УДК 517.5

Б. С. Кашин (Мат. ин-т РАН, Москва),
Н. П. Корнейчук (Ин-т математики НАН Украины, Киев),
П. Л. Ульянов (Моск. ун-т),
И. А. Шевчук (Нац. ун-т им. Т. Шевченко, Киев),
В. А. Андриенко (Южно-Укр. пед. ун-т, Одесса)

КРАТКИЙ ОБЗОР НАУЧНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ Э. А. СТОРОЖЕНКО

A survey of scientific researches of È. A. Storozhenko, related results of her disciples, and brief information about the seminar on theory of functions directed by her are presented.

Наведено огляд наукових досліджень Е. О. Стороженко та пов'язані з ними результати її учнів, а також стислу характеристику діяльності керованого нею семінару з теорії функцій.

Первый опыт научной работы Э. А. Стороженко относится к решению одной задачи С. Н. Бернштейна о связи наилучших приближений непрерывной функции двух переменных с помощью полиномов и квазиполиномов (полиномов по одной переменной с непрерывными коэффициентами по другой). Для периодических функций $f(x, y)$ С. Н. Бернштейн [1] установил неравенства

$$E_{n,m}f \le \left(\frac{2}{\pi} + \alpha_n\right)(E_{n,\infty}f + E_{\infty,m}f)\ln n,$$

$$E_{n,m}f \le \left(\frac{2}{\pi} + \alpha_m\right)(E_{n,\infty}f + E_{\infty,m}f)\ln m,$$

где $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0$, и поставил вопрос об окончательности этих оценок. В кандидатской диссертации Э. А. Стороженко [2], основываясь на введенном С. Б. Стечкиным понятии „обобщенной" лакунарности, указала классы функций, для которых логарифмический множитель в этих неравенствах отсутствует.

Дальнейшие ее научные интересы непосредственно связаны с циклом лекций профессора Московского университета П. Л. Ульянова, которые он прочитал в Одессе осенью 1963 года: первый цикл — „Решенные и нерешенные проблемы теории тригонометрических и ортогональных рядов", второй — „Суммирование расходящихся рядов". Лекции первого цикла регулярно посещали Э. А. Стороженко и В. А. Андриенко (оба впоследствии стали учениками П. Л. Ульянова и защитили докторские диссертации). П. Л. Ульянов обратил также их внимание на результаты работ венгерских математиков Г. Алексича, К. Тандори, Л. Лейндлера и других о скорости сходимости и суммируемости почти всюду ортогональных рядов. Поясним подробнее постановку задач этой теории.

Важное место в теории ортогональных рядов занимают классические теоремы Меньшова – Радемахера и Меньшова – Качмажа о сходимости и (C, α)-суммируемости почти всюду этих рядов (см., например, [3, с. 85 – 87; 132 – 135]). Смысл этих теорем состоит в следующем: ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k(x)$ по ортонормированной системе $\{\varphi_k\}$ на $[a, b]$ сходится почти всюду на этом промежутке, как только $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \ln^2 n < \infty$, и (C, α)-суммируем $(\alpha > 0)$ почти всюду на $[a, b]$, если $\sum_{n=2}^{\infty} c_n^2 (\ln\ln n)^2 < \infty$. Оба условия окончательны на классе всех ортогональных систем. Пусть всегда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty$. Тогда согласно теореме Рисса – Фишера ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n(x)$ определяет некоторую функцию $f(x) \in L^2_{[a,b]}$ и естественно, что при условии сходимости или суммируемости этого ряда возникает вопрос о скорости сходимости или суммируемости к $f(x)$ почти всюду на $[a, b]$.

Первые результаты в этом направлении принадлежат К. Тандори [4], Г. Алексичу и Д. Кралику [5], Л. Лейндлеру [6], В. А. Андриенко [7]. Не вдаваясь в подробности, заметим, что скорости оценивались в предположении сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2\lambda^2(n)$, когда последовательность $\lambda(n)$ возрастает специальным образом. Некоторые классы последовательностей $\lambda(n)$ определенное время оставались полностью не исследованными. Один такой пробел, когда $\lambda(n) = n$ или „близко" к ней, для скорости суммируемости $(C, 1)$-методом был изучен Э. А. Стороженко. Ею получен следующий результат [8].

Пусть $\sigma_n(x; f)$ — $(C, 1)$-средние ряда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n(x)$. Если $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 n^2 < \infty$, то почти всюду на $[a, b]$

$$f(x) - \sigma_n(x; f) = o_x\left(\frac{\ln\ln n}{n}\right)$$

и

$$f(x) - \sigma_n(x; f) = o_x\left(\frac{\ln\ln n}{n\mu(n)}\right),$$

если $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 n^2 \mu^2(n) < \infty$, а положительная строго монотонная последовательность $\mu(n)$ такова, что $\nu(n) = \mu^{-1}(n)\ln\ln(n+3)$ возрастает, вогнута и $\Delta\nu(n) = O\left(\frac{1}{n}\right)$. Обе оценки окончательны на классе всех ортогональных систем.

