УДК 517.98

М. Л. Горбачук, В. І. Горбачук (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО ОДНЕ УЗАГАЛЬНЕННЯ ЕВОЛЮЦІЙНОГО КРИТЕРІЮ БЕРЕЗАНСЬКОГО САМОСПРЯЖЕНОСТІ ОПЕРАТОРА

We describe all weak solutions of a first order differential equation in a Banach space on $(0, \infty)$ and study their behavior near zero. We use the results obtained to establish necessary and sufficient conditions of the essential maximal dissipativity of a dissipative operator in a Hilbert space.

Описуються всі слабкі розв'язки на $(0, \infty)$ диференціального рівняння першого порядку в банаховому просторі та вивчається їх поведінка в околі нуля. Результати застосовуються для встановлення необхідних і достатніх умов істотної максимальної дисипативності дисипативного оператора у гільбертовому просторі.

1. Розглянемо рівняння

$$\frac{dy(t)}{dt} + Ay(t) = 0, \quad t \in (0, b), \quad b \leq \infty, \tag{1}$$

де A — лінійний оператор в комплексному банаховому просторі $\mathfrak{B}$, $\overline{\mathcal{D}(A)} = \overline{\mathcal{D}(A^*)} = \mathfrak{B}$. Вектор-функція $y(t)\colon [0, b) \mapsto \mathcal{D}(A)$ називається сильним розв'язком рівняння (1) на проміжку $[0, b)$, якщо вона неперервно диференційовна на цьому проміжку і при кожному $t \in [0, b)$ задовольняє рівняння (1). Під слабким розв'язком рівняння (1) на $(0, b)$ розумітимемо сильно неперервну на $(0, b)$ вектор-функцію $y(t)$ із значеннями в $\mathfrak{B}$ таку, що для довільного $g \in \mathcal{D}(A^*)$ скалярна функція $\langle y(t), g\rangle$ є диференційовною на $(0, b)$ і задовольняє рівняння

$$\frac{d}{dt}\langle y(t), g\rangle + \langle y(t), A^* g\rangle = 0, \quad t \in (0, b) \tag{2}$$

($\langle x, g\rangle$ позначає дію функціонала $g \in \mathcal{D}(A^*)$ на вектор $x \in \mathfrak{B}$).

Будемо говорити, що для рівняння (1) на $[0, b)$ має місце єдиність сильних (слабких) розв'язків задачі Коші, якщо кожний сильний (неперервний в нулі слабкий) розв'язок $y(t)$ цього рівняння на $[0, b)$, для якого $y(0) = 0$, *анулюється* на всіх $t \in [0, b)$. Зауважимо, що якщо єдиність сильних розв'язків виконується на $[0, b)$ при деякому $b > 0$, то вона виконується і на всій півосі $[0, \infty)$.

Якщо оператор A — генератор півгрупи $\{e^{-At}\}_{t \geq 0}$ класу C_0 [1, с. 7], то множина всіх сильних розв'язків рівняння (1) задається формулою

$$y(t) = e^{-At}x, \tag{3}$$

де $x \in \mathcal{D}(A)$. Неважко бачити, що при $x \in \mathfrak{B}$ вектор-функція $e^{-At}x$ є слабким розв'язком цього рівняння, неперервним в точці нуль. Як показано в [2], всі такі розв'язки описуються виразом (3), в якому вектор x перебігає весь простір $\mathfrak{B}$. Мета цієї роботи — знайти всі слабкі розв'язки рівняння (1) на $(0, \infty)$, дослідити їх поведінку в нулі та застосувати ці результати до відшукання умов, за яких дисипативний оператор в гільбертовому просторі є істотно максимально дисипативним.

2. У цьому пункті припускається, що оператор A генерує в просторі $\mathfrak{B}$ півгрупу стиску $\{e^{-At}\}_{t \geq 0}$ класу C_0 з властивістю $\ker e^{-At} = \{0\}$ при $t > 0$.

