УДК 517.9:519.46

Р. З. Жданов (Ин-т математики НАН Украины, Киев),
В. И. Лагно (Пед. ун-т, Полтава)

О НОВЫХ РЕАЛИЗАЦИЯХ ГРУПП ПУАНКАРЕ $P(1,2)$ И $P(2,2)$

We classify realizations of the Poincaré groups $P(1,2)$ and $P(2,2)$ inthe class of local groups of the Lie transformations. We obtain a number of new realizations of the Lie algebras of infinitesimal operators of these groups.

Проведено класифікацію реалізацій груп Пуанкаре $P(1,2)$, $P(2,2)$ в класі локальних груп Лі перетворень. Отримано ряд нових реалізацій алгебр Лі інфінітезимальних операторів цих груп.

Среди фундаментальных групп преобразований, которые встречаются в различных задачах математической и теоретической физики, важное место занимают обобщенные группы Пуанкаре $P(n,m)$, $n, m \in N$. В частности, эти группы имеют прямое отношение к задаче о расширении S-матрицы за массовую оболочку и к проблеме описания частиц с внутренней структурой [1–3]. Группы Пуанкаре являются также группами инвариантности многих известных дифференциальных уравнений [4, 5]. Использование подгрупповой структуры группы $P(1,3)$ позволило получить широкие классы решений нелинейных уравнений релятивистской физики [6, 7]. Подгруппы группы $P(2,2)$ были использованы для сведения самодуальных уравнений Янга–Миллса в пространстве Минковского $R_{2.2}$ к классическим интегрируемым уравнениям (Эйлера–Арнольда, Кадомцева–Петвиашвили, Лиувилля и т. п.) [8].

Рассматриваемая в данной статье задача изучения реализаций групп Пуанкаре $P(1,2)$ и $P(2,2)$ в классе локальных групп Ли преобразований непосредственно связана с решением одной из центральных проблем современного группового анализа дифференциальных уравнений, а именно, с построением наиболее общего вида дифференциальных уравнений в частных производных, инвариантных относительно фундаментальных групп преобразований. Заметим, что для групп Пуанкаре полностью решена задача построения скалярных уравнений, инвариантных относительно группы $P(1,1)$ [9, 10], и систем уравнений, которые инвариантны относительно стандартной реализации группы $P(1,n)$ [11].

Говоря о группе Пуанкаре $P(n,m)$, мы рассматриваем группу Ли преобразований

$$\begin{aligned} \tilde{x}_\mu &= f_\mu(x,u,a), \qquad \mu = 1,\dots,n+m, \\ \tilde{u}_i &= g_i(x,u,a), \qquad i = 1,\dots,k, \end{aligned} \tag{1}$$

в пространстве $V = X \otimes U$, где $X = R^{n,m} = \langle x \rangle = \langle x_1, \dots, x_{n+m} \rangle$— псевдоевклидово пространство с метрическим тензором

$$g_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta = 1,\dots,n; \\ -1, & \alpha = \beta = n+1,\dots,n+m; \\ 0, & \alpha \neq \beta, \end{cases}$$

$U = R^k = \langle u \rangle = \langle u_1, \dots, u_k \rangle$ — евклидово пространство, а $a = \{a_j, j = 1, 2, \dots$ $\dots, (n+m)(n+m+1)/2\}$ — групповые параметры. При этом преобразования (1) сохраняют квадратичную форму $S(x) = g_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta$. Здесь и далее по повторяющимся индексам предусмотрено суммирование.

Заметим, что здесь мы не различаем x и u как независимые и зависимые переменные. Если же трактовать группу (1) как группу инвариантности дифференциальных уравнений, переменные u_i нужно рассматривать как скалярные функции: $u_i = u_i(x)$.

Хорошо известно [4], что локальная группа Ли преобразований полностью определяется множеством векторных полей Ли (или, что эквивалентно, множеством инфинитезимальных операторов), которые составляют базис алгебры Ли данной группы Ли.

В рассматриваемом случае инфинитезимальные операторы группы $P(n, m)$ принадлежат множеству линейных дифференциальных операторов первого порядка вида

$$Q = \xi^{\mu}(x, u)\partial_{x_\mu} + \eta^{j}(x, u)\partial_{u_j}, \quad \mu = 1, \ldots, n+m, \quad j = 1, \ldots, k, \tag{2}$$

где ξ^{μ}, η^{j} — гладкие действительные функции, составляющие базис пространства векторных полей Ли группы $P(n, m)$ и определенные в некоторой области пространства V, $\partial_{x_\mu} = \partial/\partial_{x_\mu}$, $\partial_{u_j} = \partial/\partial_{u_j}$. Базис алгебры Ли группы $P(n, m)$ (далее мы будем называть ее алгеброй Пуанкаре и обозначать $p(n, m)$) составляют $(n+m)(n+m+1)/2$ генераторов трансляций P_μ, вращений и псевдовращений $J_{\alpha\beta}$ $(\mu, \alpha, \beta = 1, \ldots, n+m;\ \alpha < \beta)$, которые удовлетворяют таким коммутационным соотношениям:

$$\begin{gathered} [P_\alpha, P_\beta] = 0, \qquad [P_\mu, J_{\alpha\beta}] = g_{\mu\alpha}P_\beta - g_{\mu\beta}P_\alpha, \\ [J_{\mu\nu}, J_{\alpha\beta}] = g_{\alpha\nu}J_{\beta\mu} + g_{\beta\mu}J_{\alpha\nu} - g_{\alpha\mu}J_{\beta\nu} - g_{\beta\nu}J_{\alpha\mu}. \end{gathered} \tag{3}$$

Следовательно, задача описания реализаций группы $P(n, m)$ в классе векторных полей Ли эквивалентна задаче изучения реализаций алгебры $p(n, m)$ в классе линейных операторов (2). Другими словами, нужно описать все наборы функций ξ^{μ}, η^{j} в операторах P_μ, $J_{\alpha\beta}$ вида (2), при которых эти операторы являются линейно независимыми и удовлетворяют соотношениям (3).

Пусть

$$y_\alpha = F_\alpha(x, u), \quad v_i = G_i(x, u), \quad \alpha = 1, \ldots, n+m; \quad i = 1, \ldots, k, \tag{4}$$

— некоторая невырожденная локальная замена переменных в пространстве V. Известно, что в результате замены переменных (4) реализация алгебры $p(n, m)$ в классе операторов (2) преобразуется в такую реализацию этой алгебры, которая с точки зрения группового анализа неразличима с предыдущей. Тем самым преобразования пространства V вида (4) образуют группу (группу диффеоморфизмов), которая на множестве реализаций алгебры Пуанкаре определяет естественное отношение эквивалентности. Следовательно, для полного описания реализаций алгебры $p(n, m)$ в классе операторов (2) достаточно указать по одному представителю неэквивалентных классов таких реализаций.

Отметим далее, что отличительной особенностью известных реализаций алгебр Пуанкаре, рассматриваемых как алгебры инвариантности дифференциальных уравнений, является то, что генераторы трансляций имеют вид

$$P_\mu = \partial_{x_\mu}, \quad \mu = 1, \ldots, n+m. \tag{5}$$

Именно такие реализации мы будем изучать.

В настоящей статье мы продолжаем исследования, начатые в статьях [12, 13]. В них было показано, что в общем случае алгебра $p(n, m)$, $n+m > 2$, в классе операторов (2), (5) при $U = \mathbb{R}^1$ имеет только стандартные реализации. Новые реализации были получены только для алгебр $p(1, 2)$ и $p(2, 2)$.

Здесь для алгебр $p(1, 2)$ и $p(2, 2)$ рассмотрена более общая задача. К ней сводятся и рассмотренные ранее случаи.

В первой части статьи проведен анализ реализаций алгебры $p(2,2)$ в классе операторов (2), (5). Во второй части при рассмотрении реализаций алгебры $p(2,2)$ мы ограничились случаем, когда операторы P_μ имеют вид (5), а операторы $J_{\alpha\beta}$ — вид (2), где $\xi^\mu=\xi^\mu(x)$, $\eta^j=\eta^j(u)$.

1. Перейдем к анализу реализаций алгебры Пуанкаре $p(1,2)$. Здесь пространство V совпадает с пространством $X\otimes U$, где $X=R^{1.2}=\langle x\rangle=\langle x_0,x_1,x_2\rangle$, $U=R^n=\langle u\rangle=\langle u_1,\ldots,u_n\rangle$.