Кроме того, Э. А. Стороженко [9] усилила и дополнила оценки Л. Лейндлера о скорости приближения средними Валле Пуссена ортогональных рядов.

Затем она видоизменила привычную постановку задачи и исследовала скорость приближения почти всюду в зависимости от величины этого приближения или наилучшего приближения в L^2-метрике. Для $(C, 1)$-метода суммирования ее результаты таковы:

$$f(x) - \sigma_n(x; f) = o_x\left(\sqrt{\nu(n)}\, \|f(x) - \sigma_n(x; f)\|_{L^2}\right)$$

и

$$f(x) - \sigma_n(x; f) = o_x\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\nu(k)}{k+1} E_k^2(f)_{L^2}\right),$$

где $\nu(n) > 0$, $\nu(n) \uparrow \infty$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\nu(n)} < \infty$. Эти и более общие оценки, где метод суммирования определяется некоторой треугольной матрицей, можно найти в работах [10, 11]. Дальнейшие исследования по этой тематике продолжил ученик Э. А. Стороженко В. И. Коляда [12]. Опираясь на свой метод исследования, он получил завершающие результаты для одномерных рядов, которые позже В. А. Андриенко обобщил для функций многих переменных.

Конец 60-х годов можно считать началом активной научной деятельности Э. А. Стороженко. Первые успехи ее и ее учеников естественным образом привели к организации научного семинара, который не только стимулировал научную работу его участников, но и послужил точкой конденсации для способных студентов. Одни из первых участников семинара — В. А. Андриенко, В. И. Коляда, В. Г. Кротов, П. Освальд (студент из ГДР) — впоследствии стали докторами наук.

В конце 60-х и начале 70-х годов появились статьи П. Л. Ульянова [13 – 16] по теории вложения, которые новизной постановки задач привлекли внимание многих математиков как в нашей стране, так и за рубежом. Один из аспектов теорем вложения функций одной переменной состоял в том, чтобы найти необходимое и достаточное условие на модуль непрерывности $\omega(\delta)$, при котором

$$H_p^{\omega} = \left\{ f \in L^p : \omega(\delta; f)_p \le C\omega(\delta) \right\} \subset L^q, \quad 1 \le p < q \le \infty,$$

или

$$H_p^{\omega} \subset H_q^{\omega_1},$$

где ω_1 — заданный модуль непрерывности.

Метод доказательств П. Л. Ульянова основывался на применении равноизмеримой невозрастающей перестановки f^* функции $|f|$. Поэтому в завершающей части его рассуждений надо было от $\omega(\delta; f^*)_p$ перейти к $\omega(\delta; f)_p$. В этой связи П. Л. Ульянов в 1968 г. (см. [15]) сформулировал вопрос:

верно ли для всех функций $f \in L^p_{[0,1]}$, $1 \le p < \infty$, неравенство

$$\omega(\delta; f)_p \ge C(p)\omega(\delta; f^*)_p, \quad 0 < \delta \le \delta_0 < 1,$$

и если оно справедливо, то каково наибольшее значение для $C(p) > 0$?

Сам П. Л. Ульянов [16] доказал, что

$$\omega(\delta; f)_1 \ge \frac{1}{9}\omega(\delta; f^*)_1, \quad 0 \le \delta < 1.$$

За решение этой задачи взялся, еще будучи студентом, П. Освальд. Он дал положительный ответ на вопрос П. Л. Ульянова для всех значений параметра $p \in (0; +\infty)$:

$$\omega(\delta; f)_p \ge \frac{1}{2}\omega(\delta; f^*)_p, \quad 1 \le p < \infty,$$

и

$$\omega(\delta; f)_p \ge \left(\frac{1-\delta}{2}\right)^{1/p}\omega(\delta; f^*)_p, \quad 0 < p < 1.$$

Оценки П. Освальда вытекали из более общего неравенства, полученного им для произвольной измеримой и конечной почти всюду на $[0; 1]$ функции f:

$$\iint\limits_{\substack{|x-y|\le\delta \\ x,y\in[0;1]}} \varphi(f(x)-f(y))\,dx\,dy \ge \iint\limits_{\substack{|x-y|\le\delta \\ x,y\in[0;1]}} \varphi\left(f^*(x)-f^*(y)\right)dx\,dy,$$

где $\varphi(t)$, $t \in (-\infty; +\infty)$, — четная неотрицательная, конечная и неубывающая на $[0; +\infty)$ функция. Последнее неравенство устанавливает некоторое экстремальное свойство перестановки f^* и имеет самостоятельное значение. (Статья П. Освальда [17], отправленная в журнал „Математические заметки" еще в июне 1973 г., была опубликована в 1975 г., а в 1974 г. за рубежом появились работы И. Вика [18], А. М. Гарсиа и Е. Родемича [19], посвященные аналогичным вопросам. Указанные результаты примыкают к работе Н. П. Корнейчука [20], где выводится неравенство для периодических L^1-модулей непрерывности и ее симметрической перестановки с неулучшаемой константой.)

