УДК 517.946

І. Д. Пукальський (Чернівец. ун-т)

ФУНКЦІЯ ГРІНА ПАРАБОЛІЧНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ І ЗАДАЧА ОПТИМІЗАЦІЇ

Necessary and sufficient conditions are established for the choice of optimal control of systems which can be described by a common parabolic problem with restricted internal control.

Встановлено необхідні і достатні умови вибору оптимального керування системами, що описуються загальною параболічною задачею з обмеженим внутрішнім керуванням.

Необхідність оптимального керування процесами, що описуються рівняннями параболічного типу, виникає при розв'язанні багатьох прикладних задач, зокрема при дослідженні процесів нагрівання і охолодження масивних елементів конструкції, поширення полів температури або концентрації.

У цій статті розглядається задача вибору оптимального керування системами, що описуються загальною параболічною задачею з обмеженим внутрішнім керуванням. Функціонал якості визначається об'ємним інтегралом.

Постановка задачі і основні обмеження. Нехай D — обмежена опукла область в $\mathbb{R}^n$ з межею ∂D. В області $Q = (0; T) \times D$ розглянемо задачу знаходження функцій (u, p), на яких функціонал

$$I(p) = \int_0^T dt \int_D F(t, x, \bar{u})\, dx \tag{1}$$

досягає мінімуму в класі функцій

$$p(t, x) \in V \equiv \{p(t, x), p(t, x) \in C^{\alpha}(Q), \psi_1(t, x) \le p(t, x) \le \psi_2(t, x)\},$$

де $u(t, x, p)$ є розв'язком параболічної крайової задачі

$$(Lu)(t, x) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} - \sum_{|k| \le 2b} A_k(t, x) D_x^k\right) u = f_0(t, x, p), \tag{2}$$

$$u\,|_{t=0} = \varphi(x), \tag{3}$$

$$(\mathcal{B}_i u)(t, x)|_{\Gamma} \equiv \left(\sum_{|k| \le r_i} b_k^{(i)}(t, x)\, D_x^k\right) u\,|_{\Gamma} = f_i(t, x), \tag{4}$$

$$0 \le r_i \le 2b - 1,\ i = \overline{1, b},\ \bar{u} = (u, D_x u, \ldots, D_x^{2b-1} u, p) \equiv (u_0, u_1, \ldots, u_{2b}),$$

$$\Gamma = (0, T) \times \partial D,\ D_x^k = D_{x_1}^{k_1} \ldots D_{x_n}^{k_n},\ |k| = |k_1| + \ldots + |k_n|.$$

Будемо вважати виконаними такі умови:

1) крайова задача (2) – (4) параболічна [1] і

$$A_k(t, x) \in C^{\alpha}(Q),\ b_k^{(i)}(t, x) \in C^{2b - r_i + \alpha_i}(\Gamma),\ \partial D \in C^{2b+\alpha};$$

2) функції $\varphi(x) \in C^{2b+\alpha}(D)$, $f_i(t, x) \in C^{2b - r_i + \alpha_i}(\Gamma)$, $(\mathcal{B}_i \varphi)(0, x)|_{\Gamma} = f_i(0, x)$, $\psi_1(t, x) \in C^{\alpha}(Q)$, $\psi_2(t, x) \in C^{\alpha}(Q)$, $f_0(t, x, p)$, $F(t, x, \bar{u})$ визначені відповідно в областях $M_1 = Q \times [\psi_1, \psi_2]$, $M_2 = Q \times R_{2b-1} \times [\psi_1, \psi_2]$, мають гельдерові похідні другого порядку по $u_j, j = \overline{0, 2b}$, які належать як функції змінних t, x простору $C^{\alpha}(Q)$.

