УДК 519.21

А. О. Олійник (Нац. ун-т ім. Т. Шевченка, Київ)

ПРО РОЗВ'ЯЗОК КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ НА КОЛІ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З ВИПАДКОВИМИ ПОЧАТКОВИМИ УМОВАМИ

Conditions are established under which a solution of boundary-value problem over a circle for hyperbolic equation with random initial conditions can be represented as a series uniformly convergent with probability one.

Знайдено умови, за яких розв'язок крайової задачі на колі для гіперболічного рівняння з випадковими початковими умовами можна зобразити у вигляді рівномірно збіжного з імовірністю одиниця ряду.

1. Вступ. Розглянемо крайову задачу на колі $\{(r, \varphi) \mid r \in [0, r_0];\ \varphi \in [0, 2\pi]\}$ для гіперболічного рівняння

$$-\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}\right) + q(r)v + \rho(r)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \qquad (1)$$

з крайовою умовою

$$v(r_0, \varphi, t) = 0 \qquad (2)$$

та початковими умовами

$$v(r, \varphi, 0) = \xi(r, \varphi); \quad \frac{\partial v}{\partial t}(r, \varphi, 0) = \eta(r, \varphi), \qquad (3)$$

де $t \in [0, T]$; $\{q(r), \rho(r)\} \in C[0, r_0]$; $q(r) \geq 0$; $\rho(r) \geq 0$; $\xi(r, \varphi), \eta(r, \varphi)$ — випадкові процеси такі, що $E\xi^2(r, \varphi) < C$; $E\xi^2(r, \varphi) < C$.

Знайдемо умови, за яких розв'язок задачі (1)–(3) можна зобразити у вигляді абсолютно і рівномірно збіжного з імовірністю одиниця ряду.

2. Означення та допоміжні твердження. Нехай $\{X, \rho\}$ — метричний простір, $\boldsymbol{B}$ — σ-алгебра борелевих множин і $\mu(\cdot)$ — σ-скінченна міра на $\{X, \boldsymbol{B}\}$. Нехай $C(X)$ — простір всіх неперервних і обмежених функцій і $\|f\|_C = \sup_{x \in X} |f(x)|$.

Означення 1 ([1], означення 10). $\{g_{n,m}(x)\}_{n,m}^{\infty,\infty} \subset C(X)$ *належить класу* $B\left(c(x), \{f_{n,m}(\delta)\}_{n,m}^{\infty,\infty}\right)$, *якщо:*

1) *існує неперервна функція* $c(x)$, $x \in X$, *така, що* $|c(x)| < 1$, $\forall \varepsilon > 0$ *існує компакт* $K_\varepsilon \subset X$: $|c(x)| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon \notin K_\varepsilon$;

2) *існує* $\{f_{n,m}(\delta)\}_{n,m}^{\infty,\infty}$, *де* $\delta \geq 0$ *така, що* $f_{n,m}(\delta_1) \leq f_{n,m}(\delta_2)$ *при* $\delta_1 \leq \delta_2$, $\lim\limits_{\delta \to 0+} f_{n,m}(\delta) = 0$ *і* $\lim\limits_{n \to +\infty, m \to +\infty} f_{n,m}(\delta) = +\infty$ *монотонно по* n, m *відповідно при* $\delta \geq 0$;

3) *для будь-якої послідовності чисел* $\{d_{n,m}(x)\}_{n,m}^{\infty,\infty}$, *для* $\{x, y\} \subset X$, *для* $\{n, m\} \subset N$

$$\left| c(x) \sum_{i=1, j=1}^{n,m} d_{i,j}\, g_{i,j}(x) - c(y) \sum_{i=1, j=1}^{n,m} d_{i,j}\, g_{i,j}(y) \right| \leq \left\| c(x) \sum_{i=1, j=1}^{n,m} d_{i,j}\, g_{i,j}(x) \right\|_C f_{n,m}(\rho(x, y)).$$

