УДК 517.43 + 517.5

М. Л. Горбачук (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО АНАЛІТИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ОПЕРАТОРНИХ РІВНЯНЬ

We find conditions on a closed operator A in a Banach space which are necessary and sufficient for the existence of solutions of a differential equation $y'(t) = Ay(t)$, $t \in [0, \infty)$, in the classes of entire vector-functions with given order of growth and type. We present criterions of density of classes of this sort in the set of all solutions. These criterions enables one to prove the existence of solution of the Cauchy problem for equation under consideration in the class of analytic vector-functions and to justify the convergence of approximate method of power series. In the special case where A is a differential operator, the problem of applicability of this method was first formulated by Weierstrass. Conditions under which the method is applicable were found by Kowalewska.

Знайдено умови на замкнений оператор A в банаховому просторі, необхідні і достатні для існування розв'язків диференціального рівняння $y'(t) = Ay(t)$, $t \in [0, \infty)$, в класах цілих вектор-функцій із заданими порядком росту і типом. Наведено ознаки щільності таких класів у множині всіх розв'язків. Ці ознаки дають можливість довести існування розв'язкузадачі Коші для розглядуваного рівняння в класі аналітичних вектор-функцій і обгрунтувати збіжність наближеного методу степеневих рядів. В частинному випадку, коли A — диференціальний оператор, проблема про можливість застосування цього методу була поставлена Вейєрштрассом. Умови, за яких це можливо, були знайдені Ковалевською (відома теорема Ковалевської).

1. Про деякі класи цілих векторів замкненого оператора. *1.1.* Нехай A — замкнений лінійний оператор в банаховому просторі $\mathfrak{B}$ з нормою $\|\cdot\|$. Вектор $x \in C^{\infty}(A) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0 = \{0,1,2,\dots\}} \mathcal{D}(A^n)$ ($\mathcal{D}(\cdot)$ — область визначення оператора) називається цілим вектором оператора A [1], якщо ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n A^n x}{n!}$$

збігається для всіх $\lambda \in \mathbb{C}$. Очевидно, що $x \in C^{\infty}(A)$ є цілим вектором оператора A тоді і тільки тоді, коли для кожного додатного числа α існує стала $c = c(\alpha) > 0$ така, що

$$\forall\, n \in \mathbb{N}_0 \quad \|A^n x\| \le c\alpha^n n^n.$$

У подальшому, якщо це не обумовлено, c позначатиме відповідну константу.

Для обмеженого оператора A, визначеного на всьому просторі $\mathfrak{B}$, будь-який вектор $x \in \mathfrak{B}$ є цілим. Що стосується необмежених операторів, то серед них є такі, що не мають жодного, відмінного від нульового, цілого вектора.

Будемо говорити, що цілий вектор x оператора A має скінченний порядок, якщо існує число $\gamma \in (-\infty, 1)$ таке, що для достатньо великих n $(n > n_0(\gamma))$

$$\|A^n x\| \le n^{n\gamma}.$$

Точну нижню межу таких γ назвемо порядком x і позначимо через $p(x)$. Неважко бачити, що

$$p = p(x) = \varlimsup_{n \to \infty} \frac{\ln \|A^n x\|}{n \ln n}.$$

Означимо тип $s(x)$ цілого вектора x порядку p як

$$s(x) = \inf\{\alpha > 0 : \|A^n x\| \le \alpha^n n^{np(x)},\ n > n_0(\alpha)\}.$$

Зрозуміло, що

$$s = s(x) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\sqrt[n]{\|A^n x\|}}{n^{p(x)}}.$$

Будемо говорити, що цілий вектор x порядку p має мінімальний тип, якщо $s(x)=0$, і нормальний тип, якщо $0<s(x)<\infty$.

Для $\beta\in\mathbb{R}^1$ покладемо

$$\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A) = \bigcup_{\alpha>0} \mathfrak{G}^{\alpha}_{\beta}(A), \quad \mathfrak{G}_{(\beta)}(A) = \bigcap_{\alpha>0} \mathfrak{G}^{\alpha}_{\beta}(A),$$

де

$$\mathfrak{G}^{\alpha}_{\beta}(A) = \{x\in C^{\infty}(A) \mid \exists\, c=c(x)>0: \|A^n x\| \le c\alpha^n n^{n\beta} \quad \forall\, n\in\mathbb{N}_0\}$$

— банахів простір відносно норми

$$\|x\|_{\alpha} = \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{\|A^n x\|}{\alpha^n n^{n\beta}}.$$

Якщо цілий вектор x має порядок p і скінченний тип, то $x\in\mathfrak{G}_{\{p\}}(A)$. Елементи простору $\mathfrak{G}_{\{0\}}(A)$ називаються цілими векторами експоненціального типу оператора A [2].

1.2. В різних задачах аналізу і диференціальних рівнянь [2–4] виникає питання, за яких умов на оператор A простір $\mathfrak{G}_{(\beta)}(A)$ або хоча б $\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$ є щільним в $\mathfrak{B}$. Має місце наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай A — нормальний оператор в гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$ і $E_{\Delta}=E_{\Delta}(A)$ — спектральна міра цього оператора. Тоді*

$$\mathfrak{G}_{\{0\}}(A) = \{x=E_{\Delta}y \;\forall\, y\in\mathfrak{H},\ \Delta\subset\mathbb{R}^2 \text{ — довільний компакт}\},$$

$$\mathfrak{G}_{(0)}(A) = \ker A.$$

Доведення. Нехай $x=E_{\Delta}y$, де $y\in\mathfrak{H}$, Δ — компакт з $\mathbb{R}^2$. Тоді $\Delta\subset\{\lambda: |\lambda|<\alpha\}$ з деяким $\alpha>0$ і

$$\|A^n x\|^2 = \int_{\Delta} |\lambda|^{2n} d(E_{\lambda}y, y) \le \alpha^{2n}\|y\|^2$$

($(\cdot,\cdot)$ — скалярний добуток в $\mathfrak{H}$). Отже, $x\in\mathfrak{G}^{\alpha}_{0}(A)$.