При обмеженнях 1, 2 для будь-яких $p(t, x) \in V$ існує єдиний розв'язок задачі (2) – (4) із простору $C^{2b+\alpha}(Q)$, для якого справедлива оцінка [2]

$$|u|^{2b+\alpha} \le c\left(|\varphi|^{2b+\alpha} + |f_0|^{\alpha} + \sum_{i=1}^{b}|f_i|^{2b-r_i+\alpha_i}\right). \tag{5}$$

Нехай $E(t, x, \tau, \xi)$ — функція Гріна однорідної крайової задачі (2) – (4), ($f_i \equiv \equiv 0$), побудована в [3]. Позначимо

$$\omega(t, x) = \sum_{i=0}^{2b-1}\int_t^T d\tau\int_D D_x^i E(\tau, \xi, t, x) D_{u_i} F(t, x, \bar{u})\, d\xi,$$

$$H(\bar{u}, \omega) = F(t, x, \bar{u}) + \omega(t, x) f_0(t, x, u_{2b}).$$

Критерій оптимальності розв'язку задачі (2) – (4). Сформулюємо необхідні і достатні умови оптимальності (u_0, u_{2b}).

Теорема 1. *Якщо функція $H(\bar{u}, \omega)$ відносно аргументу u_{2b} є монотонно зростаючою для $u_{2b} \in V$, то оптимальне керування $u_{2b}^0 = \psi_1(t, x)$ і оптимальний розв'язок задачі (2) – (4) $u_0^0(t, x, p) \equiv u(t, x, \psi_1(t, x))$.*

Якщо функція $H(\bar{u}, \omega)$ відносно аргументу u_{2b} є монотонно спадною для $u_{2b} \in V$, то оптимальне керування $u_{2b}^0 = \psi_2(t, x)$ і оптимальний розв'язок задачі (2) – (4) $u_0^0(t, x, p) \equiv u(t, x, \psi_2(t, x))$.

Доведення. *Достатність.*. Нехай Δu_{2b} — деякий допустимий приріст керування $u_{2b}^0(t, x)$. Позначимо через Δu_i відповідний приріст функції $u_i(t, x, u_{2b}^0)$, $i = \overline{0, 2b-1}$. Тоді Δu_0 в області Q буде розв'язком крайової задачі

$$(L\Delta u_0)(t, x) = \Delta f_0(t, x) \equiv f_0(t, x, u_{2b}^0 + \Delta u_{2b}) - f(t, x, u_{2b}^0),$$
$$\Delta u_0|_{t=0} = 0, \ (\mathcal{B}_i \Delta u_0)(t, x)|_{\Gamma} = 0. \tag{6}$$

За допомогою формули Тейлора знаходимо приріст функціонала $I(p)$:

$$\Delta I = \int_0^T dt \int_D \sum_{i=0}^{2b} D_{u_i} F(t, x, \bar{z}) \Delta u_i\, dx, \quad z_i \in [u_i + \Delta u_i, u_i], \ i = \overline{0, 2b}. \tag{7}$$

Оскільки Δu_0 — розв'язок крайової задачі (6), то, використовуючи функцію Гріна крайової задачі (6), маємо

$$\Delta u_k = \int_0^t d\tau \int_D D_x^k E(t, x, \tau, \xi) \Delta f_0(\tau, \xi)\, d\xi, \ k = \overline{0, 2b-1}. \tag{8}$$

Підставляючи (8) у (7) і змінюючи порядок інтегрування, знаходимо

$$\Delta I = \int_0^T d\tau \int_D \left(D_{u_{2b}} H(\bar{z}, \omega)\Delta u_{2b} + O(|\Delta u|^2)\right) dx. \tag{9}$$

Якщо u_{2b}^0 і $H(\bar{z}, \omega)$ задовольняють умови теореми, то при досить малих Δu_{2b} маємо $\Delta I > 0$.