Лема 1 ([1], лема 6). *Нехай* $\{g_{n,m}(x)\}_{n,m}^{\infty,\infty}$ *належить класу* $B\big(c(x), \{f_{n,m}(\delta)\}_{n,m}^{\infty,\infty}\big)$, $\forall\theta\in(0,1)$ $c_{n,m}(\theta)=\inf\limits_{x\in X}\mu\big\{y\in X \mid \rho(x,y)<f_{n,m}^{(-1)}(\theta)\big\}$, *тоді існує відкрита куля* $A\big(\theta,\{d_{n,m}\}\big)\subset X$ *така, що в ній виконується нерівність*

$$(1-\theta)\left\|c(x)\sum_{i=1,j=1}^{n,m} d_{i,j}\,g_{i,j}(x)\right\|_C < \left|c(x)\sum_{i=1,j=1}^{n,m} d_{i,j}\,g_{i,j}(x)\right|.$$

Лема 2 ([1], лема 7). *Нехай* $\{X,\rho_X\}$, $\{Y,\rho_Y\}$ — *метричні простори,* $\{X\times Y,\rho_{X\times Y}\}$ — *прямий їх добуток, де* $\rho_{X\times Y}((x_1,y_1),(x_2,y_2))=\max\{\rho_X(x_1,x_2), \rho_Y(y_1,y_2)\}$, $\{\varphi_{n,m}(x)\}_{n,m}^{\infty,\infty}$ *із* $\{X,\rho_X\}$ *належить класу* $B\big(c_X(x),\{f_{n,m}(\delta)\}_{n,m}^{\infty,\infty}\big)$ *і* $\{\psi_{n,m}(y)\}_{n,m}^{\infty,\infty}$ *із* $\{Y,\rho_Y\}$ *належить класу* $B\big(c_Y(y),\{f_{n,m}^{Y}(\delta)\}_{n,m}^{\infty,\infty}\big)$. *Тоді* $\{\varphi_{n,m}(x)\psi_{n,m}(y)\}_{n,m}^{\infty,\infty}$ *із* $\{X\times Y,\rho_{X\times Y}\}$ *належить класу* $B\big(c_{X\times Y}(x),\{f_{n,m}^{X\times Y}(\delta)\}_{n,m}^{\infty,\infty}\big)$, *де* $c_{X\times Y}(x,y)=c_X(x)\cdot c_Y(y)$ *і* $f_{n,m}^{X\times Y}(\delta)=f_{n,m}^{X}(\delta)+f_{n,m}^{Y}(\delta)$.

Означення 2 ([1], означення 1). *Опукла функція* $U(x)$ *така, що* $U(x)\in C^1(R^1)$, $U(0)=0$, $U(x)>0$ *при* $x\neq 0$, *називається* S*-функцією.*

Означення 3 ([1], означення 4). *Говорять, що* S*-функція* $U(x)$ *задовольняє* R*-умову, якщо* $\forall\alpha\in[0,1]$: $U(\alpha x)\le R(\alpha)U(x)$, *де* $R(\alpha)$ — *монотонна функція,* $R(0)=0$, $R(1)=1$.

Означення 4 ([1], означення 3). S*-функція* $U(x)$ *належить класу* E, *якщо існують* $K>0$, $C>0$, $x_0>0$, $y_0>0$ *такі, що для кожного* $x>x_0$ *та* $y>y_0$ $U(x)U(y)<C\,U(Kxy)$.

Означення 5 ([1], означення 5). *Простором Орліча* $L_U(\Omega)$ *називається простір випадкових величин* $\xi(\omega)$, $\omega\in\Omega$, *таких, що існує константа* r_ξ *така, що* $EU(\xi/r_\xi)<\infty$.

Лема 3 ([1], лема 3). *З нерівності* $EU(\xi/r)\le a$ *випливає нерівність* $\|\xi\|_{L_U}\le r\max\{1,a\}$.

Лема 4 ([1], лема 4). *Якщо* $\xi(\omega)\in L_U(\Omega)$, *то для будь-якого* $x>0$ *справджується нерівність*

$$P\{|\xi|>x\}\le 1/U\big(x/\|\xi\|_{L_U}\big).$$

3. Рівномірна збіжність стохастичних рядів вигляду $\sum_{i=0,j=0}^{\infty}\xi_{i,j}(\omega)g_{i,j}(x)$ у просторах Орліча.