Результаты П. Освальда позволили Э. А. Стороженко решить еще одну задачу П. Л. Ульянова, сформулированную им в докладе на Международном математическом конгрессе 1970 г. в Ницце [21]: найти необходимое и достаточное условие на модуль $\omega(\delta)$, чтобы имело место вложение

$$H_1^{\omega} \subset e^L = \left\{ f \in L: \int_0^1 e^{|f|}\, dx < \infty \right\}.$$

(Здесь $H_1^{\omega} = \{ f \in L:\ \omega(\delta; f)_1 \le \omega(\delta) \}$.) Полученное ею условие имеет вид [22]

$$H_1^{\omega} \subset e^L \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} \int_0^x \omega(2u)\, du \in e^L,$$

где ω — выпуклый модуль. Для произвольного модуля непрерывности задача не решена до настоящего времени. (Близкие результаты, но опубликованные позднее, получены Ю. А. Брудным [23].) Вложение в класс e^L сопряженных периодических функций из L_p, $p \ge 1$, рассмотрено в статье [24].

Из многочисленных результатов Э. А. Стороженко по теории вложения отметим оценки равноизмеримых перестановок [25, 26]:

$$f^*(x) \le 2\|f\|_1 + 2 \int_x^{1/2} \omega(u; f)_p u^{-(1+1/p)}\, du, \quad 1 < p < \infty,$$

$$f^{*p}(x) \le 2\|f\|_p^p + \frac{2}{x} \omega^p(x; f)_p, \quad 0 < p \le 1,$$

$$\omega^p(\delta; f)_p \le \int_0^{\delta} f^{*p}(x)\, dx, \quad 1 \le p < \infty, \quad 0 < \delta < \frac{1}{2},$$

$$\omega^p(\delta; f)_p \le \frac{1}{4} \int_0^{\delta} f^{*p}(x)\, dx + 2\delta^p \int_{\delta}^{1/2} \left(\frac{1}{x} f^*(x) \right)^p dx, \quad 0 < p < 1.$$

С помощью последних двух неравенств удалось обнаружить, что для монотонных функций некоторые теоремы вложения допускают обращение. Э. А. Стороженко впервые ставит задачу о вложении классов H_p^{ω} при $0 < p < 1$, что оказало существенное влияние на последующие интересы ее и ее учеников (см. еще статьи о вложениях [27, 28]).

Обратим внимание на результаты В. И. Коляды, полученные при решении проблемы теории вложения функций многих переменных из класса $H_p^{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k}$, где $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$ — частные модули непрерывности. С помощью частных модулей непрерывности не удавалось получить необходимое и достаточное условие вложения $H_p^{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k} \subset L^q$, $1 \le p < q$. Нужна была другая структурная характеристика функции f, которую и ввел В. И. Коляда. Он рассмотрел новую функцию $\Omega(\delta)$, однозначно конструируемую по модулям $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$ путем специального усреднения (впоследствии функция $\Omega(\delta)$ получила название модуля Коляды). С его помощью В. И. Коляда [29] доказал многомерный аналог теоремы П. Л. Ульянова о вложении

$$H_p^{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k} \subset L^q$$

(небольшой обзор по теоремам вложения см. в [30]). Исследования П. Освальда и В. И. Коляды не остались незамеченными математической общественностью. Научный семинар по теории функций в Одессе расширялся и набирал силу.

В теории вложения несуммируемых функций, кроме указанного выше, есть и другие направления. В одном из них вместо модуля непрерывности $\omega(\delta; f)_p$ и модулей высших порядков $\omega_k(\delta; f)_p$ рассматривается иная структурная характеристика функции — $\{E_n(f)_p\}$ — последовательность наилучших приближений функции f полиномами в L^p-метрике. В таких задачах важно установить соотношения между $E_n(f)_p$ и $\omega(\delta; f)_p$, $p \le q$, и здесь на первый план выступают аналоги теорем Джексона для $f \in L^p$, $0 < p < 1$. Таким образом именно из теорем вложения у участников семинара возник интерес к распространению классических результатов Джексона на несуммируемые функции. В 1975 г. появилась работа Э. А. Стороженко, В. Г. Кротова и П. Освальда [31], в которой прямая и обратная теоремы типа Джексона доказаны с первым модулем $\omega(\delta; f)_p$, $0<p<1$ (аналогичный результат опубликован В. И. Ивановым [32] в том же номере журнала, что и упомянутая статья). Идея доказательства теоремы состояла во введении промежуточного приближения суммируемой функции, скорость которого оценивалась с помощью неравенства Уитни [33]

$$E_k(f) \le C_k \omega_{k+1}\left(\frac{b-a}{k+1}; f\right),$$

напоминающего по внешнему виду оценку Джексона наилучших приближений непрерывных функций алгебраическими многочленами на промежутке $[a, b]$. Однако результат Джексона более тонкий; оценка зависит от двух параметров n и k, и при $n \to \infty$ правая и левая части неравенства стремятся к нулю.

