УДК 517.518

С. А. Кириллов (Одес. акад. пищ. технологий)

ОДНО ЗАМЕЧАНИЕ ПО ПОВОДУ ТЕОРЕМ ПЭЛИ И СТЕЙНА

We show that, under the conditions of Paley's and Stein's theorems, a system with bounded norms in L_∞ can be replaced by a system with bounded norms in BMO.

Показано, що в умовах теорем Пелі та Стейна систему з обмеженими нормами в L_∞ можна замінити системою з обмеженими нормами в ВМО.

Отправным пунктом для наших исследований является известная теорема Пэли [1], которая дает оценку нормы функции в L_q, $q > 2$, через ее коэффициенты Фурье по ортонормированной системе, ограниченной в совокупности.

Позднее этот результат развивался в разных направлениях. Например, Стейн [2] обобщил его на случай пространств Лоренца. Ряд работ содержит обобщения теоремы Пэли на случай ортонормированных систем, не являющихся ограниченными в совокупности. В частности, в работе В. И. Коляды [3] получены оценки норм функций в пространствах Лебега L_q, $q > 2$, в терминах норм операторов частных сумм рядов Фурье $S_n : l_2 \to L_s$, $q < s \le \infty$.

В данной работе мы покажем, что в условиях теорем Пэли и Стейна ортонормированную систему, ограниченную в совокупности, вообще говоря, можно заменить системой, у которой ограничены в совокупности полунормы в ВМО (определение см. ниже). Кроме того, покажем, что в оценках В. И. Коляды при $s = \infty$ нормы операторов частных сумм $\|S_n\|_{l_2 \to L_\infty}$ можно заменить нормой $\|S_n\|_{l_2 \to \mathrm{BMO}}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Далее считаем, что $f(x)$ определена на отрезке $[0, 1]$. Приведем некоторые определения.

Определение 1. *Невозрастающей перестановкой измеримой функции* $f(x)$ *называется невозрастающая на интервале* $[0, 1]$ *функция* $f^*(x)$, *равноизмеримая с* $|f(x)|$ (см., например, [4, с.83]).

Далее обозначим

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t}\int\limits_0^t f^*(s)\,ds.$$

Определение 2. *Назовем „шарп-функцией"* (см. [5]) *функцию* $f^{\#}(x)$, *определяемую равенством*

$$f^{\#}(x) = \sup_I \frac{1}{|I|}\int\limits_I |f(s) - f_I|\,ds,$$

где $f_I = \frac{1}{|I|}\int_I f(t)\,dt$ *и верхняя грань берется по всем интервалам* $I \subset [0, 1]$, *содержащим* x.

Будем говорить, что измеримая функция f принадлежит пространству Лоренца $L_{q,r}$, $1 \le q < \infty$, $r > 0$, если

$$\|f\|_{q,r} \equiv \left(\int\limits_0^1 \left[t^{1/q} f^*(t)\right]^r \frac{dt}{t}\right)^{1/r} < \infty.$$

Известно [5], что при $q > 1$, $r > 0$

$$\|f\|_{q,r} \le \|f\|_1 + c_1 \left\| f^{\#} \right\|_{q,r}, \tag{1}$$

$$\left\| f^{\#} \right\|_{q,r} \le c_2 \|f\|_{q,r}. \tag{2}$$

Теперь определим пространство BMO [6, с. 224].

Пусть $I \subset [0, 1]$, $f_I = \frac{1}{|I|}\int_I f(t)\,dt$ — среднее значение функции f на интервале I. Средним колебанием $f(x)$ на I назовем величину

$$\Omega(f, I) \equiv \frac{1}{|I|}\int_I |f(x) - f_I|\,dx.$$

Если величина

$$\|f\|_* \equiv \sup_{I \subset [0,1]} \Omega(f, I) < \infty,$$

то говорят, что функция f принадлежит пространству BMO и $\|\cdot\|_*$ является полунормой на этом пространстве. При этом

$$\left\| f^{\#} \right\|_\infty = \|f\|_*.$$

Нам потребуется следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть $f(x)$ и $g(x)$ конечны почти всюду на отрезке* $[0, 1]$, *суммируемы на этом отрезке и*

$$\int_0^1 f^{**}(t)\left(g^{\#}\right)^*(t)\,dt < \infty.$$

Тогда

$$\int_0^1 f^*(t) g^*(t)\,dt \le \|f\|_1 \|g\|_1 + c\int_0^1 f^{**}(t)\left(g^{\#}\right)^*(t)\,dt.$$

Пусть $\{a_n^*\}$ — перестановка последовательности $\{|a_n|\}$ в невозрастающем порядке. При доказательстве основной теоремы используются следующие оценки.