Теорема 1. *Нехай* $\{\xi_{n,m}(\omega)\}_{n,m}^{\infty,\infty}\subset L_U(\Omega)$ — *простір Орліча,* S*-функція* $U(x)$ *задовольняє* R*-умову та належить класу* E, $\{g_{n,m}(x)\}_{n,m}^{\infty,\infty}$ *належить класу* $B\big(c(x),\{f_{n,m}(\delta)\}_{n,m}^{\infty,\infty}\big)$ *і функція* $c(x)$ *задовольняє умову* $\int_X R(|c(x)|)d\mu(x)<\infty$. *Нехай існує числова послідовність* $\{\varphi(n,m)\}_{n,m}^{\infty,\infty}$, *монотонна по* n *при будь-якому фіксованому* m, *монотонна по* m *при будь-якому фіксованому* n, $\lim\limits_{n\to\infty,\,m\to\infty}\varphi(n,m)=+\infty$ *і* $\forall\theta\in(0,1)$, $\forall n,m\ge 0$

$$\lim_{N\to\infty}\gamma_{n,m}^{N,M}(\theta)=0,\qquad \lim_{M\to\infty}\gamma_{n,m}^{N,M}(\theta)=0,\qquad \lim_{n\to\infty,\,m\to\infty}\omega_{n,m}(\theta)=0,$$

де

$$\gamma_{n,m}^{N,M}(\theta) = \left\| \left\| \bar{S}_{n,m}^{N,M}(x) \right\|_{L_U} \right\|_C U^{(-1)}\left(\frac{1}{c_{N,M}(\theta)}\right)\frac{1}{\varphi(N,M)},$$

$$\omega_{n,m}(\theta) =$$

$$= \sum_{i=n,\, j=m}^{\infty} \left\| \left\| \bar{S}_{n,m}^{i,j}(x) \right\|_{L_U} \right\|_C U^{(-1)}\left(\frac{1}{c_{i,j}(\theta)}\right)\left(\frac{1}{\varphi(i,j)} - \frac{1}{\varphi(i+1,j)} + \frac{1}{\varphi(i,j+1)} - \frac{1}{\varphi(i+1,j+1)}\right),$$

$$\bar{S}_{n,m}^{N,M}(x) = \sum\nolimits_{i=n,\, j=m}^{N,M} \varphi(i,j)\xi_{i,j}(\omega)g_{i,j}(x),$$

функція $c_{n,m}(\theta)$ *визначена в лемі* 1.

Тоді ряд $\sum_{i=0,\, j=0}^{\infty} \xi_{i,j}(\omega)g_{i,j}(x)$ *збігається рівномірно за нормою простору Орліча* $L_U(\Omega)$ *і* $\forall \theta \in (0,1)$, $\forall n, m \geq 0$: $c_{n,m}(\theta) \leq 1/U(x_0)$ *виконуються нерівності*

$$\left\| \left\| c(x) S_{n,m}^{\infty,\infty}(x) \right\|_C \right\|_{L_U} \leq Z_{n,m}(\theta), \tag{4}$$

$$\forall x > 0 \qquad P\left\{ \left\| c(x) S_{n,m}^{\infty,\infty}(x) \right\|_C > x \right\} \leq \left(U\left(x Z_{n,m}^{-1}(\theta) \right) \right)^{-1}, \tag{5}$$

де

$$Z_{n,m}(\theta) = \frac{5KD}{1-\theta}\left\{ \omega_{n,m}(\theta) + \|\xi_{n,m}\|_{L_U} \|g_{n,m}(x)\|_C \, U^{(-1)}\left(\frac{1}{c_{n,m}(\theta)}\right) \right\},$$

$$D = \max\left\{1,\, U(x_0) + \int_X R(|c(x)|)\, d\mu(x) \right\},$$

константи x_0, C, K *такі ж, як в означенні* 4.

Доведення. З означення функції $c_{n,m}(\theta)$ в лемі 1 випливає, що при достатньо великих $n, m \in N$ виконується нерівність $c_{n,m}(\theta) \leq 1/U(x_0)$. Нехай $a \geq 0$ — константа, $\chi(A)$ — індикатор ω-множини, тоді

$$EU\left(\left\| c(x)\bar{S}_{n,m}^{N,M}(x) \right\|_C / a \right) = EU\left(\left\| c(x)\bar{S}_{n,m}^{N,M}(x) \right\|_C / a \right) \chi\left(\left\| c(x)\bar{S}_{n,m}^{N,M}(x) \right\|_C / a \leq x_0 \right) +$$

$$+ EU\left(\left\| c(x)\bar{S}_{n,m}^{N,M}(x) \right\|_C / a \right) \chi\left(\left\| c(x)\bar{S}_{n,m}^{N,M}(x) \right\|_C / a > x_0 \right) \leq U(x_0) + I.$$