Теорему Уитни Ю. А. Брудный [34] обобщил на пространства L^p; $p \ge 1$; Э. А. Стороженко [35] распространила ее на пространства L^p, $p \in (0; 1)$, для функций многих переменных, а также нашла новое доказательство теоремы в L^p, $p \ge 1$, с дополнительными свойствами приближающего „интерполяционного в среднем" полинома [36]. Достаточно длинное и технически сложное доказательство Э. А. Стороженко теоремы Уитни при $p \in (0; 1)$ основывалось на индукции и не давало — даже в простейшем случае ступенчатой функции — эффективного способа построения приближающего многочлена.

Отметим, что теорема Уитни обобщалась и в других направлениях: на случай дуг в комплексной плоскости в L^p-метрике, на нахождение минимальных констант C_1 в равномерной метрике. Этот круг вопросов успешно изучал Ю. В. Крякин — тоже ученик Э. А. Стороженко (см., например, [37, 38]).

При доказательстве аналога теоремы Джексона в L^p-метрике, $0 < p < 1$, серьезным препятствием оказалась не только несуммируемость функции f, но и проблема возведения в степень p интеграла. Понадобились значительные усилия, чтобы преодолеть эту сложность (см. [39, 40]). Позже К. В. Руновский [41] нашел более простое доказательство без применения теоремы Уитни, однако и оно не давало конструктивного способа построения приближающего полинома. Теорема Джексона о приближении алгебраическими полиномами в $L^p[a, b]$, $0<p<1$, рассмотрена в работе [42].

Хорошо известно, что из оценки Джексона в L^p, $p \ge 1$, с $\omega_k(\delta; f)$, $k > 0$, легко вытекает неравенство с модулем непрерывности производной функции. Вот такого аналога в L^p при $0<p<1$, оказывается, быть не может (вывод принадлежит В. И. Иванову [43]). Объяснение следует из „непривычного" поведения модуля непрерывности. Так, модуль $\omega_1(\delta; f)_p$ при $\delta \to 0$ стремится к нулю не быстрее $\delta^{1/p}$, и эта максимальная скорость убывания достигается у ступенчатой функции. В итоге у „лучших" функций модуль непрерывности убывает медленнее, чем у „худших".

С сентября 1975 г. Э. А. Стороженко была прикомандирована к Московскому университету для выполнения докторской диссертации. По совету научного консультанта П. Л. Ульянова она исследует классы Харди H^p, $0<p<1$, в надежде преодолеть недостатки доказательств теоремы типа Джексона. Ей это удалось, благодаря аналитическому „происхождению" функций классов H^p, если под функциями этих классов понимать предельные угловые значения аналитических внутри единичного круга функций $f(z)$, для которых

$$\sup_{0<r<1} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(re^{i\varphi}) \right|^p d\varphi < \infty.$$

Тогда $H^p \subset L^p_{[0;2\pi]}$. Рассматривались они еще в начале века, однако результатов по теории приближения в H^p, $p \in (0;1)$ было не много: установлена суммируемость ряда $f(z) = \sum a_k z^k$, $|z|<1$, на единичной окружности методами Абеля – Пуассона (Ф. Рисс [44]) и Чезаро (C, α), $\alpha > \frac{1}{p} - 1$ (Харди и Литтлвуд [45]). Потом появились работы А. Зигмунда [46] и Г. Сунуочи [47], в которых исследовался случай критического показателя $\alpha = \frac{1}{p} - 1$. Длительное отсутствие результатов по приближению в H^p связано, видимо, с тем, что задача оказалась трудной (так ее характеризовали Г. Ц. Тумаркин и С. Я. Хавинсон в сб. „Математика в СССР за 40 лет").

Э. А. Стороженко продолжила исследования Харди, Литтлвуда и Рисса и получила окончательные оценки скорости приближения средними Абеля – Пуассона и Чезаро (C, α), $-1 < \alpha > \frac{1}{p} - 1$ [48 – 50]:

$$\left\| f(re^{i\varphi}) - f(e^{i\varphi}) \right\|_p \le C^{1/p} \omega(1-r; f)_p, \quad \frac{1}{2} \le r < 1,$$

$$\left\| f - \sigma_n^\alpha \right\|_p \le C_{\alpha,p} \omega\left(\frac{1}{n}; f\right)_p \begin{cases} 1, & \alpha > \frac{1}{p} - 1; \\ (\ln(n+2))^{1/p}, & \alpha = \frac{1}{p} - 1; \\ n^{1/p-(\alpha+1)}, & -1 < \alpha < \frac{1}{p} - 1, \end{cases}$$

$$n \ge n_0(\alpha, p).$$

Эти оценки окончательны: для любых α и p $(0<p<1$ и $-1<\alpha<\frac{1}{p}-1)$ существуют $f_1(z)$ и $f_2(z)$, для которых соответствующие неравенства имеют противоположный смысл.

