УДК 517. 5

В. Л. Мельник (Чернігів. пед. ун-т)

ЛІНІЙНО ОПУКЛІ ОБЛАСТІ З ОСОБЛИВОСТЯМИ НА МЕЖІ

We present the topologic classification of linearly convex domains with almost smooth boundary singularities of which lie in the hyperplane. We investigate sets with linearly convex boundary and closure of linearly convex domains.

Наведено топологічну класифікацію лінійно опуклих областей з майже гладкою межею, особливості якої лежать в гіперплощині. Досліджуються множини з лінійно опуклою межею та замикання лінійно опуклих областей.

Повну топологічну класифікацію лінійно опуклих областей з гладкою межею одержано Ю. Б. Зелінським [1]. Л. Я. Макарова розглядала можливість зняття умови на гладкість межі у всіх її точках [2]. В її роботі припускається негладкість межі в деяких зліченних підмножинах $A \subset \partial D$. Ю. Б. Зелінський [1] розглянув більш загальні множини особливостей. Досліджено лінійну опуклу область $D \subset \mathbb{C}^n$ зі зв'язною межею, причому ∂D — гладка у всіх точках за винятком множини A такої, що локально не розбиває ∂D і $\partial D \setminus A$ скрізь щільна в ∂D. Тоді всі перерізи прямими D будуть зв'язні і однозв'язні. Подальші дослідження показали, що прямо послабити вимоги до множини особливостей (вимагати тільки зв'язність множини $\partial D \setminus A$) неможливо.

Метою цієї роботи є дослідження лінійно опуклих областей з множинами особливостей спеціального вигляду. Основним результатом є топологічна класифікація лінійно опуклих областей з майже гладкою межею, особливості якої лежать в гіперплощині.

Означення 1. *Область $D \subset \mathbb{C}^n$ називається лінійно опуклою (локально лінійно опуклою), якщо для кожної точки z_0 межі ∂D області D існує гіперплощина L, яка проходить через точку z_0 і не перетинає область $D: L \cap D = \varnothing$ (у деякому околі $U(z_0)$ точки z_0: $L \cap D \cap U(z_0) = \varnothing$.*

Означення 2. *Множина $E \subset \mathbb{C}^n$ називається сильно лінійно опуклою, якщо для будь-якої прямої γ множини $\gamma \cap E$ і $\mathring{\gamma} \setminus \gamma \cap E$ — зв'язні, де через $\mathring{\gamma}$ позначено пряму γ, доповнену нескінченно віддаленою точкою $\mathring{\gamma} = \gamma \cup (\infty)$.*

Означення 3. *Лінійно опуклу множину $K \subset \mathbb{C}^n$ назвемо лінійно опуклим конусом, якщо існує лінійно комплексний зсув простору $\mathbb{C}^n$: $z \to z + z_0$, при якому K переходить в C-конус. Точку, яка при цьому зсуві переходить в початок координат, назвемо вершиною конуса.*

Означення 4. *Множину $K \subset \mathbb{C}^n$ назвемо комплексним конусом (C-конусом), якщо з того, що $z \in K$ і $\lambda \in \mathbb{C} \setminus 0$, випливає $\lambda z \in K$.*

Розглянемо лінійно опуклі області $D \subset \mathbb{C}P^n$ з майже гладкою межею, особливості (точки недиференційовності) якої знаходяться на підмножині $A \subset \partial D$, що лежить в деякій гіперплощині $\mathbb{C}P^{n-1}$, $A \subset \mathbb{C}P^{n-1}$.

Лема 1. *Нехай $D \subset \mathbb{C}P^n$ — лінійно опукла область з особливостями на межі, вигляд яких обумовлений вище. Тоді перерізи області $\overline{D}$ прямими зв'язні.*

Доведення. Розглянемо комплексний простір $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}P^n \setminus \mathbb{C}P^{n-1}$. Маємо включення $\mathbb{C}^n \supset D_1 = D \setminus \mathbb{C}P^{n-1}$. Межа області D_1 в $\mathbb{C}^n$ — гладкий многовид. Якщо межа ∂D_1 незв'язна, то, згідно з теоремою 4 з [1], D_1 — циліндр з твірними у вигляді паралельних між собою гіперплощин і основою, яка є плоскою областю з гладкою межею. Очевидно, що перерізи таких областей прямими є зв'язними. Нехай існує незв'язний переріз області $\overline{D}$ деякою прямою γ. Виберемо пару точок в різних компонентах перерізу $\gamma \cap \overline{D}$, з'єднаємо їх неперервним шляхом $z(t)$, що лежить в D при $0 < t < 1$ і, повторюючи міркування з леми 1 [3], приходимо до суперечності.