Із леми 2 маємо, що на множині $Q = \left\{ \omega \;\middle|\; \left\| c(x)\bar{S}_{n,m}^{N,M}(x) \right\|_C / a > x_0 \right\}$ для $x \in$ $\in A\left(\theta, \{d_{n,m}\}\right)$

$$U\left(\left\| c(x)\bar{S}_{n,m}^{N,M}(x) \right\|_C / a \right) \leq$$

$$\leq C \int_{A(\theta,\bullet)} U\left(c(x) \left| \bar{S}_{n,m}^{N,M}(x) \right| K U^{(-1)}\left(\frac{1}{c_{n,m}(\theta)}\right) \Big/ (1-\theta)a \right) d\mu(x) \leq$$

$$\leq C \int_X R(|c(x)|)\, U\left(\left| \bar{S}_{n,m}^{N,M}(x) \right| K U^{(-1)}\left(\frac{1}{c_{n,m}(\theta)}\right) \Big/ (1-\theta)a \right) d\mu(x).$$

Отже,

$$I \leq C \int_X R(|c(x)|)\, EU\left(\left| \bar{S}_{n,m}^{N,M}(x) \right| K U^{(-1)}\left(\frac{1}{c_{n,m}(\theta)}\right) \Big/ (1-\theta)a \right) d\mu(x).$$

Якщо в цій нерівності покласти

$$a := \left\| \left\| \bar{S}_{n,m}^{N,M}(x) \right\|_{L_U} \right\|_C K U^{(-1)}\left(\frac{1}{c_{N,M}(\theta)}\right) \Big/ (1-\theta),$$

то отримаємо $I \le C \int_X R(|c(x)|)\, d\mu(x)$. Скористаємось лемою 3:

$$\Big\| \big\| c(x) \bar{S}_{n,m}^{N,M}(x) \big\|_C \Big\|_{L_U} \le \frac{KD}{1-\theta} \Big\| \big\| \bar{S}_{n,m}^{N,M}(x) \big\|_{L_U} \Big\|_C U^{(-1)}\left(\frac{1}{c_{N,M}(\theta)} \right).$$

Використаємо перетворення Абеля для

$$S_{n,m}^{N,M}(x) = \sum\nolimits_{i=n,\, j=m}^{N,M} \xi_{i,j}(\omega) g_{i,j}(x)$$

і візьмемо норму $\big\| \| \ldots \|_C \big\|_{L_U}$ зліва і справа в отриманій рівності, а потім використаємо одержану вище оцінку. В результаті отримаємо

$$\Big\| \big\| c(x) R_{n,m}^{N,M}(x) \big\|_C \Big\|_{L_U} \le \Big\| \big\| \bar{S}_{n,m}^{N,M}(x) \big\|_{L_U} \Big\|_C U^{(-1)}\left(\frac{1}{c_{N,M}(\theta)} \right) \frac{1}{\varphi(N,M)} +$$

$$+ \Big\| \big\| \bar{S}_{n,m}^{N,M}(x) \big\|_{L_U} \Big\|_C U^{(-1)}\left(\frac{1}{c_{n,m}(\theta)} \right) \left| \frac{1}{\varphi(n,m)} - \frac{1}{\varphi(n,m+1)} - \frac{1}{\varphi(n+1,m)} + \frac{1}{\varphi(n+1,m+1)} \right| +$$

$$+ \Big\| \big\| \bar{S}_{n,m}^{N,M}(x) \big\|_{L_U} \Big\|_C U^{(-1)}\left(\frac{1}{c_{N,m}(\theta)} \right) \left| \frac{1}{\varphi(N,m)} - \frac{2}{\varphi(N,m+1)} \right| +$$

$$+ \Big\| \big\| \bar{S}_{n,m}^{N,M}(x) \big\|_{L_U} \Big\|_C U^{(-1)}\left(\frac{1}{c_{n,M}(\theta)} \right) \left| \frac{1}{\varphi(n,M)} - \frac{2}{\varphi(n+1,M)} \right| +$$

$$+ \sum_{i=n+1}^{N-1} \Big\| \big\| \bar{S}_{n,m}^{N,M}(x) \big\|_{L_U} \Big\|_C U^{(-1)}\left(\frac{1}{c_{i,m}(\theta)} \right) \left| \frac{1}{\varphi(i,m)} - \frac{1}{\varphi(i+1,m)} - \frac{1}{\varphi(i,m+1)} + \frac{1}{\varphi(i+1,m+1)} \right| +$$