Навпаки, якщо $x\in\mathfrak{G}_{\{0\}}(A)$, то

$$\exists\,\alpha>0: \|A^n x\|^2 \le c^2\alpha^{2n},$$

що рівносильне

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left|\frac{\lambda}{\alpha}\right|^{2n} d(E_{\lambda}x, x) \le c^2. \tag{1}$$

Враховуючи, що $|\lambda/\alpha|^{2n}\to\infty$ при $|\lambda|>\alpha$, і переходячи до границі в (1), приходимо до висновку, що міра $(E_{\lambda}x, x)$ зосереджена в крузі $|\lambda|\le\alpha$.

Очевидно, що $\ker A\subseteq\mathfrak{G}_{(0)}(A)$. Навпаки, якщо $x\in\mathfrak{G}_{(0)}(A)$, то нерівність

(1) виконується для будь-якого $\alpha > 0$, а це означає, що міра $(E_\lambda x, x)$ зосереджена в точці 0, тобто $Ax = 0$. Теорему доведено.

***Наслідок* 1.** *Нехай A — нормальний оператор в гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$. Тоді при $\beta > 0$ $\mathfrak{G}_{\{0\}}(A) \subseteq \mathfrak{G}_{(\beta)}(A) \subseteq \mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$ і $\overline{\mathfrak{G}_{\{0\}}(A)} = \mathfrak{H}$.*

1.3. За означенням [5], однопараметрична сім'я $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ обмежених лінійних операторів в $\mathfrak{B}$ є C_0-півгрупою, якщо:

а) $U(0) = I$, де I — одиничний оператор;

б) $U(t_1 + t_2) = U(t_1)U(t_2)$ при $t_1, t_2 > 0$;

в) $\lim\limits_{t\to 0} U(t)x = x$ для довільного $x \in \mathfrak{B}$.

Оператор A, визначений як

$$Ax = \lim_{t\to 0}\frac{U(t)x - x}{t} \tag{2}$$

на векторах x, для яких існує границя (2), називається генератором півгрупи $\{U(t)\}_{t\geq 0}$. Оператор A завжди замкнений і $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathfrak{B}$. Якщо сім'я $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}^1}$ визначена для всіх $t \in \mathbb{R}^1$ і задовольняє властивості а)–в) при $t \in \mathbb{R}^1$, то вона утворює C_0-групу в $\mathfrak{B}$. Спектр генератора A C_0-півгрупи (C_0-групи) операторів $U(t)$ лежить в множині $\{\lambda : \operatorname{Re}\lambda < \omega\}$ ($\{\lambda : |\operatorname{Re}\lambda| < \omega\}$) з деяким $\omega \in \mathbb{R}^1$. Надалі півгрупу (групу) з генератором A позначатимемо через $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$ ($\{e^{tA}\}_{t\in\mathbb{R}^1}$). Півгрупа $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$ називається аналітичною, якщо e^{tA} допускає продовження до оператор-функції e^{zA}, аналітичної в куті $\Sigma(\theta) = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \theta\}$ з деяким $\theta \in (0, \pi/2]$ і сильно неперервної в нулі по довільному променю, що міститься всередині $\Sigma(\theta)$. Будемо говорити, що півгрупа $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$ аналітична в правій півплощині, якщо $\theta = \pi/2$.

Теорема 2. *Нехай A — генератор C_0-групи $\{e^{tA}\}_{t\in\mathbb{R}^1}$ в $\mathfrak{B}$. Тоді*

$$\overline{\mathfrak{G}_{(\beta)}(A)} = \mathfrak{B} = \overline{\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)} \quad \textit{при} \quad \beta > 0.$$

Доведення. Для фіксованих $\alpha, \beta > 0$ позначатимемо через S_α^β простір нескінченно диференційовних функцій $\varphi(t)$, $t \in \mathbb{R}^1$, які задовольняють нерівності

$$\left|t^k \varphi^{(q)}(t)\right| \leq c a^k b^q k^{k\alpha} q^{q\beta}, \quad k, q \in \mathbb{N}_0,$$

де a, b — додатні числа, що залежать від φ. Як показано в [6, с. 210], для $\varphi \in S_\alpha^\beta$ виконується оцінка

$$\left|\varphi^{(q)}\right| \leq c b_1^q q^{q\beta} e^{-\gamma|t|^{1/\alpha}}, \quad q \in \mathbb{N}_0 \tag{3}$$

(додатні сталі b_1 і γ залежать від a і b).

Розглянемо множину векторів

$$y = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{tA} x\, dt, \tag{4}$$

де φ перебігає всю множину S_α^β, а x — весь простір $C^\infty(A)$. Оскільки $\|e^{tA}x\| \leq ce^{\omega|t|}$ з $\omega > 0$, то з нерівності (3) випливає, що $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{(n)}(t)\, e^{tA} x\, dt$ абсолютно збігається при $\alpha < 1$, $y \in C^\infty(A)$ і

$$A^n y = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) A^n e^{tA} x\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) (e^{tA} x)^{(n)} dt = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{(n)}(t) e^{tA} x\, dt,$$

звідки

$$\|A^n y\| \leq c b_1^n n^{n\beta},$$

тобто $y \in \mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$.