Нехай межа ∂D_1 — зв'язна. Якщо для деякої прямої γ переріз $\gamma \cap D_1$ незв'язний, то цей випадок можна звести до суперечності, повторюючи міркування з леми 3 [1].

Далі, аналогічно попередньому, одержуємо зв'язність $\gamma \cap \overline{D}$ для всіх прямих γ. Лему доведено.

Лема 2. *Якщо $D \subset \mathbb{C}P^n$ — лінійно опукла область з майже гладкою межею, особливості якої лежать в гіперплощині L, причому $\partial D \setminus L$ — незв'язна множина, то $D \setminus L$ буде внутрішністю множини, складеної з гіперплощин, які перетинаються по одній $(n-2)$-вимірній площині, що лежить в L.*

Доведення випливає з леми 1, тому що сукупність паралельних в $\mathbb{C}^n$ гіперплощин в $\mathbb{C}P^n$ перетинається по $(n-2)$-вимірній площині, яка природно буде лежати в невласній гіперплощині L. Зауважимо, що гіперплощину L можна вибрати так, щоб вона не перетинала область D. Інакше це б суперечило лінійній опуклості D.

Наслідок. *Якщо $D \subset \mathbb{C}P^n$ — лінійно опукла область з умовами леми 2, то D — лінійно опуклий конус.*

Наслідок випливає з леми 2, тому що гіперплощини будуть прямими, які перетинаються в єдиній точці, яка і є вершиною лінійно опуклого конуса.

Лема 3. *Нехай D — лінійно опукла область з леми 1, причому ∂D_1, де $D_1 = D \setminus \mathbb{C}P^{n-1}$, — зв'язна множина. Тоді переріз області D_1 є прямою γ або 1) однозв'язний, або 2) $\partial D_1 \cap \gamma$ складається з двох компонент, причому одна з них — точка, яка належить множині особливостей.*

Доведення. Згідно з лемою 1, $D_1 \cap \gamma$ — область на прямій γ. Якщо переріз $D_1 \cap \gamma$ неоднозв'язний, то межа $\partial(D_1 \cap \gamma)$ є незв'язною. Покажемо, що в цьому випадку межа складається з двох компонент, причому одна з них — точка, що належить множині особливостей межі.

Зауважимо, що оскільки $\gamma \cap D_1 \neq \varnothing$, то пряма γ може перетинати гіперплощину особливостей $L = \mathbb{C}P^{n-1}$ лише в одній точці. Якщо компонент більше ніж дві, або жодна з цих компонент не є точкою множини особливостей, то існують дві точки z^0, z^1, які належать різним компонентам $\partial(D_1 \cap \gamma) \setminus L$. Для цих точок існує замкнена жорданова крива $\Gamma \subset D_1 \cap \gamma$, що розділяє ці точки в γ. Внаслідок зв'язності межі ∂D_1 можемо з'єднати точки z^0 та z^1 неперервним шляхом $\Gamma_1 = \{z \mid z(t),\ 0 \le t \le 1\} \subset \partial D_1$, $z(0) = z^0$, $z(1) = z^1$.