$$+ \sum_{j=m+1}^{M-1} \Big\| \big\| \bar{S}_{n,m}^{N,M}(x) \big\|_{L_U} \Big\|_C U^{(-1)}\left(\frac{1}{c_{n,j}(\theta)} \right) \left| \frac{1}{\varphi(n,j)} - \frac{1}{\varphi(n,j+1)} - \frac{1}{\varphi(n+1,j)} + \frac{1}{\varphi(n+1,j+1)} \right| +$$

$$+ \sum_{i=n+1}^{N-1} \Big\| \big\| \bar{S}_{n,m}^{N,M}(x) \big\|_{L_U} \Big\|_C U^{(-1)}\left(\frac{1}{c_{i,M}(\theta)} \right) \left| \frac{1}{\varphi(i,M)} - \frac{1}{\varphi(i+1,M)} \right| +$$

$$+ \sum_{j=m+1}^{M-1} \Big\| \big\| \bar{S}_{n,m}^{N,M}(x) \big\|_{L_U} \Big\|_C U^{(-1)}\left(\frac{1}{c_{N,j}(\theta)} \right) \left| \frac{1}{\varphi(N,j)} - \frac{1}{\varphi(N,j+1)} \right| +$$

$$+ \sum_{i=n}^{N-1} \sum_{j=m}^{M-1} \Big\| \big\| \bar{S}_{n,m}^{N,M}(x) \big\|_{L_U} \Big\|_C U^{(-1)}\left(\frac{1}{c_{i,j}(\theta)} \right) \left| \frac{1}{\varphi(i,j)} - \frac{1}{\varphi(i,j+1)} - \frac{1}{\varphi(i+1,j)} + \frac{1}{\varphi(i+1,j+1)} \right|.$$

Перейдемо до границі при $N, M \to \infty$ справа і зліва в цій нерівності. При цьому останні п'ять доданків мажоруються сумою $\omega_{n,m}(\theta)$. Таким чином,

$$\Big\| \big\| c(x) S_{n,m}^{\infty,\infty}(x) \big\|_C \Big\|_{L_U} \le$$

$$\le \frac{5KD}{1-\theta} \left\{ \| \xi_{n,m} \|_{L_U} \| g_{n,m}(x) \|_C \, U^{(-1)}\left(\frac{1}{c_{n,m}(\theta)} \right) + \omega_{n,m}(\theta) \right\} \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0.$$

З цієї нерівності випливає (4). Застосувавши лему 4 до нерівності (4), отримаємо (5). Теорему доведено.

4. Умови, за яких розв'язок задачі (1) – (3) можна подати у вигляді абсолютно і рівномірно збіжного з імовірністю одиниця ряду. Застосуємо метод Фур'є до задачі (1) – (3). Тоді розв'язок цієї задачі формально можна записати у вигляді

$$v(r, \varphi, t) = \sum_{n=0, m=1}^{\infty} A_{n,m}^{(1)} R_{n,m}(r) \cos n\varphi \cos\sqrt{\lambda_{n,m}}\, t + $$
$$+ \frac{1}{\sqrt{\lambda_{n,m}}} B_{n,m}^{(1)} R_{n,m}(r) \cos n\varphi \sin\sqrt{\lambda_{n,m}}\, t +$$
$$+ A_{n,m}^{(2)} R_{n,m}(r) \sin n\varphi \cos\sqrt{\lambda_{n,m}}\, t + \frac{1}{\sqrt{\lambda_{n,m}}} B_{n,m}^{(2)} R_{n,m}(r) \sin n\varphi \sin\sqrt{\lambda_{n,m}}\, t, \qquad (6)$$

де $\{R_{n,m}(r)\}_{n,m}^{\infty,\infty}$ — ортонормовані власні функції узагальненої задачі Штурма–Ліувілля,

$$\left\{ -\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr} \right) + \left(\frac{n^2}{r^2} + q(r) \right) rR = \lambda \rho(r) rR; \quad R(r_0) = 0, \ R(0) = \text{const} \right\}, \qquad (7)$$