Покажемо, що коли $0 < \alpha < 1$, $\beta > 0$ і $\alpha + \beta \geq 1$, то множина векторів вигляду (4) є щільною в $\mathfrak{B}$. Припустимо, що це не так. Тоді існує функціонал $F \in \mathfrak{B}'$ такий, що

$$F(y) = 0 \quad \text{для всіх } y \text{ вигляду (4).} \tag{5}$$

Як показано в [6, с. 281], простір S_α^β досить широкий у тому сенсі, що для локально інтегровної функції $f(t)$ із збіжності інтеграла $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)\, dt$ і рівності його нулеві для кожної функції $\varphi \in S_\alpha^\beta$ випливає тотожність $f(t) \equiv 0$ майже всюди. Оскільки для $\beta > 0$ існує $\alpha \in (0, 1)$ таке, що $\alpha + \beta \geq 1$, рівність (5) для всіх $\varphi \in S_\alpha^\beta$ і неперервність $F(e^{tA}x)$ зумовлюють $F(U(0))x = F(x) = 0$ для довільного $x \in C^\infty(A)$. Враховуючи щільність останньої множини в $\mathfrak{B}$, одержуємо $F = 0$. Оскільки $\mathfrak{G}_{(\beta)}(A) \supseteq \mathfrak{G}_{\{\beta'\}}(A)$ при $\beta' < \beta$, робимо висновок, що $\overline{\mathfrak{G}_{(\beta)}(A)} = \mathfrak{B}$. Теорему доведено.

Метод доведення теореми 2 не дає змоги охопити $\beta = 0$. Щільність в $\mathfrak{B}$ множини $\mathfrak{G}_{\{0\}}(A)$ була показана в [2] у випадку рівномірної обмеженості групи $\{e^{tA}\}_{t\in\mathbb{R}^1}$ і в [4] — за умови

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln\|e^{tA}\|}{1+t^2} dt < \infty. \tag{6}$$

Наступна теорема показує, що умова (6) близька до необхідної.

Теорема 3. *Нехай вимірна, локально обмежена функція* $\sigma(t) \geq 1$, $t \in \mathbb{R}^1$, *має властивості:*

1) $\sigma(t+s) \leq \sigma(t)\sigma(s)$;
2) $\int_{-\infty}^{\infty} \ln\sigma(t)(1+t^2)^{-1} dt = \infty$.

Тоді існує оператор A, *котрий є генератором* C_0*-групи* $\{e^{tA}\}_{t\in\mathbb{R}^1}$ *у деякому гільбертовому просторі такої, що* $\|e^{tA}\| \leq \sigma(t)$, *і* $\mathfrak{G}_{\{0\}}(A) = \{0\}$.

Доведення. У просторі $\mathfrak{B} = L_2(\mathbb{R}^1, \sigma^2(t)dt)$ функцій $x(s), s \in \mathbb{R}^1$, квадратично інтегровних з вагою $\sigma^2(s)$, тобто $\|x\| = \int_{-\infty}^{\infty} |x(s)|^2 \sigma^2(s)\, ds < \infty$, розглянемо оператор $(Ax)(s) = -x'(s)$, визначений на всіх абсолютно неперервних функціях, для яких $x(s)$ та $x'(s)$ належать до $L_2(\mathbb{R}^1, \sigma^2(t)dt)$. Оператор A породжує C_0-групу $\{e^{tA}\}_{t\in\mathbb{R}^1}$: $(e^{tA}x)(s) = x(s-t)$, для якої

$$\|e^{tA}x\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |x(s-t)|^2 \sigma^2(s) ds = \int_{-\infty}^{\infty} |x(s)|^2 \sigma^2(s+t) ds \leq$$

$$\leq \sigma^2(t) \int_{-\infty}^{\infty} |x(s)|^2 \sigma^2(s) ds = \sigma^2(t) \|x\|^2,$$

тобто $\|e^{tA}\| \le \sigma(t)$. Доведемо, що для будь-якого $\alpha > 0$ $\mathfrak{G}_0^{\alpha}(A) = \{0\}$. Припустимо супротивне. Тоді існують $\alpha > 0$ і $x \in L_2(\mathbb{R}^1, \sigma^2(t)\,dt)$, $x \neq 0$, такі, що $x \in \mathfrak{G}_0^{\alpha}(A)$. Звідси випливає

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|x^{(n)}(s)\right|^2 ds \le \int_{-\infty}^{\infty} \left|x^{(n)}(s)\right|^2 \sigma^2(s)\,ds \le c\alpha^n, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

а тому $x(s)$ — ціла функція експоненціального типу, що належить до $L_2(\mathbb{R}^1)$ на дійсній осі. Нерівність $\ln_+|t| \le |t|$ для $t \in \mathbb{R}^1$, зумовлює оцінку $2\ln_+|x(t)| \le \le |x(t)|^2$, звідки

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln_+|x(t)|}{1+t^2}\,dt < \infty,$$

а отже [7, с. 315],

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln|x(t)||}{1+t^2}\,dt < \infty.$$

Покладемо тепер $y(s) = \sigma(s)\,|x(s)|$. Оскільки

$$|y(s)|^2 = \exp\left(2(1+s^2)\frac{\ln|y(s)|}{1+s^2}\right) > \frac{2(1+s^2)\ln|y(s)|}{1+s^2} >$$
$$> \frac{\ln|y(s)|}{1+s^2} > \frac{\ln|x(s)|}{1+s^2} + \frac{\ln|\sigma(s)|}{1+s^2},$$

маємо

$$\int_{-\infty}^{\infty} |y(s)|^2\,ds = \infty,$$

що суперечить включенню $x \in L_2(\mathbb{R}^1, \sigma^2(t)\,dt)$. Теорему доведено.