Следовательно, инфинитезимальные операторы являются линейными дифференциальными операторами вида

$$Q = \xi^\mu(x,u)\partial_{x_\mu}+\eta^j(x,u)\partial_{u_j}, \quad \mu=0,1,2, \quad j=1,\ldots,n, \tag{6}$$

а группу диффеоморфизмов составляют невырожденные локальные преобразования в пространстве V вида

$$y_\alpha = f_\alpha(x,u), \quad \alpha=0,1,2, \quad v_i = g_i(x,u), \quad i=1,\ldots,n. \tag{7}$$

Базисные операторы P_μ, $J_{\alpha\beta}$ алгебры $p(1,2)$ удовлетворяют таким коммутационным соотношениям:

$$[P_\mu,P_\nu] = 0, \quad [P_\mu,J_{\alpha\beta}] = g_{\mu\alpha}P_\beta-g_{\mu\beta}P_\alpha, \tag{8}$$

$$[J_{\mu\nu},J_{\alpha\beta}] = g_{\mu\beta}J_{\nu\alpha}+g_{\nu\alpha}J_{\mu\beta}-g_{\mu\alpha}J_{\nu\beta}-g_{\nu\beta}J_{\mu\alpha}, \tag{9}$$

где

$$g_{\mu\nu} = \begin{cases} 1, & \mu=\nu=0; \\ -1, & \mu=\nu=1,2; \\ 0, & \mu\neq\nu; \end{cases}$$

$\alpha,\beta,\mu,\nu=0,1,2.$

Из соотношений (8), (9) следует $p(1,2)=so(1,2)\Subset t^3$, где $so(1,2)=\langle J_{01},J_{02},J_{12}\rangle$ — известная простая алгебра Ли, $t^3=\langle P_0,P_1,P_2\rangle$ — коммутативный идеал.

Согласно изложенному выше, мы рассматриваем те реализации алгебры $p(1,2)$, где базис идеала t^3 составляют операторы

$$P_\mu = \partial_{x_\mu}, \quad \mu=0,1,2. \tag{10}$$

Проверка коммутационных соотношений (8) для операторов P_μ вида (10) и $J_{\alpha\beta}$ вида (6) показывает, что можно положить

$$J_{\alpha\beta} = g^{\alpha\gamma}x_\gamma\partial_{x_\beta} - g^{\beta\gamma}x_\gamma\partial_{x_\alpha} + j^\mu_{\alpha\beta}(u)\partial_{x_\mu} + \eta^i_{\alpha\beta}(u)\partial_{u_i}, \tag{11}$$

где $j^\mu_{\alpha\beta}$, $\eta^i_{\alpha\beta}$ — еще неизвестные гладкие функции своих аргументов, $g^{\beta\gamma}=g_{\beta\gamma}$; $\alpha,\beta,\gamma,\mu=0,1,2$; $i=1,\ldots,n$.

Пусть

$$\mathcal{J}_{\mu\nu} = \eta^i_{\mu\nu}(u)\partial_{u_i}, \quad \mu,\nu=0,1,2; \quad i=1,\ldots,n. \tag{12}$$

Подстановка операторов (11) в коммутационные соотношения (9) показывает, что операторы (12) (при условии $J_{\alpha\beta}\to\mathcal{J}_{\alpha\beta}$) должны удовлетворять соотношениям (9), т. е. должны составлять базис реализации алгебры $so(1,2)$.

Поэтому предварительно изучим реализации алгебры $so(1,2)$ в классе операторов (12). При этом для упрощения вида этих операторов будем использовать преобразования вида

$$y_\alpha = x_\alpha, \quad \alpha = 0, 1, 2, \qquad v_i = F_i(u), \quad i = 1, \dots, n, \tag{13}$$

которые оставляют форму операторов P_μ (10) инвариантной.

Теорема 1. *Пусть операторы* $\mathcal{J}_{\mu\nu}$ *вида* (12) *удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры* $so(1,2)$ (9). *Тогда существуют преобразования* (13), *которые сводят операторы* $\mathcal{J}_{\mu\nu}$ *к одному из таких видов*:

$$\mathcal{J}_{\mu\nu} = 0, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2; \tag{14}$$

$$\mathcal{J}_{01} = \sin u_1 \, \partial_{u_1}, \quad \mathcal{J}_{02} = \cos u_1 \, \partial_{u_1}, \quad \mathcal{J}_{12} = \partial_{u_1}; \tag{15}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{01} &= \sin u_1 \tanh u_2 \, \partial_{u_1} - \cos u_1 \, \partial_{u_2} + \varepsilon \sin u_1 \operatorname{sech} u_2 \, \partial_{u_3}, \\ \mathcal{J}_{02} &= \cos u_1 \tanh u_2 \, \partial_{u_1} + \sin u_1 \, \partial_{u_2} + \varepsilon \cos u_1 \operatorname{sech} u_2 \, \partial_{u_3}, \\ \mathcal{J}_{12} &= \partial_{u_1}; \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{01} &= \sin u_1 \, \partial_{u_1} + u_2 \cos u_1 \, \partial_{u_2} + \varepsilon u_2 \sin u_1 \, \partial_{u_3}, \\ \mathcal{J}_{02} &= \cos u_1 \, \partial_{u_1} - u_2 \sin u_1 \, \partial_{u_2} + \varepsilon u_2 \cos u_1 \, \partial_{u_3}, \\ \mathcal{J}_{12} &= \partial_{u_1}; \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{01} &= \sin u_1 \coth u_2 \, \partial_{u_1} - \cos u_1 \, \partial_{u_2} + \varepsilon \sin u_1 \operatorname{cosech} u_2 \, \partial_{u_3}, \\ \mathcal{J}_{02} &= \cos u_1 \coth u_2 \, \partial_{u_1} + \sin u_1 \, \partial_{u_2} + \varepsilon \cos u_1 \operatorname{cosech} u_2 \, \partial_{u_3}, \\ \mathcal{J}_{02} &= \partial_{u_1}. \end{aligned} \tag{18}$$

В формулах (16)–(18) $\varepsilon = 0$ *или* $\varepsilon = 1$.

Доказательство. Если хотя бы один из операторов $\mathcal{J}_{\mu\nu}$ (например, $\mathcal{J}_{12}$) тождественно равен нулю, то, проверяя выполнение коммутационных соотношений (9), убеждаемся, что и два остальных оператора $(\mathcal{J}_{01}, \mathcal{J}_{02})$ также равны нулю, т. е. имеет место случай (14).

Пусть $\mathcal{J}_{12}$ является ненулевым оператором. Тогда, как известно [4], мы можем свести оператор $\mathcal{J}_{12}$ к виду $\mathcal{J}_{12} = \partial_{v_1}$ (должно быть $\mathcal{J}'_{12}$, но для упрощения изложения мы сохраняем начальные обозначения). Далее, из выполнения коммутационных соотношений $[\mathcal{J}_{01}, \mathcal{J}_{12}] = -\mathcal{J}_{02}$, $[\mathcal{J}_{02}, \mathcal{J}_{12}] = \mathcal{J}_{01}$ следует, что коэффициенты при линейно независимых операторах $\partial_{v_1}, \dots, \partial_{v_n}$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений относительно переменной v_1:

$$\frac{\partial \eta^i_{01}}{\partial v_1} = \eta^i_{02}, \qquad \frac{\partial \eta^i_{02}}{\partial v_1} = -\eta^i_{01}, \qquad i = 1, \dots, n,$$

общее решение которой имеет вид

$$\eta^i_{01} = f_i \cos v_1 + g_i \sin v_1, \qquad \eta^i_{02} = g_i \cos v_1 - f_i \sin v_1, \tag{19}$$

где f_i, g_i — произвольные гладкие функции переменных $v_2, \dots, v_n$, $i = 1, \dots, n$.

Если $f_j = g_j = 0$, $j \geq 2$, то операторы $\mathcal{J}_{01}$, $\mathcal{J}_{02}$ сводятся к виду

$$\mathcal{J}_{01} = g\sin v_1, \quad \mathcal{J}_{02} = g\cos v_1,$$

где $g = g(v_2, \ldots, v_n)$ — произвольная гладкая функция. Из выполнения коммутационного соотношения следует $[\mathcal{J}_{01}, \mathcal{J}_{12}] = -\mathcal{J}_{12}$, $g^2 = 1$. Поэтому, с точностью до преобразований (13), имеем тройку

$$\mathcal{J}_{01} = \sin v_1\,\partial_{v_1}, \quad \mathcal{J}_{02} = \cos v_1\,\partial_{v_1}, \quad \mathcal{J}_{12} = \partial_{v_1},$$

которая с точностью до обозначения переменных совпадает с тройкой (15).