Необхідність. Нехай керування $u_{2b}^0(t, x)$ — оптимальне, тобто $\Delta I > 0$. Перевіримо виконання умов теореми. Якщо $H(\bar{u}, \omega)$ не монотонна відносно аргументу u_{2b}, то $D_{u_{2b}}H(\bar{u}, \omega)$ — знакозмінна величина, тобто $D_{u_{2b}}H(\bar{u}, \omega) > 0$ в $Q^+ \subset Q$ і $D_{u_{2b}}H(\bar{u}, \omega) < 0$ в $Q^- = Q \setminus Q^+$. Використовуючи теорему про „середнє" значення, маємо

$$\Delta I = \iint\limits_{Q^+} D_{u_{2b}} H(\bar{z}, \omega) \Delta u_{2b}\, dxdt - \iint\limits_{Q^-} |D_{u_{2b}} H(\bar{z}, \omega)| \Delta u_{2b}\, dxdt + $$

$$+ \int\limits_0^T \int\limits_D O(|\Delta u|^2)\, dx = D_{u_{2b}} H(\bar{z}^+, \omega^+) \iint\limits_{Q^+} \Delta u_{2b}\, dxdt -$$

$$- |D_{u_{2b}} H(\bar{z}^-, \omega^-)| \iint\limits_{Q^-} \Delta u_{2b}\, dxdt + \int\limits_0^T \int\limits_D O(|\Delta u|^2)\, dx.$$

При досить малому Δu_{2b} знак ΔI визначається першими двома членами суми. Різниця перших двох членів змінює знак в залежності від величини $\operatorname{mes} Q^+$, $\operatorname{mes} Q^-$, Δu_{2b}. Наприклад, виберемо знакосталу Δu_{2b} ($\Delta u_{2b} > 0$). При досить малих $\operatorname{mes} Q^+$ маємо $\Delta I < 0$ і $\Delta I > 0$, якщо мала $\operatorname{mes} Q^-$. Отже, функціонал не досягає мінімуму.

Теорема 2. *Нехай $H(\bar{u}, \omega)$ — не монотонна функція відносно аргументу u_{2b}. Для того щоб керування u_{2b}^0 і відповідний розв'язок $u_0(t, x, u_{2b}^0)$ крайової задачі* (2) – (4) *були оптимальними, необхідно і достатньо, щоб виконувались умови:*

а) *функція $H(\bar{u}, \omega)$ відносно аргументу u_{2b} набуває в точці u_{2b}^0 мінімального значення;*

б) *для довільного вектора $\bar{y} = (y_0, \ldots, y_{2b}) \neq 0$ і $(t, x) \in \overline{Q}$ виконується нерівність*

$$K(t, x, y) = \sum_{i,j=0}^{2b} D_{u_i u_j}^2 F(t, x, \bar{u}^0) y_i y_j + \omega(t, x) D_{u_{2b} u_{2b}}^2 f_0(t, x, u_{2b}^0)\, y_{2b}^2 > 0.$$

Доведення. *Достатність.* Нехай керування u_{2b}^0 задовольняє умови теореми 2. Покажемо його оптимальність. Надамо керуванню u_{2b}^0 деякого допустимого приросту Δu_{2b} і позначимо через Δu_k відповідний приріст функції $u_k(t, x, u_{2b}^0)$, $k = \overline{0, 2b-1}$. Тоді Δu_0 в області Q буде розв'язком крайової задачі (6).

За допомогою формули Тейлора знаходимо приріст функціонала $I(p)$:

$$\Delta I = \int\limits_0^T bt \int\limits_D \Bigg[\sum_{k=0}^{2b} D_{u_k} F(t, x, \bar{u}^0) \Delta u_k + \frac{1}{2} \sum_{i,k=0}^{2b} \Big(D_{u_i u_j}^2, F(t, x, \bar{u}^0) + $$

$$+ \varepsilon_{ik} \Big) \Delta u_k \Delta u_i \Bigg] dx,$$

$$\varepsilon_{ik} = D_{u_k u_i}^2 F(t, x, \bar{z}) - D_{u_k u_i}^2 F(t, x, \bar{u}^0). \tag{10}$$