Такое продвижение в оценках удалось Э. А. Стороженко, благодаря найденным ею удобным интегральным представлениям средних Абеля – Пуассона и Чезаро (C, α) и применению аналога формулы Гельдера при $0<p<1$ (идея его доказательства заимствована из теорем вложения, а подобного неравенства в L^p, $0<p<1$, нет). Линейные комбинации (C, α)-средних использовались затем при доказательстве теоремы типа Джексона в H^p, $0<p<1$, с $\omega_k(\delta; f)_p$ и тем самым было получено эффективное построение приближающего полинома. Аналитическая природа функции $f \in H^p$ помогла установить неравенство

$$\omega_{k+l}(\delta; f)_p \le C_{p,l}\delta^l \omega_k(\delta; f^{(l)})_p, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad 0 < \delta < \delta_0(p, l),$$

если $f^{(l)} \in H^p$, и доказать справедливость еще одной теоремы Джексона [51].

Упомянем и другие преимущества оценок в H^p по сравнению с $L^p_{[0;2\pi]}$ на примере разности $f(re^{i\varphi}) - f(e^{i\varphi})$, $0 < r < 1$:

$$\left\| f(re^{i\varphi}) - f(e^{i\varphi}) \right\|_p \le C_p \omega(1-r; f)_p, \quad f \in H^p, \quad 0 < p \le \infty,$$

и

$$\left\| f(re^{i\varphi}) - f(e^{i\varphi}) \right\|_p \le C\omega(1-r; f)_p \begin{cases} 1, & 1 < p < \infty, \\ \ln\dfrac{1}{1-r}, & p = 1; +\infty, \end{cases} \quad f \in L^p_{[0;2\pi]},$$

т. е. оценки скорости приближения в H^p, $0 < p \le 1$, совпадают с оценками в пространствах L^p, $1 < p < +\infty$. К аналогичному выводу пришел А. А. Соляник [52] (ученик Э. А. Стороженко) в случае интегральных модулей непрерывности k-го порядка в H^p при $0 < p \le 1$: они (в отличие от L^p, $0 < p < 1$) допускают такое же описание, как и в пространствах L^p, $1 \le p < +\infty$.

Отмеченные особенности позволяют говорить о классах H^p, как о „хорошей замене" L^p в вопросах теории приближений при значениях p между 0 и 1.

Еще один важный результат Э. А. Стороженко связан с найденным ею удачным определением модуля k-го порядка при $f \in H^p$. Обычно модули k-го порядка для функций из пространств Харди определялись по аналогии с действительными функциями на основе k-й разделенной разности:

$$\omega_k(\delta; f)_p = \sup_{|t| \le \delta} \left\| \sum_{m=0}^{k} (-1)^{k-m} \binom{k}{m} f\left(e^{i(\varphi + mt)}\right) \right\|_p, \quad k \in N.$$

Но в решении одной из проблем более целесообразными оказались модули Э. А. Стороженко

$$\omega_k^*(\delta; f)_p =$$

$$= \sup_{|h| \le \delta} \left\| \sum_{m=0}^{k} (-1)^{k-m} e^{-(m(m-1)/2 - m(k-m))t} \frac{(1-h^{m+1})\ldots(1-h^k)}{(1-h)\ldots(1-h^{k-m})} f\left(e^{i(\varphi+mt)}\right) \right\|_p,$$

построенные с помощью разделенных разностей для точек, лежащих на единичной окружности и образующих геометрическую прогрессию. Привычные свойства модулей полностью сохраняются для ω_k^* и, кроме того, для любого полинома $T_{k-1}(e^{i\varphi}) = \sum_{m=0}^{k-1} a_m e^{im\varphi}$ имеем

$$\omega_k^*(\delta; f + T_{k-1})_p = \omega_k^*(\delta; f)_p.$$

Упомянутая проблема состоит в оценке роста $\left\| f^{(k)}(re^{i\varphi}) \right\|_p$ при $r \to 1$ в зависимости от гладкости функции f на границе, определяемой k-м модулем. Первые результаты в этом направлении получили Харди и Литтлвуд [53] для $f \in \in \mathrm{Lip}\,(\alpha; p)$, $p > 0$, $0 < \alpha \le 1$, более полные при $p \ge 1$ принадлежат Ю. А. Брудному и И. Е. Гопенгаузу [54]:

$$\left\| f'(re^{i\varphi}) \right\|_p \leq C(1-r)^{-1}\omega(1-r; f)_p, \quad 0 \leq r < 1.$$

Для производных и модулей непрерывности более высоких порядков оценок не было. Модуль $\omega_k^*(\delta; f)_p$ позволил Э. А. Стороженко полностью решить эту проблему [55]:

$$\left\| f^{(k)}(re^{i\varphi}) \right\|_p \leq C_{p,k,r_0}(1-r)^{-k}\omega_k^*(1-r; f)_p, \quad 0 < p \leq \infty, \quad 0 < r_0 < r < 1.$$

Противоположное неравенство для произвольных k и всех $0 < p < \infty$ доказал Я. Валашек [56], а Ю. В. Крякин распространил обе оценки на дробные производные. Кроме того, в случае дробных производных им доказано неравенство типа Бернштейна для полиномов (см., например, [57]).