Если не все f_j, g_j, $j \geq 2$, равны нулю, то существует замена переменных (13), где

$$w_1 = v_1 + V(v_2, \ldots, v_n), \quad w_j = v_j, \quad j = 2, \ldots, n,$$

которая сводит операторы $\mathcal{J}_{\mu\nu}$ с коэффициентами (19) к операторам

$$\mathcal{J}_{01} = \tilde{g}\sin w_1\,\partial_{w_1} + \sum_{j=2}^{n}\left(\tilde{f}_j\cos w_1 + \tilde{g}_j\sin w_1\right)\partial_{w_j},$$

$$\mathcal{J}_{02} = \tilde{g}\cos w_1\,\partial_{w_1} + \sum_{j=2}^{n}\left(\tilde{g}_j\cos w_1 - \tilde{f}_j\sin w_1\right)\partial_{w_j}, \tag{20}$$

$$\mathcal{J}_{12} = \partial_{w_1},$$

где $\tilde{g}, \tilde{f}_j, \tilde{g}_j$, $j = 2, \ldots, n$, — произвольные гладкие функции переменных $w_2, \ldots$ $\ldots, w_n$.

Если $\tilde{f}_j = 0$, $j = 2, \ldots, n$, то проверка коммутационного соотношения $[\mathcal{J}_{01}, \mathcal{J}_{12}] = -\mathcal{J}_{12}$ приводит к системе алгебраических уравнений

$$\tilde{g}^2 = 1, \quad \tilde{g}\tilde{g}_j = 0, \quad j = 2, \ldots, n,$$

решение которой имеет вид

$$\tilde{g} = \pm 1, \quad \tilde{g}_j = 0, \quad j = 2, \ldots, n,$$

что противоречит исходному предположению.

Следовательно, в (20) не все $\tilde{f}_j$ равны нулю. Используя замену переменных

$$z_1 = w_1, \quad z_j = W_j(w_2, \ldots, w_n), \quad j = 2, \ldots, n,$$

где W_2 — частное решение дифференциального уравнения

$$\sum_{j=2}^{n}\tilde{f}_j\frac{\partial W_2}{\partial w_j} = -1,$$

а $W_3, \ldots, W_n$ — функционально независимые первые интегралы дифференциального уравнения с частными производными

$$\sum_{j=2}^{n}\tilde{f}_j\frac{\partial W}{\partial w_j} = 0, \quad W = W(w_2, \ldots, w_n),$$

сводим операторы (20) к операторам

$$\mathcal{J}_{01} = G\sin z_1\,\partial_{z_1} - \cos z_1\,\partial_{z_2} + \sum_{j=2}^{n} G_j\sin z_1\,\partial_{z_j},$$

$$\mathcal{J}_{02} = G\sin z_1\,\partial_{z_2} + \sin z_1\,\partial_{z_2} + \sum_{j=2}^{n} G_j\cos z_1\,\partial_{z_j}, \tag{21}$$

$$\mathcal{J}_{12} = \partial_{z_1},$$

где $G = G(z_2, \ldots, z_n)$, $G_j = G_j(z_2, \ldots, z_n)$ — произвольные гладкие функции, $j = 2, \ldots, n$.

Подстановка этих операторов в коммутационное соотношение $[\mathcal{J}_{01}, \mathcal{J}_{12}] = -\mathcal{J}_{12}$ приводит к системе дифференциальных уравнений с частными производными

$$\frac{\partial G}{\partial z_2} + G^2 = 1, \qquad \frac{\partial G_j}{\partial z_2} + GG_j = 0, \quad j = 2, \ldots, n,$$

которая имеет следующие решения:

$$G = \tanh(z_2 + c_1), \qquad G_j = \frac{c_j}{\cosh(z_2 + c_1)};$$

$$G = \pm 1, \qquad G_j = c_j \exp(\mp z_2); \tag{22}$$

$$G = \coth(z_2 + c_1), \qquad G_j = \frac{c_j}{\operatorname{sh}(z_2 + c_1)},$$

где $c_2, \ldots, c_n$ — произвольные гладкие функции переменных $z_3, \ldots, z_n$, $j = 2, \ldots, n$. Поскольку исследование каждого из полученных решений проводится аналогично, подробно рассмотрим здесь первое из них.

Замена переменных

$$y_1 = z_1, \quad y_2 = z_2 + c_1, \quad y_k = z_k, \quad k = 3, \ldots, n,$$

позволяет положить в найденных значениях G, G_j, $j = 2, \ldots, n$, функцию c_1 равной нулю. Следовательно, операторы (21), соответствующие первому решению (22), имеют вид

$$\mathcal{J}_{01} = \sin y_1 \tanh y_2\,\partial_{y_1} - \cos y_1\,\partial_{y_2} + \frac{\sin y_1}{\cosh y_2}\left(f\,\partial_{y_2} + g\,\partial_{y_3}\right),$$

$$\mathcal{J}_{02} = \cos y_1 \tanh y_2\,\partial_{y_1} + \sin y_1\,\partial_{y_2} + \frac{\cos y_1}{\cosh y_2}\left(f\,\partial_{y_2} + g\,\partial_{y_3}\right), \tag{23}$$

$$\mathcal{J}_{12} = \partial_{y_1},$$

где f, g — произвольные гладкие функции переменных $y_3, \ldots, y_n$. Если $g = 0$, то замена переменных

$$\tilde{u}_1 = y_1 + \arctan\frac{f}{\cosh y_2}, \qquad \tilde{u}_2 = \operatorname{arctanh}\frac{\sinh y_2}{\sqrt{f^2 + \cosh^2 y_2}}, \qquad \tilde{u}_k = y_k,$$

где $k = 3, \ldots, n$, сводит операторы (23) к операторам (16), где $\varepsilon = 0$.

Если в (23) $g \not\equiv 0$, то замена y_3 на $\tilde{y}_3 = \int g^{-1} dy_3$ и y_1, y_2 на $\tilde{y}_1$, $\tilde{y}_2$ соответственно сводит эти операторы к виду

$$\mathcal{J}_{01} = \sin\tilde{y}_1 \tanh\tilde{y}_2\,\partial_{\tilde{y}_1} - \left(\cos\tilde{y}_1 - \alpha\frac{\sin\tilde{y}_1}{\cosh\tilde{y}_2}\right)\partial_{\tilde{y}_2} + \frac{\sin\tilde{y}_1}{\cosh\tilde{y}_2}\partial_{\tilde{y}_3},$$

$$\mathcal{J}_{02} = \cos\tilde{y}_1 \tanh\tilde{y}_2\,\partial_{\tilde{y}_1} + \left(\sin\tilde{y}_1 + \alpha\frac{\cos\tilde{y}_1}{\cosh\tilde{y}_2}\right)\partial_{\tilde{y}_2} + \frac{\cos\tilde{y}_1}{\cosh\tilde{y}_2}\partial_{\tilde{y}_3}, \tag{24}$$

$$\mathcal{J}_{12} = \partial_{\tilde{y}_1}.$$

Здесь α — произвольная гладкая функция переменных $\tilde{y}_3, \ldots, \tilde{y}_n$.

Наконец, применяя замену

$$\tilde{u}_1 = \tilde{y}_1 + f, \quad \tilde{u}_2 = g, \quad \tilde{u}_3 = h, \quad \tilde{u}_k = \tilde{y}_k, \quad k = 4, \ldots, n,$$

где $f = f(\tilde{y}_2, \ldots, \tilde{y}_n)$, $g = g(\tilde{y}_2, \ldots, \tilde{y}_n)$, $h = h(\tilde{y}_2, \ldots, \tilde{y}_n)$ удовлетворяют совместной переопределенной системе нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными

$$\frac{\partial f}{\partial\tilde{y}_2} = -\sin f\tanh g, \quad \frac{\partial f}{\partial\tilde{y}_3} = \alpha\sin f\tanh g - \cos f\tanh g\cosh\tilde{y}_2 - \sinh\tilde{y}_2,$$

$$\frac{\partial g}{\partial\tilde{y}_2} = \cos f, \quad \frac{\partial g}{\partial\tilde{y}_3} = \sin f\cosh\tilde{y}_2 - \alpha\cos f,$$

$$\frac{\partial h}{\partial\tilde{y}_2} = -\sin f\,\mathrm{sech}\,g, \quad \frac{\partial h}{\partial\tilde{y}_3} = \mathrm{sech}\,g(\cos f\cosh\tilde{y}_2 + \alpha\sin f),$$

сводим операторы (24) к операторам (16), где $\varepsilon = 1$.