Підставляючи (8) в (10) і змінюючи порядок інтегрування, одержуємо

$$\Delta I = \int_0^T dt \int_D \left[D_{u_{2b}} H\left(\bar{u}^0, \omega\right) \Delta u_{2b} + \frac{1}{2} K(t, x, \Delta u) + K_1(t, x, \Delta u) \right] dx, \qquad (11)$$

де

$$K_1(t, x, \Delta u) = \frac{1}{2} \sum_{i,k=0}^{2b} \varepsilon_{ik} \Delta u_{ik} \Delta u_i + \frac{1}{2} \omega(t, x) \left[D^2_{u_{2b} u_{2b}} f_0(t, x, z_{2b}) - \right.$$

$$\left. - D^2_{u_{2b} u_{2b}} f_0\left(t, x, u^0_{2b}\right) \right].$$

Оцінимо ΔI знизу, враховуючи, що за умовою а) $D_{u_{2b}} H(\bar{u}^0, \omega) = 0$. Позначимо $\delta(t, x) = \inf_{|\xi|=1} K(t, x, \xi)$, $\delta(t, x) > 0$ за умовою б) для всіх $(t, x) \in \in \overline{Q}$. Тоді, очевидно, для квадратичної форми виконується нерівність $K(t, x, \Delta u) \geq \delta(t, x) |\Delta u|^2$. Використовуючи умову гельдеровості других похідних функцій $F(t, x, \bar{u})$ і $f_0(t, x, u_{2b})$, знаходимо $|K_1(t, x, \Delta u)| \leq \frac{1}{2} C_0 |\Delta u|^{2+\alpha}$. За допомогою останніх двох нерівностей маємо

$$\Delta I \geq \frac{1}{2} \int_0^T dt \int_D \left[\delta(t, x) - C_1 |\Delta u|^\alpha \right] |\Delta u|^2 dx.$$

Враховуючи співвідношення (8), переконуємось, що $|\Delta u| \to 0$ при $\Delta u_{2b} \to \to 0$. Тому при досить малих Δu_{2b} таких, що $\Delta u \leq (2^{-1} C_0^{-1} \delta(t, x))^{1/\alpha}$, одержуємо оцінку

$$\Delta I \geq 4^{-1} \int_0^T dt \int_D \delta(t, x) |\Delta u|^2 dx > 0.$$

Необхідність. Нехай керування u^0_{2b} — оптимальне, тобто $\Delta I(u^0_{2b}) > 0$. Перевіримо виконання умов а), б). Покладемо $D_{u_{2b}} H(\bar{u}^0, \omega) \neq 0$. Тоді, вибираючи досить малі різні за знаком в області Q прирости Δu_{2b}, із формули (11) одержуємо, що ΔI змінює знак в залежності від знаку Δu_{2b}. Це суперечить наявності мінімуму функціонала $I(p)$ в точці u^0_{2b}. Отже, $D_{u_{2b}} H(\bar{u}^0, \omega) = 0$.

Визначимо знак функції $D_{u_{2b}} H(\bar{u}^0, \omega)$ в околі u^0_{2b}. Запишемо приріст ΔI у вигляді

$$\Delta I = \int_0^T dt \int_D \left[D_{u_{2b}} H(u^0, \ldots, u^0_{2b-1}, u^0_{2b} + \lambda \Delta u_{2b}, \omega) \Delta u_{2b} + O(|\Delta u|^2) \right] dx,$$

$$\lambda \in (0, 1).$$

При досить малих Δu_{2b} із умови $\Delta I > 0$ випливає, що

$$D_{u_{2b}} H(u^0, \ldots, u^0_{2b-1}, u^0_{2b} + \lambda \Delta u_{2b}, \omega) \Delta u_{2b} > 0,$$

тобто при $u_{2b} < u^0_{2b}$ $D_{u_{2b}} H < 0$ і при $u_{2b} > u^0_{2b}$ $D_{u_{2b}} H > 0$. Тому в точці u^0_{2b} функція $H(\bar{u}, \omega)$ досягає мінімуму.