а $\lambda_{n,m}$ — власні числа диференціального оператора

$$L(u) = -\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr} \right) + \left(\frac{n^2}{r^2} + q(r) \right) ru,$$

який діє з $\left\{ u \in C[0, r_0] \cup C^2(0, r_0] : u(0) = \text{const};\ u(r_0) = 0 \right\} \subset L_{2,p}$ в простір $L_{2,p}$;

$$A_{n,m}^{(1)} = K_n \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \xi(r,\varphi) R_{n,m}(r) r\rho(r) \cos n\varphi \, dr\, d\varphi,$$

$$A_{n,m}^{(2)} = K_n \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \xi(r,\varphi) R_{n,m}(r) r\rho(r) \sin n\varphi \, dr\, d\varphi,$$

$$B_{n,m}^{(1)} = K_n \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \eta(r,\varphi) R_{n,m}(r) r\rho(r) \cos n\varphi \, dr\, d\varphi,$$

$$B_{n,m}^{(2)} = K_n \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \eta(r,\varphi) R_{n,m}(r) r\rho(r) \sin n\varphi \, dr\, d\varphi,$$

$K_n = 1/\pi$ при $n = 0$; $K_n = 1/2\pi$ при $n > 0$.

Теорема 2. *Для того щоб з імовірністю одиниця існував двічі неперервно диференційовний розв'язок крайової задачі* (1)–(3) *у вигляді абсолютно і рівномірно збіжного ряду* (6), *достатньо, щоб виконувались наступні умови:*

1) $P\left\{ \xi(\omega, r, \varphi) \in C^2([0, r_0] \times [0, 2\pi]) \right\} = 1, \ P\left\{ \eta(\omega, r, \varphi) \in C^1([0, r_0] \times [0, 2\pi]) \right\} = 1;$

2) *ряди*

$$\sum_{n=0, m=1}^{\infty} \lambda_{n,m} A_{n,m}^{(1)} R_{n,m}(r) \cos n\varphi \cos\sqrt{\lambda_{n,m}}\, t + \sqrt{\lambda_{n,m}} B_{n,m}^{(1)} R_{n,m}(r) \cos n\varphi \sin\sqrt{\lambda_{n,m}}\, t +$$
$$+ \lambda_{n,m} A_{n,m}^{(2)} R_{n,m}(r) \sin n\varphi \cos\sqrt{\lambda_{n,m}}\, t + \sqrt{\lambda_{n,m}} B_{n,m}^{(2)} R_{n,m}(r) \sin n\varphi \sin\sqrt{\lambda_{n,m}}\, t, \quad (8)$$
$$\sum_{n=0, m=1}^{\infty} n^2 A_{n,m}^{(1)} R_{n,m}(r) \cos n\varphi \cos\sqrt{\lambda_{n,m}}\, t + \frac{n^2}{\sqrt{\lambda_{n,m}}} B_{n,m}^{(1)} R_{n,m}(r) \cos n\varphi \sin\sqrt{\lambda_{n,m}}\, t +$$
$$+ n^2 A_{n,m}^{(2)} R_{n,m}(r) \sin n\varphi \cos\sqrt{\lambda_{n,m}}\, t + \frac{n^2}{\sqrt{\lambda_{n,m}}} B_{n,m}^{(2)} R_{n,m}(r) \sin n\varphi \sin\sqrt{\lambda_{n,m}}\, t \quad (9)$$

збіжні рівномірно за ймовірністю.

Доведення аналогічне тому, що наведено в [2] (теорема 3) для крайової задачі на відрізку, і опирається на теорему Стєклова та інтегральний вигляд власних функцій $\{R_{n,m}(r)\}_{n,m}^{\infty,\infty}$ узагальненої задачі Штурма–Ліувілля (7).

5. Достатня умова рівномірної збіжності за ймовірністю рядів (8), (9).