Проводя аналогичные рассуждения для второго и третьего решений (22), приходим к операторам (17) и (18) соответственно. Наконец, непосредственной проверкой убеждаемся, что полученные тройки операторов $\mathcal{J}_{\mu\nu}$, $\mu, \nu = 0, 1, 2$, попарно неэквивалентны относительно преобразований (13) (в смысле эквивалентности реализаций).

Теорема доказана.

Из доказанной теоремы следует, что алгебра $so(1,2)$ имеет в классе инфинитезимальных операторов (12) семь (с учетом значений ε) неэквивалентных реализаций (15) – (18).

Теорема 2. *В классе рассматриваемых инфинитезимальных операторов базис произвольной реализации алгебры* $p(1,2)$ *составляют операторы* P_μ, $\mu = 0, 1, 2$, *вида* (10) *и операторы*

$$J_{12} = x_2\partial_{x_1} - x_1\partial_{x_2} + \mathcal{J}_{12},$$

$$J_{01} = x_1\partial_{x_0} + x_0\partial_{x_1} + f\partial_{x_0} + g\partial_{x_2} + \mathcal{J}_{01}, \tag{25}$$

$$J_{02} = x_2\partial_{x_0} + x_0\partial_{x_2} + h\partial_{x_0} + r\partial_{x_1} + \mathcal{J}_{02}.$$

При этом входящие в (25) *параметры* f, g, h, r *и операторы* $\mathcal{J}_{\mu\nu}$, $\mu, \nu = 0, 1, 2$, *принимают одно из следующих значений*:

1) $f = g = h = r = 0$, $\mathcal{J}_{\mu\nu}$ *имеют вид* (14) *или* (15);

2) $f = \rho_{u_2}\sin u_1$, $g = -r = \rho$, $h = \rho_{u_2}\cos u_1$, *где* $\rho = \rho(u_2, \ldots, u_n)$ *имеет значение* $\rho = \theta\sinh u_2 + \sigma[1 + \sinh u_2\arctan(\sinh u_2)]$; $\mathcal{J}_{\mu\nu}$ *имеют вид* (16) *при* $\varepsilon = 0$;

3) $f = \rho_{u_2}\sin u_1 + \rho_{u_3}\cos u_1\,\mathrm{sech}\,u_2$, $h = \rho_{u_2}\cos u_1 - \rho_{u_3}\sin u_1\,\mathrm{sech}\,u_2$, $g = -r = \rho$, *где* $\rho = \rho(u_2, \ldots, u_n)$ — *решение линейного дифференциального уравнения*

$$\cosh^2 u_2\frac{\partial^2\rho}{\partial u_2^2} + \frac{\partial^2\rho}{\partial u_3^2} + \sinh u_2\cosh u_2\frac{\partial\rho}{\partial u_2} - 2\rho\cosh^2 u_2 = 0,$$

$\mathcal{J}_{\mu\nu}$ *имеют вид* (16) *при* $\varepsilon = 1$;

4) $f = -\rho_{u_2}\sin u_1$, $g = -r = \rho$, $h = -\rho_{u_2}\cos u_1$, *где* $\rho = \rho(u_2, \ldots, u_n)$ *имеет значение* $\rho = \theta u_2^2 + \sigma u_2^{-1}$, $\mathcal{J}_{\mu\nu}$ *имеют вид* (17) *при* $\varepsilon = 0$;

5) $f = -u_2\rho_{u_2}\sin u_1 + u_2\rho_{u_3}\cos u_1$, $g = -r = \rho$, $h = -u_2\rho_{u_2}\cos u_1 - u_1\rho_{u_3}\sin u_1$, *где* $\rho = \rho(u_2, \ldots, u_n)$ — *решение линейного дифференциального уравнения*

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial u_2^2} + \frac{\partial^2\rho}{\partial u_3^2} - 2u_2^{-2}\rho = 0,$$

$\mathcal{J}_{\mu\nu}$ *имеют вид* (17) *при* $\varepsilon = 1$;

6) $f = \rho_{u_2}\sin u_1$, $g = -r = \rho$, $h = \rho_{u_2}\cos u_1$, *где* $\rho = \rho(u_2, \ldots, u_n)$ *имеет значение*

$$\rho = \theta\cosh u_2 + \sigma\left[1 + \cosh u_2 \ln\left|\tanh\frac{u_2}{2}\right|\right],$$

$\mathcal{J}_{\mu\nu}$ *имеют вид* (18) *при* $\varepsilon = 0$;

7) $f = \rho_{u_2}\sin u_1 + \rho_{u_3}\cos u_1 \operatorname{cosech} u_2$, $g = -r = \rho$, $h = \rho_{u_2}\cos u_1 - \rho_{u_3}\sin u_1 \times \operatorname{cosech} u_2$, *где* $\rho = \rho(u_2, \ldots, u_n)$ — *решение линейного дифференциального уравнения*

$$\sinh^2 u_2\frac{\partial^2\rho}{\partial u_2^2} + \frac{\partial^2\rho}{\partial u_3^2} + \sinh u_2\cosh u_2\frac{\partial\rho}{\partial u_2} - 2\rho\sinh^2 u_2 = 0,$$

$\mathcal{J}_{\mu\nu}$ *имеют вид* (18) *при* $\varepsilon = 1$.

В приведенных формулах θ, σ — *произвольные гладкие функции переменных* $u_3, \ldots, u_n$.

Доказательство. Как показано выше, из условия, что операторы P_μ имеют вид (10), следует

$$J_{\alpha\beta} = g^{\alpha\gamma}x_\gamma\partial_{x_\beta} - g^{\beta\gamma}x_\gamma\partial_{x_\alpha} + j^\mu_{\alpha\beta}(u)\partial_{x_\mu} + \mathcal{J}_{\alpha\beta}, \tag{26}$$

где $\alpha, \beta, \mu, \gamma = 0, 1, 2$, а операторы $\mathcal{J}_{\alpha\beta}$ согласно теореме 1 определяются одной из троек (14) – (18).

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что существуют преобразования

$$y_\mu = x_\mu + F_\mu(u), \quad v_i = u_i, \quad \mu = 0, 1, 2, \quad i = 1, \ldots, n,$$

которые сводят операторы $J_{\alpha\beta}$ (26) к операторам

$$\begin{aligned} J_{01} &= y_1\partial_{y_0} + y_0\partial_{y_1} + A\,\partial_{y_0} + B\,\partial_{y_1} + C\partial_{y_2} + \mathcal{J}_{01}, \\ J_{02} &= y_2\partial_{y_0} + y_0\partial_{y_2} + F\,\partial_{y_0} + G\,\partial_{y_1} + \mathcal{J}_{02}, \\ J_{12} &= y_2\partial_{y_1} - y_1\partial_{y_2} + H\,\partial_{y_0} + \mathcal{J}_{12}, \end{aligned} \tag{27}$$

где A, B, C, F, G, H — произвольные гладкие функции переменных $v_1, \ldots, v_n$.

Подстановка операторов $J_{\alpha\beta}$ (27) в коммутационные соотношения (9) приводит к следующей системе дифференциальных уравнений с частными производными:

$$\begin{aligned} &\mathcal{J}_{02}\,C = A, && \mathcal{J}_{01}\,G - \mathcal{J}_{02}\,B = F,\\ &\mathcal{J}_{12}\,C = -B, && \mathcal{J}_{01}\,F - \mathcal{J}_{02}\,A = G - C - H,\\ &\mathcal{J}_{12}\,G = -B, && \mathcal{J}_{12}\,B = C + G - H,\\ &\mathcal{J}_{12}\,A - \mathcal{J}_{01}\,H = F, && C + G + H = 0.\\ &\mathcal{J}_{02}\,H - \mathcal{J}_{12}\,F = A, && \end{aligned} \tag{28}$$

Если операторы $\mathcal{J}_{\alpha\beta}$ имеют вид (14), т. е. являются нулевыми операторами, то система (28) сводится к системе линейных уравнений

$$A = B = F = 0, \quad C + G + H = 0, \quad C - G + H = 0, \quad C + G - H = 0,$$

откуда следует, что $C = G = H = 0$. Пришли к реализации (25) (первый случай).

