Y'')\big],$$
$$h\big(\Phi(t, s, X'), \Phi(t, s, X'')\big) \le \mu(t, s) h(X', X'');$$

2) $\int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^\tau \mu(\tau, s)\, ds \le ct,\ c = \mathrm{const},\ \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^\tau |\tau - s| \mu(\tau, s)\, ds \le t^2 \varphi(t),\ \lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t) = 0;$

3) *в каждом $X \in D$ существует предел* (6) *и*

$$h\big(\overline{F}(X), 0\big) \le M, \quad h\big(\overline{F}(X'), \overline{F}(X'')\big) \le \nu h(X', X'');$$

4) *решение $R(\cdot)$, $R(0) = X^0$ усредненного уравнения* (7) *определено для всех $t \ge 0$ и лежит в области D с некоторой ρ-окрестностью.*

Тогда для любых $\eta > 0$ и $L > 0$ можно указать такое ε_0, что при $\varepsilon < \varepsilon_0$ на отрезке $[0, L\varepsilon^{-1}]$ будет выполняться неравенство

$$h(X(t), R(t)) < \eta.$$

Замечание. Данные теоремы обобщают соответствующие теоремы из [9].

1. *Плотников А. В.* Исследование некоторых дифференциальных уравнений с многозначной правой частью: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Одесса, 1994. – 199 с.
2. *Толстоногов А. А.* Дифференциальные включения в банаховом пространстве. – Новосибирск: Наука, 1986. – 295 с.
3. *De Blasi F. S., Iervolino F.* Equazioni differentiali con soluzioni a valore compatto convesso // Boll. Unione mat. ital. – 1969. – **4**, № 2. – P. 491 – 501.
4. *De Blasi F. S., Iervolino F.* Euler method for differential equations with set-valued solutions // Ibid. – 1971. – **4**, № 4. – P. 941–949.
5. *Kisielewicz M.* Description of a class of differential equations with set-valued solutions // Lincei-Rend. sci. fis. e mat. e nat. – 1975. – **58**. – P. 158 – 162.
6. *Kisielewicz M.* Method of averaging for differential equations with compact convex valued solutions // Rend mat. – 1976. – **9**, № 3. – P. 397 – 408.
7. *Hukuhara M.* Integrations des applications measurables don't la valeur est un compact convexe // Funk. ekvacioj. – 1967. – № 10. – P. 205 – 223.
8. *Aumann R. J.* Integral of set-valued functions // J. Math. Anal. and Appl. – 1965. – № 12. – P. 1 – 12.
9. *Филатов А. Н.* Асимптотические методы в теории дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. – Ташкент: Фан, 1974. – 216 с.

Получено 12.11.97