Теорема 3. *Нехай* $\xi(r,\varphi)$, $\eta(r,\varphi)$ — *випадкові процеси із простору Орліча* $L_U(\Omega)$, S-*функція* $U(x)$ *задовольняє* R-*умову та належить класу* E. *Нехай існує числова послідовність* $\{\varphi(n,m)\}_{n,m}^{\infty,\infty}$, *монотонна по* n *при будь-якому фіксованому* m, *монотонна по* m *при будь-якому фіксованому* n, $\lim\limits_{n\to\infty, m\to\infty}\varphi(n,m)=+\infty$ *і* $\forall\theta\in(0,1)$, $\forall n,m\geq 0$

$$\lim_{N\to\infty}\gamma_{n,m}^{N,M}(\theta)=0,\qquad \lim_{M\to\infty}\gamma_{n,m}^{N,M}(\theta)=0,\qquad \lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}\omega_{n,m}(\theta)=0,$$

де

$$\gamma_{n,m}^{N,M}(\theta) = \left\|\left\|\tilde{S}_{n,m}^{N,M}(r,\varphi,t)\right\|_{L_U}\right\|_C U^{(-1)}\left(\frac{1}{c_{N,M}(\theta)}\right)\frac{1}{\varphi(N,M)},$$

$$\omega_{n,m}(\theta) = \sum_{i=n,\,j=m}^{\infty}\left\|\left\|\tilde{S}_{n,m}^{i,j}(r,\varphi,t)\right\|_{L_U}\right\|_C \times$$

$$\times\, U^{(-1)}\left(\frac{1}{c_{i,j}(\theta)}\right)\left(\frac{1}{\varphi(i,j)}-\frac{1}{\varphi(i+1,j)}+\frac{1}{\varphi(i,j+1)}-\frac{1}{\varphi(i+1,j+1)}\right);$$

$$\tilde{S}_{n,m}^{i,j}(r,\varphi,t) = \sum_{i=n,\,j=m}^{N,M}\sigma_{n,m}^{(k)}A_{n,m}^{(1)}R_{n,m}(r)\cos n\varphi\cos\sqrt{\lambda_{n,m}}\,t\,+$$

$$+\,\sigma_{n,m}^{(k)}\frac{B_{n,m}^{(1)}}{\sqrt{\lambda_{n,m}}}R_{n,m}(r)\cos n\varphi\sin\sqrt{\lambda_{n,m}}\,t\,+$$

$$+\sum_{i=n,\,j=m}^{N,M}\sigma_{n,m}^{(k)}A_{n,m}^{(2)}R_{n,m}(r)\sin n\varphi\cos\sqrt{\lambda_{n,m}}\,t\,+$$

$$+\,\sigma_{n,m}^{(k)}\frac{B_{n,m}^{(2)}}{\sqrt{\lambda_{n,m}}}R_{n,m}(r)\sin n\varphi\sin\sqrt{\lambda_{n,m}t}\,,\quad k=1,2;\quad \sigma_{n,m}^{(1)}=\lambda_{n,m},\quad \sigma_{n,m}^{(2)}=n^2.$$

Тоді ряди (8), (9) *збігаються рівномірно за нормою простору Орліча.*

Доведення. Для доведення скористаємося теоремою 1 і наступною лемою.

Лема 5. *Послідовність*

$$\Big\{R_{n,m}(r)\cos n\varphi\cos\sqrt{\lambda_{n,m}}\,t;\, R_{n,m}(r)\cos n\varphi\sin\sqrt{\lambda_{n,m}}\,t;$$

$$R_{n,m}(r)\sin n\varphi\cos\sqrt{\lambda_{n,m}}\,t;\, R_{n,m}(r)\sin n\varphi\sin\sqrt{\lambda_{n,m}}\,t\Big\}_{n,m}^{\infty,\infty}$$

належить класу B:

$$c(r,\varphi,t) = \frac{\sin\alpha\varphi}{\alpha\varphi}\frac{\sin\varepsilon t}{\varepsilon t}\qquad \forall\alpha\in(0,1),\quad \forall\varepsilon\in(0,1),$$

$$f_{n,m}(\delta) = \left(r_0\,\rho_{\max}\left(1+\frac{1}{\lambda_{0,0}}\max_{s\in[0,r_0]}\frac{q(s)}{\rho(s)}\right)\lambda_{n,m}\sqrt{nm}+\sqrt{\lambda_{n,m}}+n+2\right)\delta.$$

Доведення. Послідовність $\{a_{n,m}\cos\psi(n,m)x+b_{n,m}\sin\psi(n,m)x\}_{n,m}^{\infty,\infty}$ належить класу B:

$$c(x) = \frac{\sin\varepsilon x}{\varepsilon x}\quad \forall\varepsilon\in(0,1);\qquad f_{n,m}(\delta) = (1+\psi(n,m))\,\delta.$$