Если не все операторы $\mathcal{J}_{\alpha\beta}$ нулевые, то они определяются формулами (15) – (18), где $v_i = u_i$, $i = 1, 2, 3$. Пусть операторы $\mathcal{J}_{01}$, $\mathcal{J}_{02}$, $\mathcal{J}_{12}$ имеют вид (15). Тогда общее решение системы (28) составляют функции

$$\begin{gathered} A = -2R\cos v_1 \sin 2v_1, \quad B = 2R\sin 2v_1,\\ C = R\cos 2v_1 - R, \quad G = R\cos 2v_1 + R,\\ F = -2R\,[\sin v_1 \sin 2v_1 + 2\cos v_1 \cos 2v_1], \quad H = -2R\cos 2v_1, \end{gathered} \tag{29}$$

где R — произвольная гладкая функция переменных $v_2, \ldots, v_n$.

Использовав далее замену переменных

$$\begin{gathered} z_0 = y_0 + R\sin 2v_1, \quad z_1 = y_1 - 2R\sin v_1,\\ z_2 = y_2 - 2R\cos v_1, \quad w_i = v_i, \quad i = 1, \ldots, n, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \end{gathered}$$

сводим операторы (27), (29) к операторам вида (25) (первый случай).

Случаи, когда операторы $\mathcal{J}_{01}$, $\mathcal{J}_{02}$, $\mathcal{J}_{12}$ имеют вид (16) – (18), рассматриваются аналогично и приводят соответственно к остальным операторам вида (25).

Теорема доказана.

Из доказанной теоремы, в частности, следует, что алгебра $p(1,2)$ имеет восемь неэквивалентных *ковариантных* реализаций, т. е. реализаций вида

$$P_\mu = \partial_{x_\mu}, \quad J_{\alpha\beta} = g^{\alpha\gamma} x_\gamma \partial_{x_\beta} - g^{\beta\gamma} x_\gamma \partial_{x_\alpha} + \mathcal{J}_{\alpha\beta},$$

где $\mathcal{J}_{\alpha\beta}$ совпадает с одной из троек операторов (14) – (18). К ним мы приходим, полагая в полученных в теореме 2 неэквивалентных реализациях $f = \rho = h = r \equiv \equiv 0$.

2. Рассмотрим один класс реализаций алгебры Пуанкаре $p(2,2)$, а именно, ковариантные реализации этой алгебры.

Здесь пространство V совпадает с пространством $X \otimes U$, где $X = R^{2.2} = = \langle x \rangle = \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$, $U = R^n = \langle u \rangle = \langle u_1, \ldots, u_n \rangle$, и, следовательно, инфинитезимальные операторы имеют вид (2), где $\mu = 1, 2, 3, 4$, $m = n = 2$; $j = 1, \ldots, n$, а группу диффеоморфизмов составляют преобразования вида (4), где $\alpha = 1, 2, 3, 4$; $i = 1, \ldots, n$.

Базис алгебры $p(2,2)$ составляют генераторы P_μ, $J_{\alpha\beta}$, $\mu, \alpha, \beta = 1, 2, 3, 4$; $\alpha < \beta$, которые удовлетворяют коммутационным соотношениям (3) при соответствующих значениях индексов, где

$$g_{\mu\nu} = \begin{cases} 1, & \mu=\nu=1,2; \\ -1, & \mu=\nu=3,4; \\ 0, & \mu\neq\nu, \end{cases} \tag{30}$$

$\mu, \nu, \alpha, \beta = 1, 2, 3, 4$.

Нетрудно убедиться, что $p(2,2) = so(2,2) \Subset t^4$, где $so(2,2) = \langle J_{\mu\nu} \mid \mu, \nu = 1, 2, 3, 4 \rangle$, а $t^4 = \langle P_1, P_2, P_3, P_4 \rangle$.

Согласно изложенному выше, будем рассматривать те реализации алгебры $p(2,2)$, где операторы P_μ имеют вид (5). Тогда из выполнения первой группы коммутационных соотношений (3) следует, что операторы $J_{\mu\nu}$ имеют вид

$$J_{\mu\nu} = g^{\mu\gamma}x_\gamma\partial_{x_\nu} - g^{\nu\gamma}x_\gamma\partial_{x_\mu} + f^{\alpha}_{\mu\nu}(u)\partial_{x_\alpha} + g^{i}_{\mu\nu}(u)\partial_{u_i}, \tag{31}$$

где $f^{\alpha}_{\mu\nu}$, $g^{i}_{\mu\nu}$ — еще неизвестные гладкие функции своих аргументов, $\mu, \nu, \alpha, \gamma = 1, 2, 3, 4$, $i = 1, \ldots, n$, $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ — метрический тензор (30).

Чтобы получить описание реализаций алгебры $p(2,2)$, где операторы $J_{\mu\nu}$ имеют вид (31), нужно, с использованием преобразований (4), которые оставляют вид операторов P_μ (5) инвариантным, получить все неэквивалентные наборы функций $f^{\alpha}_{\mu\nu}$, $g^{i}_{\mu\nu}$, при которых операторы $J_{\mu\nu}$ (31) удовлетворяют второй группе коммутационных соотношений (3). Очевидно, что эта задача значительно упрощается, если известен вид операторов

$$\mathcal{J}_{\mu\nu} = g^{i}_{\mu\nu}(u)\partial_{u_i}, \quad \mu, \nu = 1, 2, 3, 4, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{32}$$

которые удовлетворяют второй группе коммутационных соотношений (3), т. е. образуют базис алгебры $so(2,2)$:

$$[\mathcal{J}_{\alpha\beta}, \mathcal{J}_{\mu\nu}] = g_{\alpha\nu}\mathcal{J}_{\beta\mu} + g_{\beta\mu}\mathcal{J}_{\alpha\nu} - g_{\alpha\mu}\mathcal{J}_{\beta\nu} - g_{\beta\nu}\mathcal{J}_{\alpha\mu}, \tag{33}$$

где $\alpha, \beta, \mu, \nu = 1, 2, 3, 4$, $g_{\mu\nu}$ — метрический тензор (30).

Ограничимся исследованием ковариантных реализаций алгебры $p(2,2)$, т. е. рассмотрим такие реализации алгебры $p(2,2)$, где в операторах $J_{\mu\nu}$ (31) все функции $f^{\alpha}_{\mu\nu}$ тождественно равны нулю.

Итак, пусть

$$J_{\mu\nu} = g^{\mu\gamma}x_\gamma\partial_{x_\nu} - g^{\nu\gamma}x_\gamma\partial_{x_\mu} + g^{i}_{\mu\nu}(u)\partial_{u_i}, \tag{34}$$

где $g^{i}_{\mu\nu}$ — еще неизвестные гладкие функции, $\mu, \nu, \alpha, \gamma = 1, 2, 3, 4$; $i = 1, \ldots, n$, $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ — метрический тензор (30).

Очевидно, что для описания ковариантных реализаций алгебры $p(2,2)$ необходимо знать реализации алгебры $so(2,2)$ в классе операторов (32).

Воспользуемся далее известным фактом, что полупростая алгебра Ли $so(2,2)$ разлагается в прямую сумму двух алгебр $so(1,2)$.

Пусть

$$\begin{aligned} B_1 &= -\frac{1}{2}(\mathcal{J}_{14} + \mathcal{J}_{23}), & C_1 &= \frac{1}{2}(\mathcal{J}_{14} - \mathcal{J}_{23}), \\ B_2 &= \frac{1}{2}(\mathcal{J}_{24} - \mathcal{J}_{13}), & C_2 &= -\frac{1}{2}(\mathcal{J}_{13} + \mathcal{J}_{24}), \\ B_3 &= \frac{1}{2}(\mathcal{J}_{12} - \mathcal{J}_{34}), & C_3 &= \frac{1}{2}(\mathcal{J}_{12} + \mathcal{J}_{34}). \end{aligned} \tag{35}$$

Очевидно, что операторы B_i, C_i, $i=1, 2, 3$, составляют базис алгебры $so(2,2)$ и, согласно (33), удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[B_2, B_1] = B_3, \quad [B_3, B_1] = B_2, \quad [B_2, B_3] = B_1,$$
$$[C_2, C_1] = C_3, \quad [C_3, C_1] = C_2, \quad [C_2, C_3] = C_1, \tag{36}$$
$$[B_i, C_k] = 0, \qquad i, k = 1, 2, 3.$$

Сопоставляя базисным операторам $\mathcal{J}_{\mu\nu}$, $\mu, \nu = 0, 1, 2$, алгебры $so(1,2)$ операторы B_i, C_i по правилу

$$J_{01} \to B_1(C_1), \quad J_{02} \to B_2(C_2), \quad J_{12} \to B_3(C_3),$$

убеждаемся, что операторы B_i и C_i, $i = 1, 2, 3$, образуют базисы двух алгебр Ли $so(1,2)$ и при этом $so(2,2) = so(1,2) \oplus so(1,2)$.