Лемма 2. *Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — ортонормированная система на отрезке* $[0, 1]$, $\varphi_n \in$ BMO *и* $\|\varphi_n\|_* \le M$, $n = 1, 2, \ldots$; $\{a_n\}$ — *последовательность коэффициентов Фурье функции f.*

1. *Если* $f^{**} \in L_1$, $0 < t < 1$, *то*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^{*2}\right)^{1/2} \le A\left\{\|f\|_1 + \sqrt{n}\,M\int_0^t f^{**}(s)\,ds + \left(\int_t^1 f^{**2}(s)\,ds\right)^{1/2}\right\},$$

где постоянная A не зависит от выбора ортонормированной системы.

2. *Если* $\{a_n\} \in l_2$, $0 < t < 1$, *то при всех* $n = 1, 2, \ldots$

$$\left(f^{\#}\right)^*(t) \le A\left\{M\sum_{k=1}^{n} a_k^* + \frac{1}{\sqrt{t}}\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k^{*2}\right)^{1/2}\right\},$$

где постоянная A не зависит от выбора ортонормированной системы.

Доказательство. Приведем доказательство п. 1. Пусть $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x)$. Тогда, используя лемму 1, а также учитывая (2) и свойства невозрастающих перестановок (см. [4, с.88 – 94]), имеем

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \int_0^1 f(x) S_n(x)\,dx \le \int_0^1 f^*(t) S_n^*(t)\,dt \le$$

$$\le \|f\|_1 \|S_n\|_1 + c\int_0^1 f^{**}(s)\left(S_n^{\#}\right)^*(s)\,ds \le$$

$$\le \|f\|_1 \|S_n\|_2 + c\int_0^1 f^{**}(s)\left\|S_n^{\#}\right\|_\infty ds + c\left(\int_t^1 f^{**2}(s)\,ds\right)^{1/2}\left\|S_n^{\#}\right\|_2 \le$$

$$\le A\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{1/2}\left\{\|f\|_1 + M\sqrt{n}\int_0^t f^{**}(s)\,ds + \left(\int_t^1 f^{**2}(s)\,ds\right)^{1/2}\right\}.$$

После сокращения на общий множитель замечаем, что правая часть не зависит от порядка членов ортонормированной системы, откуда и получаем нужную оценку.

Заметим, что аналогичные оценки для систем, ограниченных в совокупности, ранее были получены Монтгомери [7].

Теперь сформулируем основной результат.

Теорема 1. *Пусть* $\{\varphi_n(x)\}$ *— ортонормированная система на отрезке* $[0, 1]$, $\varphi_n \in \mathrm{BMO}$ *и* $\|\varphi_n\|_* \le M$, $n = 1, 2, \ldots$.

1. *Если* $\{a_n\} \in l_{q', r}$, $q > 2$, $r > 1$ *и* $f(x)$ *— сумма ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \tag{3}$$

по норме $L_2[0, 1]$, *то* $f \in L_{q, r}$ *и*

$$\|f\|_{q, r} \le c_{q, r}\left\{\|f\|_2 + M^{1-2/q}\|\{a_n\}\|_{q', r}\right\}, \quad \left(q' = \frac{q}{q-1}\right).$$

2. *Если* $f \in L_{p, r}$, $1 < p < 2$, $r > 1$ *и* $\{a_n\}$ *— последовательность коэффициентов Фурье функции* f, *то*

$$\|\{a_n\}\|_{p', r} \le c_{p, r} M^{-1+2/p}\|f\|_{p, r}, \quad \left(p' = \frac{p}{p-1}\right).$$

Доказательство. Приведем доказательство п. 1. Полагая $t_n = \left(2^n M^2\right)^{-1}$, на основании леммы 2 и неравенства (1) имеем

$$\|f\|_{q, r}^r \le c\left\{\|f\|_2^r + \left\|f^{\#}\right\|_{q, r}^r\right\} \le c\left\{\|f\|_2^r + \sum_{n=0}^{\infty}\int_{t_{n+1}}^{t_n}\left(f^{\#}\right)^{*r}(t)\,t^{-1+r/q}\,dt\right\} \le$$

$$\le c\left\{\|f\|_2^r + M^{r-2r/q}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{2^{n+1}-1} a_k^*\right)^r 2^{-nr/q} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=2^{n+1}}^{\infty} a_k^{*2}\right)^{r/2} 2^{n\left(\frac{r}{2}-\frac{r}{q}\right)}\right]\right\}.$$

Теперь воспользуемся основной теоремой из работы Лейндлера [8]:

$$\| f \|_{q,r}^{r} \le c \left\{ \| f \|_2^r + M^{r-2r/q} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} a_k^{*2} \right)^{r/2} 2^{n\left(\frac{r}{2}-\frac{r}{q}\right)} \right\}.$$

Из этого неравенства и получаем требуемое.