Лема 1. *Нехай* $y(t)$ — *слабкий розв'язок рівняння* (1) *на* $(0,\infty)$. *Тоді*

$$e^{-At}y(s) = y(t+s), \qquad t,s>0. \tag{4}$$

Доведення. Покладемо

$$f_s(t) = \langle e^{-At}y(s-t), g\rangle, \qquad s>0, \quad t\in[0,s), \quad g\in\mathcal{D}(A^*).$$

Тоді для досить малих $h>0$

$$\frac{f_s(t+h)-f_s(t)}{h} = \left\langle \frac{y(s-(t+h))-y(s-t)}{h}, \left(e^{-At}\right)^* g\right\rangle +$$

$$+\left\langle y(s-(t+h)), \frac{\left(e^{-A(t+h)}\right)^* g-\left(e^{-At}\right)^* g}{h}\right\rangle.$$

Оскільки [1, с. 76] при $t>0$ має місце включення $(e^{-At})^*\mathcal{D}(A^*)\subseteq\mathcal{D}(A^*)$, то диференційовність при $t>0$ функції $\langle y(t), g\rangle$, $g\in\mathcal{D}(A^*)$, зумовлює існування границі при $h\to 0$ першого доданка зазначеної вище тотожності. Ця границя дорівнює $-\langle y(s-t), A^*e^{-A^*t}g\rangle$. Із сильної неперервності $y(s)$ при $s>0$ і диференційовності при $t>0$ функції $\langle x, (e^{-At})^*g\rangle$, $x\in\mathfrak{B}$, $g\in\mathcal{D}(A^*)$ [1, с. 76], випливає, що існує границя при $h\to 0$ другого доданка цієї тотожності, і вона дорівнює $\langle y(s-t), A^*e^{-A^*t}g\rangle$. Таким чином, функція $f_s(t)$ диференційовна на $[0,s)$ і її похідна обертається в нуль на цьому проміжку. Отже, $f_s(t)=\langle e^{-At}y(s-t), g\rangle = f_s(0)=\langle y(s), g\rangle$. Враховуючи щільність $\mathcal{D}(A^*)$ в $\mathfrak{B}$, одержуємо $e^{-At}y(s-t)=y(s)$, що рівнозначне (4). Лему доведено.

У просторі $\mathfrak{B}$ введемо систему норм $\|x\|_{-t}=\|e^{-At}x\|$, $t>0$. Поповнення $\mathfrak{B}$ за нормою $\|\cdot\|_{-t}$ позначимо $\mathfrak{B}_{-t}$. Оскільки $\{e^{-At}\}_{t\geq 0}$ — півгрупа стиску, то $\|x\|_{-t}\leq\|x\|$ і

$$\|e^{-At}x\|_{-t} = \|e^{-2At}x\| \leq \|e^{-At}x\| = \|x\|_{-t},$$

тобто при кожному $t>0$ оператор e^{-At} допускає неперервне продовження $\tilde{U}(t)$ з $\mathfrak{B}$ на $\mathfrak{B}_{-t}$. Більш того, на підставі рівності

$$\left\|\tilde{U}(t)x\right\| = \|e^{-At}x\| = \|x\|_{-t}, \qquad x\in\mathfrak{B},$$

можна зробити висновок, що $\left\|\tilde{U}(t)x\right\|=\|x\|_{-t}$ і для елементів $x\in\mathfrak{B}_{-t}$, тобто оператор $\tilde{U}(t)$ відображає $\mathfrak{B}_{-t}$ в $\mathfrak{B}$ ізометрично.

Покажемо, що при $0<s<t$ має місце включення $\mathfrak{B}_{-s}\subseteq\mathfrak{B}_{-t}$. Оскільки

$$\|x\|_{-t} = \|e^{-At}x\| = \|e^{-A(t-s)}e^{-As}x\| \leq \|e^{-As}x\| = \|x\|_{-s}, \tag{5}$$

норми $\|x\|_{-s}$ та $\|x\|_{-t}$ порівнянні на $\mathfrak{B}$. Крім цього, ці норми узгоджені на $\mathfrak{B}$. Дійсно, нехай $x_n\in\mathfrak{B}$, $\|x_n\|_{-t}\to 0$, коли $\mathbb{N}\ni n\to\infty$, і послідовність x_n фундаментальна в $\mathfrak{B}_{-s}$, що еквівалентне фундаментальності послідовності $y_n=e^{-As}x_n$ в $\mathfrak{B}$. Внаслідок повноти $\mathfrak{B}$ y_n збігається до деякого $y\in\mathfrak{B}$, а тому

$$\| x_n \|_{-t} = \| e^{-At} x_n \| = \| e^{-A(t-s)} y_n \| \to \| e^{-A(t-s)} y \|.$$