С учетом этого свойства алгебры $so(2,2)$ удобнее рассматривать ее реализации в базисе B_i, C_i, а не в базисе $\mathcal{J}_{\mu\nu}$. Действительно, согласно теореме 1 существуют семь неэквивалентных реализаций алгебры $so(1,2)$ с базисными операторами B_1, B_2, B_3:

$$
\begin{aligned}
1.\quad & B_1 = \sin u_1\, \partial_{u_1}, \quad B_2 = \cos u_1\, \partial_{u_1}, \quad B_3 = \partial_{u_1};\\
2.\quad & B_1 = \sin u_1 \tanh u_2\, \partial_{u_1} - \cos u_1\, \partial_{u_2} + \varepsilon \sin u_1 \operatorname{sech} u_2\, \partial_{u_3},\\
& B_2 = \cos u_1 \tanh u_2\, \partial_{u_1} + \sin u_1\, \partial_{u_2} + \varepsilon \cos u_1 \operatorname{sech} u_2\, \partial_{u_3},\\
& B_3 = \partial_{u_1};\\
3.\quad & B_1 = \sin u_1\, \partial_{u_1} + u_2 \cos u_1\, \partial_{u_2} + \varepsilon u_2 \sin u_1\, \partial_{u_3},\\
& B_2 = \cos u_1\, \partial_{u_1} - u_2 \sin u_1\, \partial_{u_2} + \varepsilon u_2 \cos u_1\, \partial_{u_3},\\
& B_3 = \partial_{u_1};\\
4.\quad & B_1 = \sin u_1 \coth u_2\, \partial_{u_1} - \cos u_1\, \partial_{u_2} + \varepsilon \sin u_1 \operatorname{cosec} u_2\, \partial_{u_3},\\
& B_2 = \cos u_1 \coth u_2\, \partial_{u_1} + \sin u_1\, \partial_{u_2} + \varepsilon \cos u_1 \operatorname{cosec} u_2\, \partial_{u_3},\\
& B_3 = \partial_{u_1}.
\end{aligned}
\tag{37}
$$

В приведенных выше значениях операторов $\varepsilon = 0$ или $\varepsilon = 1$.

Для полного описания неэквивалентных реализаций алгебры $so(2,2)$ нужно получить все тройки линейно независимых операторов C_1, C_2, C_3, которые вместе с операторами (37) удовлетворяют коммутационным соотношениям (36).

Проведя анализ коммутационных соотношений $[B_i, C_k] = 0$, $i, k = 1, 2, 3$, убеждаемся, что соответствующие тройкам B_i, $i = 1, 2, 3$, (37) тройки операторов C_j, $j = 1, 2, 3$, имеют вид:

I. $\quad C_j = \sum\limits_{i=2}^{n} f_{ji}(u_2, \dots, u_n)\partial_{u_i}$ для первой тройки операторов B_j;

II. $\quad C_j = \epsilon u_2 f_{j2}(u_3, \dots, u_n)\partial_{u_2} + \sum\limits_{i=3}^{n} f_{ji}(u_3, \dots, u_n)\partial_{u_i}$, где $\epsilon = 0$ для второй $(\varepsilon = 0)$ и четвертой $(\varepsilon = 0)$ троек операторов B_j, и $\epsilon = 1$ для третьей $(\varepsilon = 0)$ тройки операторов B_j;

III. $C_j = \sum_{k=1}^{3} f_{jk}(u_4,\ldots,u_n)Q_k + \sum_{i=4}^{n} f_{ji}(u_4,\ldots,u_n)\partial_{u_i}$ для второй, третьей и четвертой троек операторов B_j, где $\varepsilon = 1$.
Здесь $j = 1, 2, 3$, f_{ji} — произвольные гладкие функции, а операторы Q_j совпадают с одной из таких троек операторов:

$$\begin{gathered} Q_1 = \operatorname{sech} u_2 \sinh u_3 \partial_{u_1} + \cosh u_3 \partial_{u_2} - \tanh u_2 \sinh u_3 \partial_{u_3}, \\ Q_2 = \partial_{u_3}, \\ Q_3 = \operatorname{sech} u_2 \cosh u_3 \partial_{u_1} + \sinh u_3 \partial_{u_2} - \tanh u_2 \cosh u_3 \partial_{u_3}, \end{gathered} \tag{38}$$

если операторы C_j соответствуют второй $(\varepsilon = 1)$ тройке операторов B_j;

$$\begin{gathered} Q_1 = u_2 \partial_{u_1} - u_2 u_3 \partial_{u_2} + \frac{1}{2}\left(u_2^2 - u_3^2 + 1\right)\partial_{u_3}, \\ Q_2 = u_2 \partial_{u_2} + u_3 \partial_{u_3}, \\ Q_3 = u_2 \partial_{u_1} - u_2 u_3 \partial_{u_2} + \frac{1}{2}\left(u_2^2 - u_3^2 - 1\right)\partial_{u_3}, \end{gathered} \tag{39}$$

если операторы C_j соответствуют третьей $(\varepsilon = 1)$ тройке операторов B_j;

$$\begin{gathered} Q_1 = \operatorname{cosech} u_2 \cos u_3 \partial_{u_1} + \sin u_3 \partial_{u_2} + \coth u_2 \cos u_3 \partial_{u_3}, \\ Q_3 = -\operatorname{cosech} u_2 \sin u_3 \partial_{u_1} + \cos u_3 \partial_{u_2} - \coth u_2 \sin u_3 \partial_{u_3}, \\ Q_3 = \partial_{u_3}, \end{gathered} \tag{40}$$

если операторы C_j соответствуют четвертой $(\varepsilon = 1)$ тройке операторов B_j.

Непосредственными вычислениями убеждаемся, что для всех троек (38) – (40) операторов Q_1, Q_2, Q_3 выполняются соотношения

$$[Q_2, Q_1] = Q_3, \quad [Q_3, Q_1] = Q_2, \quad [Q_2, Q_3] = Q_1, \tag{41}$$

т. е. они составляют базис алгебры Ли $so(1, 2)$.

К первой, второй, где $f_{j2} \equiv 0$, и третьей, где $f_{jk} \equiv 0$, $j, k = 1, 2, 3$, тройкам операторов C_j можно применить теорему 1 (формулы (15) – (18)). В результате получим по четыре набора соответствующих операторов формальной заменой u_i на u_{i+1} для первой, u_i на u_{i+2} для второй и u_i на u_{i+3} для третьей троек операторов C_j. Нетрудно убедиться, что все полученные наборы операторов B_j, C_j, $j = 1, 2, 3$, составляют базис реализаций алгебры $so(2, 2)$. Такие реализации будем называть реализациями алгебры $so(2, 2)$ первого класса.

Пусть далее

$$\begin{gathered} \Lambda(i, \varepsilon) = \sin u_i \tanh u_{i+1}\partial_{u_i} - \cos u_i \partial_{u_{i+1}} + \varepsilon \sin u_i \operatorname{sech} u_{i+1}\partial_{u_{i+2}}, \\ \tilde{\Lambda}(i, \varepsilon) = \cos u_i \tanh u_{i+1}\partial_{u_i} + \sin u_i \partial_{u_{i+1}} + \varepsilon \cos u_i \operatorname{sech} u_{i+1}\partial_{u_{i+2}}, \\ \Gamma(i, \varepsilon) = \sin u_i \partial_{u_i} + u_{i+1}\cos u_i \partial_{u_{i+1}} + \varepsilon u_{i+1}\sin u_i \partial_{u_{i+2}}, \\ \tilde{\Gamma}(i, \varepsilon) = \cos u_i \partial_{u_i} - u_{i+1}\sin u_i \partial_{u_{i+1}} + \varepsilon u_{i+1}\cos u_i \partial_{u_{i+2}}, \\ \Omega(i, \varepsilon) = \sin u_i \coth u_{i+1}\partial_{u_i} - \cos u_i \partial_{u_{i+1}} + \varepsilon \sin u_i \operatorname{cosech} u_{i+1}\partial_{u_{i+2}}, \\ \tilde{\Omega}(i, \varepsilon) = \cos u_i \coth u_{i+1}\partial_{u_i} + \sin u_i \partial_{u_{i+1}} + \varepsilon \cos u_i \operatorname{cosech} u_{i+1}\partial_{u_{i+2}}. \end{gathered} \tag{42}$$

В табл. 1 приведен полный список неэквивалентных реализаций алгебры

$so(2, 2)$ первого класса, при этом использованы обозначения (42), параметры ε_1, ε_2 независимо принимают значения 0 или 1.