Пусть

$$\mu_n^* = \sup\left\{ \left\| \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k \right\|_* : \sum_{k=1}^{n} c_k^2 = 1 \right\}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

и представляет собой норму оператора частных сумм ряда (3)

$$S_n : l_2 \to \mathrm{BMO}.$$

Теорема 2. *Пусть* $\{\varphi_n(x)\}$ — *ортонормированная система на отрезке* $[0, 1]$, *причем* $\varphi_n \in \mathrm{BMO}$, $n = 1, 2, \ldots$. *Если* $q > 2$, $r > 0$ *и последовательность* $a \equiv \{a_n\} \in l_2$ *такова, что*

$$\tilde{\Omega}_{q,r}(a) \equiv \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\rho_n^r - \rho_{n+1}^r \right) \mu_n^{\frac{r}{q}(q-2)} \right)^{1/r} < \infty,$$

$$\mu_n \equiv \mu_n^*, \quad \rho_n = \left(\sum_{k=n}^{\infty} a_k^2 \right)^{1/2},$$

то ряд (3) *сходится в* $L_2[0, 1]$ *к некоторой функции* f, *причем*

$$\| f \|_{q,r} \le c_{q,r} \left\{ \| f \|_2 + \tilde{\Omega}_{q,r}(a) \right\}.$$

Доказательство данной теоремы может быть проведено с помощью приемов, подобных использованным при доказательстве теоремы 1. Как уже отмечалось, для систем из L_∞ аналогичный результат получен в [3].

Наконец, сформулируем утверждение, которое содержит коэффициенты $\{a_n\}$ в явном виде и может быть получено как следствие теоремы 2.

Теорема 3. *Пусть* $\{\varphi_n(x)\}$ — *ортонормированная система на отрезке* $[0, 1]$, *причем* $\| \varphi_n \|_* \le M_n$, $n = 1, 2, \ldots$. *Если* $q > 2$, $r \ge 2$, $B_n = \sum_{k=1}^{n} M_k^2$, $n = 1, 2, \ldots$, *и последовательность* $a \equiv \{a_n\} \in l_2$ *такова, что*

$$\tilde{D}_{q,r}(a) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^r B_n^{r-1-r/q} M_n^{2-r} \right)^{1/r} < \infty,$$

то ряд (3) сходится в $L_2[0, 1]$ *к некоторой функции* f, *причем*

$$\| f \|_{q,r} \le c_{q,r} \left\{ \| f \|_2 + \tilde{D}_{q,r}(a) \right\}.$$

Заметим, что в условиях теоремы 3 нам не удалось снять ограничение на r, тем не менее, этот результат обобщает и усиливает известную оценку Марцинкевича – Зигмунда [9].

В заключение автор выражает искреннюю признательность профессору В.И. Коляде за постоянное внимание к работе.

1. *Paley R .E.* Some theorems on orthogonal functions // Stud. math. – 1931. – № 3. – P. 226–238.
2. *Stein E. M.* Interpolation of linear operators // Trans. Amer. Math. Soc. – 1956. – **83**, № 21. – P. 482–492.
3. *Коляда В. И.* О некоторых обобщениях теоремы Харди – Литтлвуда – Пэли // Мат. заметки. – 1993. – **51**, вып.3. – С. 24–34.
4. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
5. *Bennet S., Sharpley R.* Weak-type inequalities for H^p and BMO // Proc. Symp. Pure Math. – 1979. – **35**, № 1. – P. 201–229.
6. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции. – М.:Мир, 1984. – 469 с.
7. *Montgomery H. L.* A note on rearrangements of Fourier coefficients // Ann. Inst. Fourier. – 1979. – **26**. – P. 29–34.
8. *Leindler L.* Generalization of inequalities of Hardy and Littlewood // Acta sci. math. – 1971. – **31**, № 3–4. – P. 279–285.
9. *Marcinkiewicz J., Zygmund A.* Some theorems on orthogonal systems // Fund. Math. – 1937. – **28**. – P. 309–335.

Получено 13.11.97,
после доработки – 21.09.98