Якщо A породжує C_0-групу в просторі $\mathfrak{B}$, то $-A^2$ є генератором півгрупи $\{e^{-tA^2}\}_{t\ge 0}$, аналітичної в правій площині. Ця півгрупа задається формулою

$$e^{-tA^2}x = (4\pi t)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2/4t} e^{sA} x\,ds.$$

З рівності $\mathfrak{G}_{\{0\}}(A) = \mathfrak{G}_{\{0\}}(A^2)$ випливає таке твердження.

Наслідок 2. *Існують генератори A півгруп, аналітичних у правій півплощині, для яких*

$$\mathfrak{G}_{\{0\}}(A) = \{0\}.$$

Якщо оператор A породжує півгрупу, аналітичну в правій півплощині, то його резольвента $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$ визначена на $\mathbb{C}\setminus(-\infty, \omega]$ з деяким $\omega \in \in \mathbb{R}^1$. Тому функція

$$M(t) = \sup_{|\mathrm{Im}\,\lambda| \ge t} \|R_\lambda(A)\|$$

є монотонно неспадною при $t \to 0$. Як показано в [4], за умови Левінсона

$$\int_0^1 \ln\ln M(t)\,dt < \infty$$

множина $\mathfrak{G}_{\{0\}}(A)$ є щільною в $\mathfrak{B}$.

2. Про розв'язність операторно-диференціальних рівнянь в класах цілих вектор-функцій. Розглянемо рівняння вигляду

$$y'(t) = Ay(t), \quad t \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty), \tag{7}$$

де A — замкнений лінійний оператор в $\mathfrak{B}$.

Вектор-функція $y(t)\colon \mathbb{R}_+ \mapsto \mathcal{D}(A)$ називається розв'язком рівняння (7) на $\mathbb{R}_+$, якщо $y \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathfrak{B}) \cap C(\mathbb{R}_+, \mathcal{D}(A))$ і задовольняє рівняння (7). Скрізь далі припускатимемо, що для рівняння (7) має місце єдиність розв'язку задачі Коші. Це означає, що рівність $y(0) = 0$ спричиняє тотожність $y(t) \equiv 0$ для довільного $t \in \mathbb{R}_+$.

Якщо $\mathcal{D}(A) = \mathfrak{B}$, тобто оператор A обмежений, то множина всіх розв'язків рівняння (7) на $\mathbb{R}_+$ описується виразом

$$y(t) = e^{tA} y_0, \tag{8}$$

де y_0 — довільний елемент простору $\mathfrak{B}$, а $e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k A^k / k!$. Зображення (8) показує, що кожний розв'язок $y(t)$ рівняння (11) на $\mathbb{R}_+$ допускає продовження до цілої вектор-функції експоненціального типу. У випадку, коли $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$ — гільбертів простір, а A — нормальний обмежений оператор в ньому, порядок росту $\rho(y)$ розв'язку $y(t)$ дорівнює одиниці, а його тип $\sigma(y)$ не перевищує $\|A\|$; більш того, $\sigma(y)$ дорівнює нулеві тоді і тільки тоді, коли $y_0 \in \ker A$. Проте неважко навести приклад обмеженого оператора A, для якого існують розв'язки рівняння (7) на $\mathbb{R}_+$ з наперед заданим порядком росту $\rho \in [0, 1)$ або типом $\sigma \in [0, \infty)$. Нагадаємо, що ціла вектор-функція $f(\lambda)$ має скінченний порядок росту, якщо при досить великих $|\lambda|$ $\|f(\lambda)\| \le \exp(|\lambda|^k)$ для деякого числа $k > 0$. Точна нижня межа таких k називається порядком росту $\rho(f)$ функції $f(\lambda)$. Під типом цілої вектор-функції $f(\lambda)$ порядку $\rho = \rho(f)$ розуміється число $\sigma(f) = \inf\{a > 0 : \|f(\lambda)\| \le \exp(a|\lambda|^\rho)\}$. Якщо $\sigma(f) = 0$, то говорять, що $f(\lambda)$ має мінімальний тип, а при $0 < \sigma(f) < \infty$ — нормальний тип. Якщо ж $\rho(f) \le 1$, то $f(\lambda)$ називається цілою функцією експоненціального типу. Як і в скалярному випадку [7], порядок і тип цілої вектор-функції

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda^k, \quad c_k \in \mathfrak{B},$$

знаходяться за формулами

$$\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n \ln n}{\ln(1/\|c_n\|)}, \quad (e\sigma\rho)^{1/\rho} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(n^{1/\rho} \sqrt[n]{\|c_n\|} \right). \tag{9}$$

Припустимо тепер, що оператор A необмежений. Тоді рівняння (7) може зовсім не мати розв'язків на $\mathbb{R}_+$, які продовжуються до цілих вектор-функцій. У наступній теоремі встановлено умови на вектор $y_0 \in \mathfrak{B}$, за яких існує розв'язок $y(t)$ рівняння (7) на $\mathbb{R}_+$, що задовольняє початкову умову $y(0) = y_0$ і допускає продовження до цілої вектор-функції.