У кожній точці $z(t)$, $0 \le t \le 1$, проведемо дотичну гіперплощину $L(t)$ до межі ∂D_1. Очевидно, що внаслідок лінійної опуклості $L(t) \cap D_1 = \varnothing$. Тому $\gamma \subset L(t)$. Гіперплощина $L(t)$ і пряма γ, що не лежить в ній, мають одну спільну точку $\xi(t)$ в $\mathbb{C}P^n$. Внаслідок гладкості межі ∂D_1 сім'я $L(t)$ неперервно залежить від t, тому одержимо неперервний шлях $\Gamma_2 = \{z \mid z = \xi(t),\ 0 \le t \le 1\}$, який з'єднує точки $z(0) = \xi(0)$, $z(1) = \xi(1)$ на прямій γ. Оскільки жорданова крива Γ розділяє точки z^0 і z^1, то $\Gamma \cap \Gamma_2 \ne \varnothing$. Отже, для деякого $t = t^0$ $L(t^0) \cap \Gamma \subset\subset L(t^0) \cap D_1 \ne \varnothing$. А це суперечить лінійній опуклості D_1. Лему доведено.

Лема 4. *Нехай $D_1 = D \setminus L$ — область, яка розглянута в лемі 3. Тоді область $D_2 \supset D_1$, одержана з D_1 доповненням кожного незв'язного перерізу $\gamma \cap D_1$ особливою точкою межі $\partial(\gamma \cap D_1)$, має однозв'язні перерізи з будь-якою прямою γ.*

Доведення. Для перерізів $\gamma \cap D_1 \ne \varnothing$ це очевидно, тому що приєднанням точки усувається неоднозв'язність. Залишилось дослідити перерізи вигляду $\gamma \cap D_2$, де $\gamma \subset L$. Зафіксуємо точку $z_0 \in \gamma \cap D_2$ і розглянемо послідовність перерізів $\gamma_k \cap D_1$, $\gamma_k \in z_0$, $\{\gamma_k\} \xrightarrow[k \to \infty]{} \gamma$.

Тоді з однозв'язності $\gamma_k \cap D_1$ випливає зв'язність множини $\gamma_k \setminus (\gamma_k \cap D_1)$. Отже, $\gamma \setminus (\gamma \cap D_2) = \lim\limits_{n \to \infty} [\gamma_k \setminus (\gamma_k \cap D_1)]$ — також зв'язна множина. Тому переріз $\gamma_k \cap D_2$ — однозв'язний.

Приклад 1. Нехай $G = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z| < 1, z_2 \ne 0\}$ — лінійно опукла область. Розглянемо проективне перетворення простору $\mathbb{C}^2$:

$$z_1' = \frac{z_1 + 1}{z_2}, \qquad z_2' = \frac{z_1 + z_2}{z_2}.$$

При цьому область G перетворюється в лінійно опуклу область $D = \{(z_1', z_2') \mid 1 < z_1'^2 - 2z_1' z_2' + 2z_2'^2\}$, межа якої в $\mathbb{C}P^n$ складається з гладкої поверхні $1 = z_1'^2 - 2z_1' z_2' + 2z_2'^2$ і невласної прямої. Всі перерізи області D — зв'язні, а крім цього є непорожні перерізи прямою вигляду $z_1' = kz_2'$, що мають межею коло і нескінченно віддалену точку.

Теорема 1. *Нехай $D \subset \mathbb{C}P^n$ — лінійно опукла область з майже гладкою межею, особливості якої лежать в гіперплощині L, $L \cap D \ne \varnothing$.*

Тоді:

1. $D = \operatorname{Int} B$, *де B — множина, складена з гіперплощин, що перетинаються по одній $(n-2)$-вимірній площині, яка лежить в L, якщо $\partial D \setminus L$ — незв'язна множина.*

2. *Якщо $\partial D \setminus L$ — зв'язна множина, то:*

a) D — *сильно лінійно опукла область, причому* D *гомеоморфна кулі, або*

b) *всі неоднозв'язні перерізи* D *прямими мають межею дві компоненти, причому одна з них — точка, яка належить* L.

Доведення. Твердження 1 теореми випливає з леми 2.

Твердження 2a) у випадку однозв'язності перерізів випливає з теореми 3 [2], а твердження 2b) доведено в лемі 3.

Дослідимо замикання лінійно опуклих областей, умови їх лінійної та сильно лінійної опуклості.