Таблица 1

B_1, B_2, B_3	C_1, C_2, C_3
$\sin u_1 \partial_{u_1}, \cos u_1 \partial_{u_1}, \partial_{u_1}$	$\sin u_2 \partial_{u_2}, \cos u_2 \partial_{u_2}, \partial_{u_2}$
$\sin u_1 \partial_{u_1}, \cos u_1 \partial_{u_1}, \partial_{u_1}$	$\Lambda(2, \varepsilon_1), \tilde{\Lambda}(2, \varepsilon_1), \partial_{u_2}$
$\sin u_1 \partial_{u_1}, \cos u_1 \partial_{u_1}, \partial_{u_1}$	$\Gamma(2, \varepsilon_1), \tilde{\Gamma}(2, \varepsilon_1), \partial_{u_2}$
$\sin u_1 \partial_{u_1}, \cos u_1 \partial_{u_1}, \partial_{u_1}$	$\Omega(2, \varepsilon_1), \tilde{\Omega}(2, \varepsilon_1), \partial_{u_2}$
$\Lambda(1, \varepsilon), \tilde{\Lambda}(1, \varepsilon), \partial_{u_1}$	$\Lambda(3+\varepsilon, \varepsilon_1), \tilde{\Lambda}(3+\varepsilon, \varepsilon_1), \partial_{u_{3+\varepsilon}}$
$\Lambda(1, \varepsilon), \tilde{\Lambda}(1, \varepsilon), \partial_{u_1}$	$\Gamma(3+\varepsilon, \varepsilon_1), \tilde{\Gamma}(3+\varepsilon, \varepsilon_1), \partial_{u_{3+\varepsilon}}$
$\Lambda(1, \varepsilon), \tilde{\Lambda}(1, \varepsilon), \partial_{u_1}$	$\Omega(3+\varepsilon, \varepsilon_1), \tilde{\Omega}(3+\varepsilon, \varepsilon_1), \partial_{u_{3+\varepsilon}}$
$\Gamma(1, \varepsilon), \tilde{\Gamma}(1, \varepsilon), \partial_{u_1}$	$\Gamma(3+\varepsilon, \varepsilon_1), \tilde{\Gamma}(3+\varepsilon, \varepsilon_1), \partial_{u_{3+\varepsilon}}$
$\Gamma(1, \varepsilon), \tilde{\Gamma}(1, \varepsilon), \partial_{u_1}$	$\Omega(3+\varepsilon, \varepsilon_1), \tilde{\Omega}(3+\varepsilon, \varepsilon_1), \partial_{u_{3+\varepsilon}}$
$\Omega(1, \varepsilon), \tilde{\Omega}(1, \varepsilon), \partial_{u_1}$	$\Omega(3+\varepsilon, \varepsilon_1), \tilde{\Omega}(3+\varepsilon, \varepsilon_1), \partial_{u_{3+\varepsilon}}$

К реализациям алгебры $so(2, 2)$ второго класса (т. е. к реализациям, которые не являются реализациями первого класса) приводит анализ оставшихся троек операторов C_j.

Если имеет место случай второй $(\varepsilon = 1,\ f_{j2} \not\equiv 0)$ тройки операторов C_j, $j = 1, 2, 3$, то обязательно не все f_{ij}, $j = 1, 2, 3$; $i = 3, \ldots, n$, тождественно равны нулю (если все $f_{ij} \equiv 0$, то $[C_1, C_2] = [C_1, C_3] = [C_2, C_3] = 0$). Следовательно, операторы C_j можно свести к виду

$$C_j = u_2 f_{j2}(u_3, \ldots, u_n)\partial_{u_2} + Z_j,$$

где операторы Z_j, $j = 1, 2, 3$, совпадают с одной из таких троек операторов:

$$\begin{aligned}
&1.\quad Z_1 = \sin u_3 \partial_{u_3}, \quad Z_2 = \cos u_3 \partial_{u_3}, \quad Z_3 = \partial_{u_3};\\
&2.\quad Z_1 = \Lambda(3, \varepsilon), \quad Z_2 = \tilde{\Lambda}(3, \varepsilon), \quad Z_3 = \partial_{u_3};\\
&3.\quad Z_1 = \Gamma(3, \varepsilon), \quad Z_2 = \tilde{\Gamma}(3, \varepsilon), \quad Z_3 = \partial_{u_3};\\
&4.\quad Z_1 = \Omega(3, \varepsilon), \quad Z_2 = \tilde{\Omega}(3, \varepsilon), \quad Z_3 = \partial_{u_3},
\end{aligned} \tag{43}$$

где $\varepsilon = 0$ или $\varepsilon = 1$. Для дальнейшего упрощения вида операторов C_j, наряду с преобразованиями вида (4), используем преобразование эквивалентности

$$X \to \tilde{X} = \mathcal{V} X \mathcal{V}^{-1}, \quad \mathcal{V} = \exp\{F u_2 \partial_{u_2}\}, \tag{44}$$

где F — произвольная гладкая функция переменных $u_3, \ldots, u_n$. Поскольку

$$[B_a, u_2\partial_{u_2}] = 0, \quad a = 1, 2, 3,$$

где $B_1 = \Gamma(1, 0)$, $B_2 = \tilde{\Gamma}(1, 0)$, $B_3 = \partial_{u_1}$, то преобразование (44) оставляет форму операторов B_a неизменной. Используя это преобразование, сводим оператор C_3 к оператору

$$C_3 = Z_3 = \partial_{u_3}.$$

Если Z_j совпадают с первой тройкой операторов (43), то из выполнения коммутационных соотношений (36) следует

$$C_1 = \theta u_2 \cos u_3 \partial_{u_2} + \sin u_3 \partial_{u_3},$$

$$C_2 = -\theta u_2 \sin u_3 \partial_{u_2} + \cos u_3 \partial_{u_3},$$

$$C_1 = \partial_{u_3},$$

где с точностью до преобразований (4) $\theta = \text{const}$ или $\theta = u_4$. Заметим, что $\theta \neq \neq 0$, в противном случае приходим к реализациям первого класса.

Анализ остальных троек (43) операторов Z_j показывает, что к реализациям алгебры $so(2, 2)$ приводят еще случаи второй, третьей и четвертой троек операторов Z_j (43) при $\varepsilon = 0$.

Анализ третьего типа троек C_j, где $f_{jk} \not\equiv 0$, $j, k = 1, 2, 3$, проводится аналогично. Здесь наряду с преобразованиями (4) для упрощения формы операторов C_j используем такие преобразования эквивалентности:

$$X \to \tilde{X} = \mathcal{V} X \mathcal{V}^{-1}, \quad \mathcal{V} = \exp\left\{\sum_{a=1}^{3} F_a Q_a\right\}, \tag{45}$$

где F_a — произвольные гладкие функции переменных $u_4, \ldots, u_n$. Поскольку

$$[B_a, Q_b] = 0, \quad a, b = 1, 2, 3,$$

для соответствующих троек операторов Q_j (38) – (40) и B_j (37), то такие преобразования оставляют форму операторов B_j неизменной.

Если в операторах C_j функции $f_{ij} \equiv 0$, $j = 1, 2, 3$, $i = 4, \ldots, n$, то, используя преобразования (45), оператор C_1 можно свести к одной из трех форм:

$$C_1 = \tilde{r} Q_2, \quad r > 0,$$

$$C_1 = Q_3,$$

$$C_1 = r(Q_2 + Q_3),$$

где $r = r(u_4, \ldots, u_n)$ — произвольная гладкая функция. Проверка коммутационных соотношений (36) с учетом (41) приводит к единственной тройке операторов C_j:

$$C_1 = Q_2, \quad C_2 = \varepsilon Q_1, \quad C_3 = -\varepsilon Q_3, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Аналогично проводится и анализ случая, когда не все f_{ij} тождественно равны нулю.