Тематика H^p-пространств развивалась и в дальнейших работах Э. А. Стороженко: это локальные оценки приближения [58]; построение приближающего многочлена с ядром, не зависящим от p [59]; распространение результатов о гладкости граничной функции и росте производных на многомерные пространства Харди [60]. Специфика многомерности привела к появлению различных модулей непрерывности и специальных производных (например, радиальных производных, производных $D_w f(z)$ в направлениях, ортогональных Oz).

Естественно, что тематика кандидатских диссертаций учеников Э. А. Стороженко 80-х годов связана с аналитическими функциями в тех или иных областях. Так, Я. Валашек [61] рассматривал вопросы приближения в поликруге, А. А. Соляник [62] исследовал скорость приближения функций из H^p в верхней полуплоскости различными средними интегралов Фурье. В работе Дин-Тьен-Шона [63] определяются касательные области подхода к границе, по которым функция из H^p_ω имеет предельные значения почти всюду. Г. М. Вартанян [64] определил скорость стремления $f(re^{i\varphi})$ к граничному значению $f(e^{i\varphi})$ в классах Харди – Орлича (в частности, и в классах Неванлинны).

К проблематике H^p-пространств присоединился и ученик В. А. Андриенко В. Г. Кротов, исследования которого дифференциальных свойств граничных функций классов H^p, $0 < p < 1$, одной и многих переменных (см. обзоры [67 – 69]) составили одну из глав его докторской диссертации.

В последнее время Э. А. Стороженко проявила интерес к оценкам полиномов $P_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ по „норме" класса H^0:

$$\| P_n \|_0 = \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln\left| P_n(e^{it}) \right| dt \right).$$

Оценки в этом классе являются в определенном смысле „экстремальными" и по ним можно судить об окончательности соответствующих оценок в H^p при $0 < < p < 1$

Так, В. В. Арестов [70] с помощью неравенства К. Малера [71]

$$\| P_n' \|_0 \leq n \| P_n \|_0$$

пришел к выводу о справедливости оценки $\| P_n' \|_p \leq n \| P_n \|_p$ во всех H^p. Применявшиеся ранее методы доказательств приводили к появлению в правой части этого неравенства множителя $C_p \to +\infty$ при $p \to 0$.

Э. А. Стороженко [72] установила противоположное неравенство

$$\| P_n \|_p \leq A_n n^{-1} \| P_n' \|_p, \quad 0 \leq p \leq \infty,$$

для $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ с $\acute{A}_n = \prod_{\pi/6 < k < 5\pi/6} 2\sin(\pi/k) \approx (1{,}4)^n$. Знак равенства в нем достигается при $p = 0$ на полиномах $P_n(z) = C(e^{i\alpha} + z)^n - Ce^{in\alpha}$, $\alpha \in R$. Другие результаты по этой тематике можно найти в статьях [65, 66].

Этот обзор дает представление об основных направлениях исследований Э. А. Стороженко. Ее научная деятельность неразрывно связана с руководством семинаром, который к началу 90-х годов достиг значительных успехов, в результате чего при Одесском университете сложилась авторитетная школа по теории функций. Участники семинара защитили 6 докторских и 16 кандидатских диссертаций.