Теорема 2. *Нехай* $D \subset \mathbb{C}P^n$ — *сильно лінійно опукла область, межа якої* ∂D — *гладкий многовид, і така, що* $\overline{D}$ *не містить жодної проективної прямої. Тоді* $\overline{D}$ — *сильно лінійно опукла область.*

Доведення. Припустимо, що $\overline{D}$ не буде сильно лінійно опуклою множиною. Тоді існує проективна пряма S^1 така, що переріз $\overline{D} \cap S^1$ буде або незв'язний, або неоднозв'язний. Користуючись лемою 2 із [3] для лінійно опуклих областей, можемо записати рівність $\overline{D} \cap S^1 = \overline{D \cap S^1}$. Отже, замикання $\overline{D \cap S^1}$ обов'язково буде зв'язне. Якщо $\overline{D \cap S^1}$ — неоднозв'язне, то незв'язне буде доповнення $S^1 \setminus \overline{D \cap S^1}$.

Розглянемо дві довільні компоненти A і B доповнення $S^1 \setminus \overline{D \cap S^1}$. Можливі наступні випадки:

1) $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$;

2) $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$ для будь-яких A і B.

Очевидно, що мають місце включення $\partial A \subset \overline{D}$ і $\partial B \subset \overline{D}$.

1. Нехай $z^0 \in \overline{A} \cap \overline{B} \subset \overline{D}$. Маємо $C = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{D} \subset \partial D$.

Довільний окіл $W(z^0)$ точки z перетинається з областю D та компонентами A і B доповнення $S^1 \setminus \overline{D \cap S^1}$. Будь-який менший окіл $U(z^0) \subset W(z^0)$ множиною C ділиться не менш ніж на три частини. Це суперечить тій умові, що ∂D — гладкий многовид, тому що в такому випадку існував би окіл $U(z^0)$, переріз якого з областю D і її доповненням складається з двох частин. Одержана суперечність доводить неможливість першого випадку $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$.

2. Нехай виконується умова $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$. Маємо $\partial A \cap \partial B \subset \partial D$, де ∂D — зв'язна множина. Але $\partial A \cap \partial D = \emptyset$ за припущенням. Тому існує континуум C, який з'єднує множини ∂A і ∂B, утворюючи зв'язну підмножину в ∂D. У кожній точці $z \in C$ існує окіл $W(z)$ такий, що переріз $U(z) \cap D$ — незв'язний для будь-якого околу $U(z) \subset W(z)$.

Розглянемо множину $M = \overline{A} \cap \overline{C} \cap \overline{D} \subset \partial D$ і точку z^1, що належить перерізу $\overline{A} \cap \overline{C} \subset \overline{D}$. Довільний окіл $W(z^1)$ цієї точки перетинає область D, компоненту A та множину C. Виберемо достатньо малий окіл $W'(z^1)$ точки z^1. Він поділяється межею ∂D не менш ніж на три частини. Це, як і в першому випадку, суперечить умові, що ∂D — гладкий многовид.

Ця суперечність завершує доведення теореми.

Якщо D — сильно лінійно опукла область з негладкою межею, то замикання $\overline{D}$ вже не буде сильно лінійно опуклою множиною, як видно з наступного прикладу.

***Приклад* 2.** Нехай $D = D_1 \times D_2$, де $D_1 = \{z \mid 1 < |z| < 2,\ z \notin (1, 2), z \in \mathbb{C}\}$, $D_2 = \mathbb{C}^{n-1}$.

Легко перевірити, що $D \subset S^n$ — сильно лінійно опукла область, а її замикання $\overline{D}$ у перерізі з прямими вигляду $z_2 = c_2,\ z_3 = c_2, \ldots, z_n = c_n$, де $c_j, j = 2, 3, \ldots, n,$ — константи, утворює кільце $1 \leq z \leq 2$ і тому не буде сильно лінійно опуклою множиною.

Наступний приклад показує, що навіть гладкість межі сильно лінійно опуклої області в $\mathbb{C}^n \subset \mathbb{C}P^n$ не забезпечує сильної лінійної опуклості (навіть лінійної опуклості) $\overline{D}$ в $\mathbb{C}P^n$.

***Приклад* 3.** Нехай D_1 — опукла область в $\mathbb{C}$. Тоді $D = D_1 \times \mathbb{C}^{n-1}$ — сильно лінійно опукла область в $\mathbb{C}^n$, але для будь-якого вкладення $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}P^n$ замикання $\overline{D}$ буде повністю містити замикання гіперплощини $\overline{C^{n-1}}$, яке перетинається з будь-якою проективною прямою. Отже, $\overline{D}$ не є лінійно опуклою множиною.