Теорема 4. *Для того щоб розв'язок* $y(t)$ *рівняння* (7) *на* $\mathbb{R}_+$ *можна було продовжити до цілої вектор-функції, необхідно і достатньо, щоб* $y(0) \in \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)$. *Цей розв'язок є цілою вектор-функцією скінченного порядку росту* ρ *і нормального (мінімального) типу* σ *тоді і тільки тоді, коли* $y(0)$ *має порядок* p *і нормальний (мінімальний) тип* s, *які зв'язані з* ρ *та* σ *співвідношеннями*

$$\rho = \frac{1}{1-p}, \quad \sigma = \frac{(se)^{\rho}}{\rho e}.$$

Доведення. Припустимо, що розв'язок $y(t)$ рівняння (7) на $\mathbb{R}_+$ можна продовжити до цілої вектор-функції $y(\lambda)$. Оскільки при кожному $t \in \mathbb{R}_+$ $y(t) \in \mathcal{D}(A)$ і вектор-функція $y(t)$ нескінченно диференційовна, із замкненості оператора A і рівності

$$\frac{y'(t+\Delta t) - y'(t)}{\Delta t} = A\,\frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}$$

одержуємо $y'(t) \in \mathcal{D}(A)$, $t \in \mathbb{R}_+$, і $y''(t) = A\,y'(t)$. Звідси і з (7) випливає, що $y(t) \in \mathcal{D}(A^2)$, $t \in \mathbb{R}_+$, і

$$y''(t) = A^2 y(t).$$

Повторюючи ці міркування n разів, приходимо до висновку, що $y(t) \in \mathcal{D}(A^n)$, $t \in \mathbb{R}_+$, і

$$y^{(n)}(t) = A^n y(t). \tag{10}$$

Тоді для будь-якого $r > 0$

$$\left\| A^n y(0) \right\| = \left\| y^{(n)}(0) \right\| = \frac{n!}{2\pi} \left\| \int\limits_{|\lambda|=r} \frac{y(\lambda)}{\lambda^{n+1}} d\lambda \right\| \le c_r \alpha^n n^n,$$

де $c_r = \max\limits_{|\lambda|=r} \| y(\lambda) \|$, $\alpha = r^{-n}$. Оскільки r може бути як завгодно великим, $y(0) \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)$.

Нехай тепер розв'язок $y(t)$ рівняння (7) на $\mathbb{R}_+$ є цілою вектор-функцією $y(\lambda)$ порядку росту ρ і типу σ, тобто для довільного $\varepsilon > 0$

$$\| y(\lambda) \| \le c_\varepsilon \exp\left((\sigma + \varepsilon) |\lambda|^{\rho} \right), \quad c_\varepsilon = \text{const}.$$

Тоді, завдяки (10),

$$\left\| A^n y(0) \right\| = \left\| y^{(n)}(0) \right\| \le \frac{n!}{2\pi} \left\| \int\limits_{|\lambda|=r} \frac{\| y(\lambda) \|}{|\lambda|^{n+1}} d\lambda \right\| \le c_\varepsilon n! \frac{e^{(\sigma+\varepsilon) r^{\rho}}}{r^n}.$$

Враховуючи, що мінімум функції $e^{ar^{\rho}}/r^n$ досягається в точці $r = (n/a\rho)^{1/\rho}$, за допомогою формули Стірлінга

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}\,[1 + O(1/n)]$$

одержуємо

$$\left\| A^n y(0) \right\| < c\left(\left(e^{1-\rho} \sigma \rho \right)^{1/\rho} + \varepsilon_1 \right)^n n^{\frac{\rho-1}{\rho} n}. \tag{11}$$

Тут $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Остання нерівність показує, що цілий вектор $y(0)$ має скінченний порядок p, який задовольняє нерівність

$$p \leq \frac{\rho - 1}{\rho}. \tag{12}$$

Припустимо, навпаки, що для розв'язку $y(t)$ рівняння (7) на $\mathbb{R}_+$ $y_0 = y(0) \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)$. Тоді ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k A^k y_0 / k! = z(\lambda)$ збігається в $\mathfrak{B}$ для всіх $\lambda \in \mathbb{C}$ і ціла вектор-функція $z(\lambda)$ є розв'язком рівняння (7), що задовольняє умову $z(0) = y_0$. З єдиності розв'язку задачі Коші для цього рівняння випливає, що $z(t) \equiv y(t)$. Таким чином, $z(\lambda)$ — ціле продовження $y(t)$. Нехай y_0 має скінченний порядок p і тип s. Тоді на підставі (9) і формули Стірлінга для порядку ρ функції $y(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k A^k y_0 / k!$ маємо

$$\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n \ln n}{\ln \dfrac{n!}{\|A^n y_0\|}} \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n \ln n}{\ln \dfrac{n!}{c(\sigma+\varepsilon)^n n^{np}}} = \frac{1}{1-p}. \tag{13}$$

Із нерівностей (12) і (13) випливає

$$\rho = \frac{1}{1-p}.$$

Оскільки порядок росту вектор-функції $y(\lambda)$ скінченний, то її тип σ визначається з (9). Тому

$$(e\sigma\rho)^{1/\rho} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(n^{1/\rho} \sqrt[n]{\frac{\|A^n x\|}{n!}} \right) \leq$$

$$\leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(n^{1/\rho} \sqrt[n]{\frac{(s+\varepsilon)^{n\rho}}{n!} n^{n(1-1/\rho)}} \right) \leq e(s+\varepsilon).$$

Беручи до уваги, що $\varepsilon > 0$ може бути як завгодно малим, робимо висновок, що

$$(e\sigma\rho)^{1/\rho} \leq es.$$

Звідси і з нерівності (11) випливає, що $\sigma = (se)^{\rho} / \rho e$.