Якщо $K(t, x, \Delta u) \leq 0$ в області Q, то з урахуванням умови а) одержуємо $\Delta I \leq 0$, що неможливо.

Нехай $K(t, x, \Delta u) > 0$ в $Q^+ \subset Q$ і $K(t, x, \Delta u) < 0$ в $Q^- = Q \setminus Q^+$. Використовуючи теорему про „середнє" для приросту ΔI, маємо

$$\Delta I = \iint\limits_{Q^+} K(t, x, \Delta u) dt dx - \iint\limits_{Q^-} |K(t, x, \Delta u)| dt dx + \iint\limits_{Q} K_1(t, x, \Delta u) dt dx =$$

$$= K(t^+, x^+, \Delta u^+) \operatorname{mes} Q^+ - |K(t^-, x^-, \Delta u^-)| \operatorname{mes} Q^+ \iint\limits_{Q} K_1(t, x, \Delta u) dt dx,$$

де $(t^{\pm}, x^{\pm}) \in Q^{\pm}$.

При досить малих Δu_{2b} знак ΔI визначається першими двома членами суми. Різниця цих членів змінює знак в залежності від величини значень $\operatorname{mes} Q^+$, $\operatorname{mes} Q^-$, при досить малій $\operatorname{mes} Q^+$ маємо $\Delta I < 0$ і $\Delta I > 0$, якщо мала $\operatorname{mes} Q^-$. Отже, при знакозмінній формі $K(t, x, \Delta u)$ функціонал $I(p)$ не досягає мінімуму.

Пояснимо, як знаходяться u_{2b}^0 і u_0^0. Якщо керування u_{2b}^0 — оптимальне, то $D_{u_{2b}} H = 0$ і $D_{u_{2b}}^2 H > 0$. Застосовуючи теорему про неявні функції до рівняння $D_{u_{2b}} H(\bar{u}^0, \omega) = 0$, одержуємо $u_{2b}^0 = W(\bar{v}, \omega)$, $\bar{v} = (u_0^0, u_1^0, \ldots, u_{2b-1}^0)$. Крім того, $W(\bar{v}, \omega)$ – диференційовна по u_k і ω.

Використовуючи функцію Гріна однорідної крайової задачі, поставимо у відповідність задачі (2) – (4) систему інтегральних рівнянь

$$u_k = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_D D_x^k E(t, x, \tau, \xi) f_0(\tau, \xi, W(\bar{v}, \omega)) d\xi + D_x^k \omega_1(t, x), \; k = \overline{1, 2b-1},$$

$$\omega(t, x) = \sum_{k=0}^{2b-1} \int\limits_t^T d\tau \int\limits_D D_\xi^k E(\tau, \xi, t, x) D_{u_k} F(\tau, \xi, \bar{v}, W(\bar{v}, \omega)) d\xi, \tag{12}$$

де $\omega_1(t, x)$ — розв'язок крайової задачі

$$(L, \omega_1)(t, x) = 0, \; \omega_1(0, x) = \varphi(x), \; (\mathcal{B}_i \omega_1)(t, x)|_\Gamma = f_i(t, x).$$

Розв'язок системи (12) знаходимо методом послідовних наближень; при цьому використовуємо властивості і оцінки функції Гріна $E(t, x, \tau, \xi)$ [3].

1. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. – М.: Наука, 1964. – 443с.
2. *Матийчук М. И.* Фундаментальные решения параболических систем с разрывными коэффициентами и их применение к краевым задачам. IV // Дифференц. уравнения. – 1978. – **14**, № 6. – С.885 – 899.
3. *Матийчук М. И.* Фундаментальные решения параболических систем с разрывными коэффициентами и их применение к краевым задачам. III // Там же. – № 2. – С.291 – 303.

Одержано 26.05.98