Доведення цього факту є в [4] (лема 4). Перевіримо, що $\{R_{n,m}(r)\}_{n,m}^{\infty,\infty}$ належить такому класу B, що

$$c(r) = 1; \qquad f_{n,m}(\delta) = r_0 \rho_{\max}\left(1+\frac{1}{\lambda_{0,0}}\max_{s\in[0,r_0]}\frac{q(s)}{\rho(s)}\right)\lambda_{n,m}\sqrt{nm}\,\delta .$$

Для цього подамо $R_{n,m}(r)$ в інтегральному вигляді. Перепишемо узагальнену задачу Штурма–Ліувілля (7) у вигляді

$$\left\{\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}R\right)-\frac{n^2}{r}R = \big(q(r)-\lambda_{n,m}\rho(r)\big)+rR(r); \quad R(0)=\text{const},\ R(r_0)=0\right\}. \qquad (7')$$

Функція Гріна для цієї крайової задачі легко знаходиться, оскільки вона повинна задовольняти крайові умови із (7′), а також рівняння Бесселя $\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}R\right)-$ $-\frac{n^2}{r}R=0$ [3, с. 274–275]:

$$G_n(r,s) = \frac{1}{2n}\begin{cases}\big((s/r_0)^n-(r_0/s)^n\big)(r/r_0)^n; & 0<r\le s;\\ \big((r/r_0)^n-(r_0/r)^n\big)(s/r_0)^n; & s<r\le r_0.\end{cases}$$

Введемо позначення $\nu_n(s) = (s/r_0)^n-(r_0/s)^n$, $u_n(s) = (s/r_0)^n$, $Q_{n,m}(s) =$ $= s\big(q(s)-\lambda_{n,m}\rho(s)\big)$. Маємо

$$R_{n,m}(r) = \int_0^{r_0} G_n(r,s)Q_{n,m}(s)R_{n,m}(s)\,ds,$$

$$\left|\sum_{n,m} d_{n,m}R_{n,m}(x)-\sum_{n,m} d_{n,m}R_{n,m}(y)\right| \le$$

$$\le \sum_{n,m}\int_0^{r_0}\left|d_{n,m}R_{n,m}(x)s(G_n(x,s)-G_n(y,s))\lambda_{n,m}\left(\rho(s)-\frac{q(s)}{\lambda_{n,m}}\right)\right|ds \le$$

$$\le \sum_{n,m}\lambda_{n,m}|d_{n,m}|\sqrt{\int_0^{r_0}R_{n,m}^2(s)\rho(s)ds}\sqrt{\int_0^{r_0}(s(G_n(x,s)-G_n(y,s)))^2\left(1-\frac{q(s)}{\rho(s)\lambda_{n,m}}\right)^2ds} \le$$

$$\le \sum_{n,m}\lambda_{n,m}|d_{n,m}|\,|x-y|\sqrt{\int_0^{r_0}R_{n,m}^2(s)\rho(s)ds}\sqrt{\int_0^{r_0}\left(1-\frac{q(s)}{\rho(s)\lambda_{n,m}}\right)^2ds} \le$$

$$\le r_0\rho_{\max}\left\|\sum_{n,m}d_{n,m}R_{n,m}\right\|_C\left(1+\frac{1}{\lambda_{0,0}}\max_{s\in[0,r_0]}\frac{q(s)}{\rho(s)}\right)\lambda_{N,M}\sqrt{NM}\,|x-y|.$$

Використаємо лему 2.

1. *E. Barrasa de la Krus, Kozachenko Yu. V.* Boundary-value problem for equations of mathematical physics with strictly orlich random conditions // Random Operators and Stochast. Equat. – 1995. – 3, № 3. – P. 201–220.
2. *Булдыгин В. В., Козаченко Ю. В.* К вопросу о применимости метода Фурье для решения задач со случайными краевыми условиями // Случайные процессы в задачах математической физики: Сб. научн. тр. Ин-та математики АН УССР. – 1979. – С. 4–35.
3. *Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк М. О.* Диференціальні рівняння у прикладах і задачах. – Київ: Вища шк., 1994. – С. 274–275.
4. *Козаченко Ю. В.* Условия равномерной сходимости гауссовских и близких к ним тригонометрических рядов в норме Люксембурга // Теория вероятностей и мат. статистика. – 1983. – № 28. – С. 59–70.

Одержано 29.12.97,
після доопрацювання – 23.02.99