З теореми 4 видно, що якщо розв'язок $y(t)$, $y(0) = y_0$, рівняння (7) на $\mathbb{R}_+$ продовжується до цілої вектор-функції, то він може бути зображений у вигляді

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k y_0}{k!}, \tag{14}$$

де $y_0 = y(0) \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)$, причому формула (14) описує всі такі розв'язки. Розв'язки, що допускають ціле продовження скінченного порядку ρ і скінченного типу σ, описуються тим самим виразом, в якому y_0 — цілий вектор порядку $p = 1 - 1/\rho$ і типу $s = (e^{1-\rho}\sigma\rho)^{1/\rho}$.

***Наслідок* 3.** *Якщо розв'язок $y(t)$ рівняння (7) на $\mathbb{R}_+$ можна продовжити до цілої вектор-функції скінченного порядку росту ρ і скінченного типу, то для будь-якого $\lambda \in \mathbb{C}$ $y(\lambda) \in \mathfrak{G}_{\{p\}}(A)$ з $p = 1 - 1/\rho$.*

Доведення. Внаслідок зображення (14), в якому $y_0 \in \mathfrak{G}_{\{p\}}(A)$, маємо

$$\left\|A^n y(\lambda)\right\| \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\lambda|^k}{k!} \left\|A^{n+k} y_0\right\| \le c \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\lambda|^k}{k!} \alpha^{n+k} (n+k)^{p(n+k)} =$$

$$= c\alpha^n n^{pn} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\alpha\lambda|^k}{k!} k^{kp} (1+k/n)^{pn} (1+n/k)^{pk}.$$

З нерівностей

$$(1+k/n)^{pn} \le (1+k/n)^n \le e^n$$

та

$$(1+n/k)^{pk} \le (1+n/k)^k \le e^k$$

випливає, що

$$\left\|A^n y(\lambda)\right\| \le \tilde{c}(\alpha e)^n n^{pn},$$

де

$$\tilde{c} = \tilde{c}(\lambda) = c \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\alpha e \lambda|^k}{k!} k^{kp} < \infty,$$

а це означає, що $y(\lambda) \in \mathfrak{G}_{\{p\}}(A)$. Наслідок доведено.

Ведемо в просторі $\mathfrak{G}_{\{p\}}(A)$ топологію індуктивної границі банахових просторів $\mathfrak{G}_p^{\alpha}(A)$. Доведення теореми 4 показує, що задача Коші для рівняння (7) є коректною в такому сенсі: якщо $y_0^n, y_0 \in \mathfrak{G}_{\{p\}}(A)$ і $y_0^n \to y_0$ в топології простору $\mathfrak{G}_{\{p\}}(A)$, то розв'язки $y_n(\lambda): y_n(0) = y_0^n$ цього рівняння є цілими вектор-функціями скінченного порядку росту $\rho = 1/(1-p)$, їх типи рівномірно обмежені і $y_n(\lambda) \rightrightarrows y(\lambda)$ на довільному компакті $K \subset \mathbb{C}$.

3. Приклади. *3.1.* Нехай в рівнянні (7) $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$ — гільбертів простір, A — нормальний оператор, E_Δ — його спектральна міра.

Лема 1. *У зазначених припущеннях щодо оператора A для рівняння* (7) *має місце єдиність розв'язку задачі Коші.*

Доведення. Покладемо

$$v(t) = \int_{\Delta} e^{-\bar{\lambda}(t-t_0)} dE_\lambda x,$$

де вектор $x \in \mathfrak{H}$, компакт $\Delta \subset \mathbb{C}$ і точка $t_0 \in \mathbb{R}_+$ — довільні фіксовані. Вектор-функція $v(t)$ є розв'язком рівняння

$$v'(t) = -A^* v(t)$$

на $\mathbb{R}_+$, що задовольняє умову $v(t_0) = E_\Delta x \in \mathfrak{G}_{\{0\}}(A)$.

Нехай тепер $y(t)$ — розв'язок рівняння (7) такий, що $y(0) = 0$. Тоді

$$0 = \int_0^{t_0} (y'(t) - Ay(t), v(t))\, dt + \int_0^{t_0} \left(y(t), v'(t) + A^* v(t)\right) dt =$$

$$= (y(t), v(t))\Big|_0^{t_0} = (y(t_0), v(t_0)),$$

тобто

$$(y(t_0), E_\Delta x) = 0.$$

Внаслідок довільності x, Δ і t_0, $y(t) \equiv 0$ на $\mathbb{R}_+$. Лему доведено.

Позначимо через $S(A)$ множину всіх розв'язків рівняння (7) на $\mathbb{R}_+$, а через $\mathscr{E}(A)$ — підмножину з $S(A)$, що складається з таких розв'язків, котрі допускають продовження до цілих вектор-функцій експоненціального типу. Множина $S(A)$ описується [8] формулою

$$y(t) = e^{tA} y_0 = \int\limits_{\mathbb{C}} e^{tA} dE_\lambda y_0,$$

де

$$y_0 \in \mathfrak{H}, \quad \int\limits_{\mathbb{C}} |\lambda|^2 e^{2t \operatorname{Re} \lambda} d(E_\lambda y_0, y_0) < \infty \quad \forall\, t \in \mathbb{R}_+.$$