Цей приклад також показує необхідність обмеження в теоремі 2, щоб $\overline{D}$ не містила проективних прямих.

Завершимо дослідження доведенням твердження, яке описує структуру межі та самої замкненої лінійно опуклої множини $E \subset \mathbb{C}^n$ з непорожньою лінійно опуклою межею.

Твердження. *Нехай $E \subset \mathbb{C}^n$ — замкнена лінійно опукла множина з непорожньою незв'язною лінійно опуклою межею, $\partial E \neq E$. Тоді*

$$E = E_1 \times \mathbb{C}^{n-1}, \quad \partial E = \partial E_1 \times \mathbb{C}^{n-1}.$$

Доведення. З того, що ∂E — непорожня незв'язна лінійно опукла множина і із замкненості лінійно опуклої множини E випливає, що доповнення $\mathbb{C}^n \setminus \partial E$ — незв'язне. Тоді ∂E — циліндр у вигляді паралельних між собою гіперплощин і основою, яка лежить на комплексній прямій γ.

Дійсно, нехай точки z^1 і z^2 належать різним компонентам множини $\mathbb{C}^n \setminus \partial E$, тоді гіперплощини $l(z^1)$ і $l(z^2)$, які проходять через ці точки і не перетинають межу ∂E, також належать різним компонентам $\mathbb{C}^n \setminus \partial E$ і не перетинаються. Це означає, що $l(z^1) \parallel l(z^2)$. Отже, якщо точка $z^0 \subset \partial E$, то в ∂E лежить гіперплощина $l(z^0)$, яка проходить через z^0 і паралельна $l(z^1)$ і $l(z^2)$.

Відомо [1], що довільна непорожня лінійно опукла множина, яка містить хоча б одну пряму, є циліндром з твірними у вигляді паралельних між собою m-вимірних площин і не більше, ніж $(n-m)$-вимірною основою Q. Отже, $\partial E = Q \times \mathbb{C}^{n-1}$.

Покажемо тепер, що $E = E_1 \times \mathbb{C}^{n-1}$. Як було вже проілюстровано, через дві точки z^1 і z^2, які належать різним компонентам $\mathbb{C}^n \setminus \partial E$, проходять дві паралельні гіперплощини, одна з них, нехай $l(z^1)$, очевидно, належить E.

Звідси маємо, що E є множиною, яка містить деяку пряму $l(z)$, паралельну $l(z^1)$.

Припустимо обернене. Нехай деяка точка $z^0 \in l(z)$, $z^0 \notin E$. Тоді внаслідок лінійної опуклості множини E існує гіперплощина L, яка проходить через z^0 і не перетинає E: $L \cap l(z^1) \subset L \cap E = \emptyset$. Але це можливо тільки у випадку, коли l паралельна $l(z^1)$ і тому повністю містить $l(z)$. Тоді $z \subset l(z) \cap E \subset \subset l \cap E$. Одержали суперечність.

Отже, множина прямих, які проходять через z і лежать в E, заповнює деяку твірну K_z множини E (E — циліндр з паралельними K_z твірними і основою E_1, $E = E_1 \times \mathbb{C}^{n-1}$).

З умови замкненості множини E і з доведеної рівності $\partial E = Q \times \mathbb{C}^{n-1}$ випливає, що $Q = \partial E_1$. Тоді $\partial E = \partial E_1 \times \mathbb{C}^{n-1}$, що і завершує доведення твердження.

1. *Зелинский Ю. Б.* О линейно выпуклых областях с гладкими границами // Укр. мат. журн. – 1988. – **40**, № 1. – С. 53 – 58.
2. *Макарова Л. Я.* Достаточные условия линейной выпуклости областей с почти гладкой границей // О голоморфных функциях многих комплексных переменных. – Красноярск: Ин-т физики СО АН СССР. – 1976. – С. 87 – 96.
3. *Мельник В. Л.* Про лінійно опуклі області з гладкими межами // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 11. – С. 1153 – 1156.

Одержано 04.08.98