1. *Бернштейн С. Н.* О наилучшем приближении функций нескольких переменных посредством многочленов или тригонометрических сумм // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1951. – **38**. – С. 24–29.
2. *Стороженко Э. А.* О наилучшем приближении функций нескольких переменных: Дис. … канд. физ.-мат. наук. – Одесса, 1960. – 54 с.
3. *Алексич Г.* Проблемы сходимости ортогональных рядов. – М.: Изд-во иностр. лит., 1963. – 360 с.
4. *Tandori K.* Über die orthogonalen Funktionen. VII // Acta Sci. Math. Szeged. – 1959. – **20**, № 1. – S. 19–24.
5. *Alexits G., Kralik D.* Über Approximationen mit den arithmetischen Mitteln allgemeiner Orthogonalreihen. // Acta math. Acad. sci hung. – 1960. – **11**. – S. 387–399.
6. *Leindler L.* Über die Rieszschen Mittel allgemeiner Orthogonalreihen // Acta Sci. Math. Szeged. – 1963. – **24**, № 1–2. – S. 129–139.
7. *Андриенко В. А.* О быстроте сходимости ортогональных рядов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. мат., мех. – 1967. – № 1. – С. 17–24.
8. *Стороженко Э. А.* К вопросу о приближении суммами Фейера // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1969. – **33**, № 1. – С. 39–51.
9. *Стороженко Э. А.* О скорости приближения функций средними Валле – Пуссена их ортогональных разложений // Мат. заметки. – 1967. – **2**, № 2 – С. 175–186.
10. *Стороженко Э. А., Шмандин Ю. М.* О скорости приближения $(C, 1)$-средними ортогональных рядов // Укр. мат. журн. – 1970. – **22**., № 2. – С. 244–275.
11. *Стороженко Э. А.* О приближении линейными методами суммирования ортогональных рядов // Мат. заметки. – 1968. – **3**, № 3. – С. 345–356.
12. *Коляда В. И.* О скорости сходимости ортогональных рядов // Укр. мат. журн. – 1973. – **25**, № 1. – С. 25–38.
13. *Ульянов П. Л.* Об абсолютной и равномерной сходимости рядов Фурье // Мат. сб. – 1967. – **72**, № 22. – С. 195–225.
14. *Ульянов П. Л.* О вложении некоторых классов функций // Мат. заметки. – 1967. – **1**, № 4. – С. 405–414.
15. *Ульянов П. Л.* Вложение некоторых классов функций H_p^ω // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1968. – **32**, № 3. – С. 649–686.
16. *Ульянов П. Л.* Теоремы вложения и соотношения между наилучшими приближениями (модулями непрерывности) в различных метриках // Мат. сб. – 1970. – **81**, № 1. – С. 104–131.
17. *Освальд П.* О модулях непрерывности равноизмеримых функций в классах $\varphi(L)$ // Мат. заметки. – 1975. – **17**, № 2. – С. 231–244.
18. *Wik I.* The non increasing rearrangement as extremal function. – Preprint. Univ. Umea, Dep. Math. – 1974. – № 2.
19. *Garsia A., Rodemich E.* Monotonicity of certain functionals under rearrangement // Ann. Inst. Fourier. – 1974. – **24**, № 2. – P. 67–116.
20. *Корнійчук М. П.* Про співвідношення між модулями неперервності функцій та їх переставлень // Допов. АН УРСР. – 1973. – № 9. – С. 794–796.
21. *Ulianov P.* Allgemeine Entwicklungen und gemischte fragen // Actes Congr. intern. Math. – 1970. – № 2. – P. 667–668.
22. *Стороженко Э. А.* О некоторых теоремах вложения // Мат.заметки. – 1976. – **19**, № 2. – С. 187–200.
23. *Брудный Ю. А.* Замечания к одной теореме вложения // Исслед. по теории функций многих вещественных переменных. – 1976. – С. 10–13.
24. *Стороженко Э. А.* О вложении в класс e^L // Мат. заметки. – 1971. – **10**, № 1. – С. 17–24.
25. *Стороженко Э. А.* Необходимые и достаточные условия для вложения некоторых классов функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1973. – **37**. – С. 386–398.

26. *Стороженко Э. А.* Теоремы вложения и наилучшие приближения // Мат. сб. – 1975. – **97**, № 2. – С. 230–241.
27. *Стороженко Э. А.* О теоремах вложения для производных некоторого класса функций // Мат. заметки. – 1978. – **24**, № 1. – С. 85–94.
28. *Стороженко Э. А.* К вопросу о вложении некоторых классов функций // Укр. мат. журн. – 1978. – **30**, № 3. – С. 334–345.
29. *Коляда В. И.* О вложении некоторых классов функций многих переменных // Сиб. мат. журн. – 1973. – **14**, № 4. – С. 766–790.
30. *Стороженко Э. А., Коляда В. И., Потапов М. К.* О теоремах вложения // Тр. 4-й Саратов. зимн. школы. – 1990. – С. 12–21.
31. *Стороженко Э. А., Кротов В. Г., Освальд П.* Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах L^p, $0<p<1$ // Мат. сб. – 1975. – **98**, № 3. – С. 395–415.
32. *Иванов В. И.* Прямые и обратные теоремы теории приближений в метрике L^p для $0<p<1$ // Мат. заметки – 1975. – № 18. – С. 641–658.
33. *Whitney H.* On functions with bounded n-th differences // J. Math.Pures Appl. – 1957. – № 36. – P. 67–95.
34. *Брудный Ю. А.* Об одной теореме локальных наилучших приближений // Уч. зап. Казан. ун-та. – 1964. – **124**, № 6. – С. 43–49.
35. *Стороженко Э. А., Освальд П.* Теорема Джексона в пространстве $L^p(R^k)$, $0<p<1$ // Сиб. мат. журн. – 1978. – **19**, № 4. – С. 888–901.
36. *Стороженко Э. А.* Приближение функций интерполяционными в среднем сплайнами // Изв. вузов. Математика. – 1976. – № 12. – С. 82–95.
37. *Крякин Ю. В.* О точных константах в теореме Уитни // Мат. заметки. – 1993. – **54**, № 1. – С. 34–51.
38. *Стороженко Э. А., Крякин Ю. В.* О теоремах Уитни в L^p-метрике, $0<p<\infty$ // Мат. сб. – 1995. – **186**, № 3. – С. 131–142.
39. *Стороженко Э. А., Освальд П.* Теорема Джексона в пространствах $L^p(R^k)$, $0<p<1$ // Докл. АН СССР. – 1976. – **229**, № 3. – С. 554–557.
40. *Стороженко Э. А., Освальд П.* Модули гладкости и наилучшие приближения в пространстве L^p, $0<p<1$ // Anal. Math. – 1977. – **3**, № 2. – P. 141–150.
41. *Руновский К. В.* О приближении семействами линейных полиномиальных операторов в пространствах L^p, $0<p<1$ // Мат. сб. – 1994. – 185, № **8**. – С. 81–102.
42. *Стороженко Э. А.* Приближение алгебраическими многочленами функций класса L^p, $0<p<1$ // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1977. – **41**, № 3. – С. 651–662.
43. *Иванов В. И.* Некоторые неравенства для тригонометрических полиномов и их производных в разных метриках // Мат. заметки. – 1975. – **18**. – С. 489–498.
44. *Riesz F.* Über die Randwerte einer analutischen Function // Math. Z. – 1923. – **18**. – S. 87–95.
45. *Hardy G., Littlwood J.* Theorems concerning Cesaro means of power series // Proc. London Math. Soc. – 1934. – **36**. – P. 516–531.
46. *Zygmund A.* On the convergence and summability of power series on the circle of convergence. II // Ibid. – 1942. – **47**. – P. 326–350.
47. *Sunouchi.* Theorems on power series of the class H^p // Tohoku Math. J. – 1956. – **8**. – P. 125–146.
48. *Стороженко Э. А.* О приближении функций класса H^p, $0<p<1$ // Сообщ. АН ГССР. – 1977. – **88**, № 1. – С. 45–48.
49. *Стороженко Э. А.* О скорости приближения функций классов H^p, $0<p<1$ // Докл. АН АрмССР. – 1978. – **66**, № 3. – С. 145–149.
50. *Стороженко Э. А.* Приближение функций классов H^p, $0<p<1$ // Мат. сб. – 1978. – **105**, № 4. – С. 601–621.
51. *Стороженко Э. А.* О теоремах типа Джексона в H^p, $0<p<1$ // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1980.– **44**, № 4. – С. 946–962.
52. *Соляник А. А.* О свойствах H^p-модулей непрерывности и приближении функций из $H^p(R)$, $0<p<1$ // Теория функций и ее прил. – 1986.– С. 49–52.
53. *Hardy G. H., Littlwood J. E.* Some properties of fractionale integrals, II // Math. Z. – 1932. – **34**. – S. 403–439.
54. *Брудный Ю. А., Гопенгауз И. Е.* Обобщение одной теоремы Харди – Литтлвуда // Мат. сб. – 1960. –52, № 3. – С. 891–894.
55. *Стороженко Э. А.* Об одной задаче Харди – Литтлвуда // Там же. – 1982. – **119**, № 4. – С. 564–584.
56. *Стороженко Э. А., Валашек Я.* Обобщение одной теоремы Харди – Литтлвуда // Конструктивная теория функций. – 1983.– С. 164–167.