Теорема 5. *Нехай* $y \in S(A)$. *Тоді існує послідовність* $y_n \in \mathscr{E}(A)$ *така, що для довільного* $T > 0$

$$\max_{t \in [0,T]} \|y(t) - y_n(t)\| \to 0, \quad \max_{t \in [0,T]} \|y'(t) - y_n'(t)\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Доведення. Припустимо, що $y \in S(A)$, $y(0) = y_0$, і покладемо $\Delta_n = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \le n\}$, $\Delta_n' = \mathbb{C} \setminus \Delta_n$, $\Delta_n^- = \{\lambda \in \Delta_n' : \operatorname{Re} \lambda \le 0\}$, $\Delta_n^+ = \{\lambda \in \Delta_n' : \operatorname{Re} \lambda \ge 0\}$, $y_0^n = E_{\Delta_n} y_0$. Тоді з теорем 1, 4 випливає, що $y_n(t) = e^{tA} y_0^n \in \mathscr{E}(A)$, звідки при $t \in [0, T]$

$$\|y(t) - y_n(t)\|^2 = \int\limits_{\Delta_n'} e^{2t \operatorname{Re} \lambda} d(E_\lambda y_0, y_0) \le \int\limits_{\Delta_n^-} d(E_\lambda y_0, y_0) + \int\limits_{\Delta_n^+} e^{2T \operatorname{Re} \lambda} d(E_\lambda y_0, y_0) = \delta_n$$

і

$$\|y'(t) - y_n'(t)\|^2 = \|A(y'(t) - y_n'(t))\| = \int\limits_{\Delta_n'} |\lambda|^2 e^{2t \operatorname{Re} \lambda} d(E_\lambda y_0, y_0) \le$$

$$\le \int\limits_{\Delta_n^-} |\lambda|^2 d(E_\lambda y_0, y_0) + \int\limits_{\Delta_n^+} |\lambda|^2 e^{2T \operatorname{Re} \lambda} d(E_\lambda y_0, y_0) = \tilde{\delta}_n.$$

Оскільки $y_0 \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(e^{TA})$, то δ_n і $\tilde{\delta}_n$ прямують до нуля, коли $n \to \infty$. Теорему доведено.

3.2. Задача Коші для рівняння (7) називається рівномірно коректною на $\mathbb{R}_+$ [9], якщо існує щільна в $\mathfrak{B}$ множина D така, що для кожного $y_0 \in D$ існує єдиний розв'язок рівняння (7) з властивістю

$$y(0) = \lim_{t \to 0} y(t) = y_0$$

і $y_n(0) \to 0$, $n \to \infty$, зумовлює рівномірну збіжність $y_n(t) \to 0$ на будь-якому скінченному проміжку $[0, T]$. Як відомо [9], це буде тоді і тільки тоді, коли оператор A — генератор C_0-півгрупи. Але з рівномірної коректності цієї задачі ще не випливає існування нетривіального розв'язку рівняння (7) в класі цілих вектор-функцій. Наприклад, припустимо, що $\mathfrak{B} = L_2(\mathbb{R}_+)$,

$$(Af)(t) = -f'(t),$$

$\mathcal{D}(A) = \{f \in L_2(\mathbb{R}_+) : f$ є абсолютно неперервною, $f' \in L_2(\mathbb{R}_+)$, $f(0) = 0\}$.

Тоді рівність

$$-\operatorname{Re} \int\limits_0^\infty f'(t) \overline{f(t)} dt = \frac{1}{2} |f(0)|^2 = 0$$

показує, що оператор A кососиметричний. Оскільки при $\operatorname{Re}\lambda > 0$ для довільної функції $g \in L_2(\mathbb{R}_+)$ задача

$$-f'(t) - \lambda f(t) = g(t)$$

має єдиний розв'язок $f(t) = -\int_0^t e^{-\lambda(t-s)} g(s)\,ds \in L_2(\mathbb{R}_+)$, то оператор A є максимально дисипативним, а отже, генерує C_0-півгрупу $\{e^{tA}\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ ізометричних операторів в $L_2(\mathbb{R}_+)$. Неважко переконатись, що будь-який цілий вектор оператора A повинен бути цілою функцією, для якої $f^{(k)}(0) = 0$, $k \in \mathbb{N}_0$, що рівносильне тотожності $f(t) \equiv 0$.

Позначимо через $\mathcal{T}(A)$ множину всіх розв'язків рівняння (7) на $\mathbb{R}_+$, котрі допускають продовження до цілої вектор-функції.

Теорема 6. *Якщо A — генератор аналітичної півгрупи $\{e^{tA}\}_{t \in \mathbb{R}_+}$, то для довільного $y \in S(A)$ існує послідовність $y_n \in \mathcal{T}(A)$ така, що*

$$\forall\, T > 0 \quad \lim_{n \to \infty} \max_{t \in [0, T]} \| y(t) - y_n(t) \| = 0.$$

Доведення. Нехай $y \in S(A)$. Як показано в [9], $y(t)$ можна подати у вигляді

$$y(t) = e^{tA} y_0, \quad y_0 \in \mathcal{D}(A).$$

Внаслідок щільності $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$ в $\mathfrak{B}$ (див. [10]), існує послідовність $y_0^n \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)$ така, що $\| y_0^n - y_0 \| \to 0$ при $n \to \infty$. За теоремою 4 $y_n(t) = e^{tA} y_0^n \in \mathcal{T}(A)$ і

$$\| y(t) - y_n(t) \| = \| e^{tA} (y_0 - y_0^n) \| \le c_T \| y_0 - y_0^n \| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

де $c_T = \sup\limits_{t \in [0, T]} \| e^{tA} \|$. Теорему доведено.