Все неэквивалентные реализации алгебры $so(2, 2)$ второго класса приведены в табл. 2 ($B_1 = \Gamma(1, 0)$, $B_2 = \tilde{\Gamma}(1, 0)$, $B_3 = \partial_{u_1}$) и табл. 3. В табл. 3 операторам $B_1 = \Lambda(1, 1)$, $B_2 = \tilde{\Lambda}(1, 1)$ соответствуют операторы Q_j вида (38), операторам $B_1 = \Gamma(1, 1)$, $B_2 = \tilde{\Gamma}(1, 1)$ — операторы Q_j вида (39), операторам $B_1 = = \Omega(1, 1)$, $B_2 = \tilde{\Omega}(1, 1)$ — операторы Q_j вида (40); $B_3 = \partial_{u_1}$, ε_1, ε_2 независимо принимают одно из двух значений: 0 или 1.

Таблица 2

$C_j,\ j=1,2,3$	θ
$\theta u_2 \cos u_3 \partial_{u_2} + \sin u_3 \partial_{u_2}$, $-\theta u_2 \sin u_3 \partial_{u_2} + \cos u_3 \partial_{u_2}$, ∂_{u_3}	$\theta \in R,\quad \theta \neq 0$ или $\theta = u_4$
$\theta u_2 \operatorname{sech} u_4 \sin u_3 \partial_{u_2} + \Lambda(3, 0)$, $\theta u_2 \operatorname{sech} u_4 \cos u_3 \partial_{u_2} + \tilde{\Lambda}(3, 0)$, ∂_{u_3}	$\theta \in R,\quad \theta \neq 0$ или $\theta = u_5$
$\theta u_2 u_4 \sin u_3 \partial_{u_2} + \Gamma(3, 0)$, $\theta u_2 u_4 \cos u_3 \partial_{u_2} + \tilde{\Gamma}(3, 0)$, ∂_{u_3}	$\theta \in R,\quad \theta \neq 0$ или $\theta = u_5$
$\theta u_2 \operatorname{cosech} u_4 \sin u_3 \partial_{u_2} + \Omega(3, 0)$, $\theta u_2 \operatorname{cosech} u_4 \cos u_3 \partial_{u_2} + \tilde{\Omega}(3, 0)$, ∂_{u_3}	$\theta \in R,\quad \theta \neq 0$ или $\theta = u_5$

Таблица 3

$C_j,\ j=1,2,3$	ε, θ
$Q_2,\ \ \varepsilon Q_1,\ \ -\varepsilon Q_3$	$\varepsilon = \pm 1$
$\theta \cos u_4 (\varepsilon_1 Q_2 + \varepsilon_2 Q_3) + \sin u_4 \partial_{u_4}$, $-\theta \sin u_4 (\varepsilon_1 Q_2 + \varepsilon_2 Q_3) + \cos u_4 \partial_{u_4}$, ∂_{u_4}	$\theta \in R,\ \theta \neq 0$ или $\theta = u_5$
$\Lambda(4, 0) + \theta \sin u_4 \operatorname{sech} u_5 (\varepsilon_1 Q_2 + \varepsilon_2 Q_3)$, $\tilde{\Lambda}(4, 0) + \theta \cos u_4 \operatorname{sech} u_5 (\varepsilon_1 Q_2 + \varepsilon_2 Q_3)$, ∂_{u_4}	$\theta \in R,\ \theta \neq 0$ или $\theta = u_6$
$\Gamma(4, 0) + \theta u_5 \sin u_4 (\varepsilon_1 Q_2 + \varepsilon_2 Q_3)$, $\tilde{\Gamma}(4, 0) + \theta u_5 \cos u_4 (\varepsilon_1 Q_2 + \varepsilon_2 Q_3)$, ∂_{u_4}	$\theta \in R,\ \theta \neq 0$ или $\theta = u_6$
$\Omega(4, 0) + \theta \sin u_4 \operatorname{cosech} u_5 (\varepsilon_1 Q_2 + \varepsilon_2 Q_3)$, $\tilde{\Omega}(4, 0) + \theta \cos u_4 \operatorname{cosech} u_5 (\varepsilon_1 Q_2 + \varepsilon_2 Q_3)$, ∂_{u_4}	$\theta \in R,\ \theta \neq 0$ или $\theta = u_6$

Возвращаясь к *ковариантным* реализациям алгебры $p(2, 2)$, отметим, что для их описания нужно в операторы (34) подставить, с учетом формул (35), найденные значения операторов (32). Чтобы получить полное описание ковариантных реализаций алгебры $p(2, 2)$, необходимо дополнить уже полученный список наборов B_j, C_j, $j = 1, 2, 3$, в табл. 1 – 3 следующими их реализациями:

$$1. \quad B_1 = \sin u_1 \partial_{u_1}, \quad B_2 = \cos u_1 \partial_{u_1}, \quad B_3 = \partial_{u_1},$$

$$C_j = 0, \quad j = 1, 2, 3;$$

$$2. \quad B_1 = \Lambda(1, \varepsilon), \quad B_2 = \tilde{\Lambda}(1, \varepsilon), \quad B_3 = \partial_{u_1},$$

$$C_j = 0, \quad j = 1, 2, 3; \quad \varepsilon = 0, 1;$$

$$3. \quad B_1 = \Gamma(1, \varepsilon), \quad B_2 = \tilde{\Gamma}(1, \varepsilon), \quad B_3 = \partial_{u_1},$$

$$C_j = 0, \quad j = 1, 2, 3; \quad \varepsilon = 0, 1;$$

$$4. \quad B_1 = \Omega(1, \varepsilon), \quad B_2 = \tilde{\Omega}(1, \varepsilon), \quad B_3 = \partial_{u_1},$$

$$5. \quad B_j = 0, \quad C_j = 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

1. *Кадышевский В. Г.* Квантовая теория поля и импульсное пространство постоянной кривизны // Проблемы теорет. физики. – М.: Наука, 1972. – С. 52–73.
2. *Aghassi J. J., Roman P., Santilli R. M.* Relation of the inhomogeneous de Sitter group to the quantum mechanics of elementary particles // J. Math. Phys. – 1970. – **11**, № 8. – P. 2297–2301.
3. *Мир-Касимов Р. М.* Представления группы де Ситтера и квантовая теория поля в квантованном пространстве–времени // Теоретико-групповые методы в физике: Тр. Междунар. сем. (Звенигород, 1979). – М.: Наука, 1980. – Т. 1. – С. 198–201.
4. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
5 *Фущич В. И., Никитин А. Г.* Симметрия уравнений квантовой механики. – М.: Наука, 1990. – 400 с.
6. *Fushchich W., Shtelen W., Serov N.* Symmetry analysis and exact solutions of equations of nonlinear mathematical physics. – Dordrecht: Kluwer, 1993. – 436 p.
7. *Fushchych W. I., Zhdanov R. Z.* Symmetry and exact solutions of nonlinear Dirac equations. – Kyiv: Math. Ukr. Publ., 1997. – 480 p.
8. *Ivanova T. A., Popov A. D.* Some new integrable equations from the self-dual Yang–Mills equations // Phys. Lett. A. – 1995. – **205**. – P. 158–166.
9. *Rideau G., Winternitz P.* Nonlinear equations invariant under the Poincaré, similitude and conformal groups in two-dimensional space-time // J. Math. Phys. – 1990. – **31**, № 5. – P. 1095–1105.
10. *Фущич В. І., Лагно В. І.* Про нові нелінійні рівняння, інваріантні відносно групи Пуанкаре в двовимірному просторі-часі // Допов. НАН України. – 1996. – № 11. – С. 60–65.
11. *Fushchych W. I., Yegorchenko I. A.* Second-order differential invariants of the rotation group $O(n)$ and of its extensions: $E(n)$, $P(1, n)$, $G(1, n)$ // Acta Appl. Math. – 1992. – **28**. – P. 69–92.
12. *Yegorchenko I. A.* Nonlinear representation of the Poincaré algebra and invariant equations // Symmetry Analysis Equat. Math. Phys. – Kyiv: Inst. Math. NAS Ukraine, 1992. – P. 62–65.
13. *Fushchych W., Zhdanov R., Lahno V.* On linear and nonlinear representations of the generalized Poincaré groups in the class of Lie vector fields // J. Nonlinear Math. Phys. – 1994. – **1**, № 3. – P. 295–308.

Получено 20.04.98