57. *Крякин Ю. В.* Приближение функций на единичной окружности в пространствах L^p и H^p: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Одесса, 1985. – 133 с.
58. *Стороженко Э. А.* О локальном приближении в пространствах Харди средними Абеля – Пуассона // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1987. – **180**. – С. 243–245.
59. *Стороженко Э. А.* Об одном методе приближения функций из H^p, $0 < p \leq 1$ // Мат. заметки. – 1995. – **57**, № 4. – С. 581–585.
60. *Стороженко Э. А.* Гладкость и производные аналитических функций в пространствах $H^p(B^n)$ // Вестн. Моск. ун-та. Мат., мех. сер. I. – 1988. – № 4. – С. 13–16.
61. *Валашек Я.* Приближение в пространствах Харди в поликруге: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Одесса, 1982. – 138 с.
62. *Соляник А. А.* Приближение функций из H^p в верхней полуплоскости:Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Одесса, 1985. – 136 с.
63. *Дин-Тьен-Шон.* Граничные свойства функций из классов Харди: Дис. ... канд. физ. -мат. наук. – Одесса, 1988. – 131 с.
64. *Вартанян Г. М.* Аппроксимативные свойства и двойственность некоторых функциональных пространств: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Одесса, 1990. – 111 с.
65. *Storozenko E., Saprikin S.* On some analogs of converse Bernstein inequalities in L_0 // Funct. approxim. – 1997. – **25**. – P. 111–119.
66. *Storozenko E.* Some inequalities for polynomials in L_0 norm // Recent Progr. Inequal. – 1998. – P. 499–503.
67. *Стороженко Э. А., Кротов В. Г.* Аппроксимативные и дифференциально-разностные свойства функций из пространств Харди H^p, $0 < p \leq 1$ // Тр. Саратов. зимн. школы. – 1983. – С. 65–81.
68. *Стороженко Э. А., Кротов В. Г.* Дифференциально-разностные свойства граничных функций из H^p // Тр. междунар. конф. по теории приближения функций. – Киев, 1987. – С. 237–240.
69. *Стороженко Э. А., Кротов В. Г.* О наилучших приближениях и производных функций классов Харди // Исслед. по теории приближения функций. – 1987. – С..201–215.
70. *Арестов В.В.* Об интегральных неравенствах для тригонометрических полиномов и их производных // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1981.– **41**, № 1. – С. 3–22.
71. *Mahler K.* On the zeros of the derivative of a polynomial // Proc. Roy. Soc. London. – 1961.– **264**. – P. 145–154.
72. *Стороженко Э. А.* К одной задаче Малера о нулях полинома и его производной // Мат. сб. – 1996. – **187**, № 5. – С. 111–120.

Получено 15.03.99