З наслідку 2 випливає, що існують генератори аналітичних у правій півплощині півгруп, для яких $\mathcal{E}(A) = \{0\}$.

3.3. Припустимо, що оператор $-A$ генерує півгрупу $\{e^{-tA}\}_{t \in \mathbb{R}_+}$, аналітичну в деякому секторі $\Sigma_\theta = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda| < \theta\}$. Тоді [11] для довільного $\theta_1 < \theta$ існують сталі $M > 0$ та $\omega \in \mathbb{R}^1$ такі, що

$$\| e^{-\lambda A} \| \le M e^{\omega \operatorname{Re} \lambda}, \quad \lambda \in \Sigma_{\theta_1},$$

та

$$\| A^n e^{-tA} \| \le \frac{M^n n^n e^{\omega t}}{t^n}, \quad t \in (0, \infty). \tag{15}$$

Теорема 7. *Якщо $-A$ — генератор аналітичної півгрупи в $\mathfrak{B}$, то $S(A) = \mathcal{T}(A)$.*

Доведення. Нехай $y(t)$ — розв'язок рівняння (7) на $[0, T]$, $T > 0$. Тоді вектор-функція $z(t) = y(T - t)$, $t \in [0, T]$, задовольняє рівняння

$$z'(t) = -A z(t),$$

а тому $z(t) = e^{-tA} z(0)$, $z(0) = y(T) \in C^\infty(A)$. Покладаючи в (15) $t = T$, одержуємо

$$\| A^n y(0) \| = \| A^n z(T) \| \le e^{\omega T} \alpha^n n^n, \quad \alpha = M/T.$$

Оскільки при досить великих T α може бути як завгодно малим, приходимо до висновку, що $y(0) \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)$. Припустимо, що $y(0) = 0$. Тоді аналітичність півгрупи $\{e^{-tA}\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ і рівність $z(T) = y(0) = 0$ зумовлюють тотожність $y(t) = z(T-t) \equiv 0$ на $[0, T]$. Але $T > 0$ довільне. Отже, $y(t) \equiv 0$ на $\mathbb{R}_+$. Таким чином, для рівняння (7) має місце єдиність розв'язку задачі Коші. За теоремою 4 $y(t)$ допускає продовження до цілої вектор-функції. Теорему доведено.

З наслідку 2 випливає, що існує оператор A такий, що $-A$ генерує півгрупу, аналітичну у верхній півплощині, а $\mathcal{E}(A) = \{0\}$.

3.4. Нехай A — генератор C_0-групи $\{e^{tA}\}_{t \in \mathbb{R}^1}$ в $\mathfrak{B}$. Тоді задача Коші для рівняння (7) рівномірно коректна на $\mathbb{R}_+$ і множина $S(A)$ для цього рівняння описується [9] формулою

$$y(t) = e^{tA} y_0, \quad y_0 \in \mathcal{D}(A). \tag{16}$$

Множина $\mathcal{T}(A)$ у цьому випадку складається з тих і тільки тих вектор-функцій (16), в яких $y_0 \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)$. Якщо ж y_0 перебігає весь простір $\mathfrak{G}_{\{p\}}(A)$, то одержуємо множину $\mathcal{T}_\rho(A)$ всіх розв'язків рівняння (7), які можна продовжити до цілих вектор-функцій з порядком росту, що не перевищує $\rho = 1/(1-p)$.

З теорем $2-4$ випливає наступне твердження.

Теорема 8. *Нехай A — генератор C_0-групи $\{e^{tA}\}_{t \in \mathbb{R}^1}$. Тоді для будь-якого $\rho > 1$ множина $\mathcal{T}_\rho(A)$ є щільною в $S(A)$, тобто для довільного розв'язку $y(t)$ рівняння (7) існує послідовність $y_n \in \mathcal{T}_\rho(A)$, що збігається до y рівномірно на кожному сегменті $[-T, T]$, $0 < T < \infty$. Існують генератори C_0-груп, для яких $\mathcal{E}(A) = \{0\}$. Але якщо*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \| e^{tA} \|}{1+t^2} dt < \infty,$$

то $\overline{\mathcal{E}(A)} = S(A)$.

1. *Goodman R.* Analytic and entire vectors for representations of Lie groups // Trans. Amer. Math. Soc. – 1969. – **143**. – P. 55 – 76.
2. *Радыно Я. В.* Пространство векторов экспоненциального типа // Докл. АН БССР. – 1983. – **27**, № 9. – С. 791 – 793.
3. *Горбачук В. И., Князюк А. В.* Граничные значения решений дифференциально-операторных уравнений // Успехи мат. наук. – 1989. – **44**, вып. 3. – С. 55 – 91.
4. *Горбачук М. Л., Горбачук В. І.* Про наближення гладких векторів замкненого оператора цілими векторами експоненціального типу // Укр. мат. журн. – 1995. – **44**, № 5. – С. 616 – 628.
5. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 829 с.
6. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Пространства основных и обобщенных функций. – М.: Физматгиз, 1958. – 307 с.
7. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. – М.: Гостехтеориздат, 1956. – 632 с.
8. *Березанский Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель З. Г.* Функциональный анализ. – Киев: Выща шк., 1990. – 600 с.
9. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1967. – 464 с.
10. *Князюк А. В.* Граничные значения бесконечно дифференцируемых полугрупп. – Киев, 1985. – 47 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; № 85.69).
11. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. – М.: Мир, 1972. – 740 с.

Одержано 20.03.2000