Оскільки $\| x_n \|_{-t} \to 0$, то $e^{-A(t-s)} y = 0$. Але, за припущенням, $\ker e^{-A\xi} = \{0\}$ для довільного $\xi > 0$, звідки $y = 0$, а це означає, що $x_n \to 0$ у просторі $\mathfrak{B}_{-s}$, тобто узгодженість норм $\| x \|_{-t}$ і $\| x \|_{-s}$. Отже, при $0 < s < t$ маємо ланцюжок $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{B}_{-s} \subseteq \mathfrak{B}_{-t}$, в якому всі вкладення щільні і завдяки (5) неперервні.

Покладемо

$$\mathfrak{B}_{-} = \operatorname{proj} \lim_{t \to 0} \mathfrak{B}_{-t}.$$

Очевидно, що $\mathfrak{B}_{-}$ — повний локально опуклий простір, що містить $\mathfrak{B}$. Зауважимо, що для його отримання досить розглядати проективну границю просторів $\mathfrak{B}_{-1/n}$, $n \in \mathbb{N}$. Отже, простір $\mathfrak{B}_{-}$ є зліченно нормованим. Визначимо на $\mathfrak{B}_{-}$ сім'ю операторів $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ як

$$U(t)x = \tilde{U}(t)x \quad \text{при} \quad t > 0; \qquad U(0)x = x.$$

Неважко бачити, що $U(t)x = e^{-At}x$, якщо $x \in \mathfrak{B}$.

Теорема 1. *Оператори $U(t)$, $t > 0$, відображають $\mathfrak{B}_{-}$ в $\mathfrak{B}$. Сім'я $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ утворює одностайно неперервну півгрупу класу C_0 у просторі $\mathfrak{B}_{-}$, і при $t, s > 0$*

$$U(t+s)x = e^{-At}U(s)x = e^{-As}U(t)x, \quad x \in \mathfrak{B}_{-}. \tag{6}$$

Доведення. Перше твердження теореми випливає з того, що оператор $\tilde{U}(t)$ діє ізометрично з $\mathfrak{B}_{-t}$ в $\mathfrak{B}$. Тому $\tilde{U}(t)$ — неперервний оператор в просторі $\mathfrak{B}_{-}$ при кожному $t \geq 0$. Очевидно, що рівності (6) є вірними при $x \in \mathfrak{B}$. Оскільки для заданих $x \in \mathfrak{B}_{-}$ і $s > 0$ існує послідовність $x_n \in \mathfrak{B}$, що збігається до x у просторі $\mathfrak{B}_{-s}$, то, переходячи до границі в рівності $U(t+s)x_n = e^{-At}e^{-As}x_n$, одержуємо перше співвідношення в (6). Аналогічно, замінюючи s на t, приходимо до другої рівності в (6). Отже, сім'я $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ утворює півгрупу в $\mathfrak{B}_{-}$.

Доведемо, що $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ — півгрупа класу C_0. Дійсно, для будь-яких $s > 0$ і $x \in \mathfrak{B}_{-}$

$$\| U(t)x - x \|_{-s} = \| U(s)(U(t)x - x) \| = \| (U(t) - I)U(s)x \| =$$

$$= \| (e^{-At} - I)U(s)x \| \to 0 \quad \text{при} \quad t \to 0.$$

Оскільки

$$\| U(t)x \|_{-s} = \| U(s)U(t)x \| = \| e^{-At}U(s)x \| \leq \| U(s)x \| = \| x \|_{-s},$$

півгрупа $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ одностайно неперервна. Теорему доведено.

Теорема 2. *Будь-який слабкий розв'язок $y(t)$ рівняння* (1) *на* $(0, \infty)$ *має границю y_0 в точці нуль у просторі $\mathfrak{B}_{-}$, і*

$$y(t) = U(t)y_0. \tag{7}$$

Яким би не був елемент $y_0 \in \mathfrak{B}_{-}$, вектор-функція (7) *є слабким розв'язком рівняння* (1) *на* $(0, \infty)$.

Доведення. Нехай $y(t)$ — слабкий розв'язок рівняння (1) на $(0, \infty)$. Тоді за лемою 1 для довільного $t > 0$ і будь-яких $s, s' > 0$ маємо

$$\| y(s) - y(s') \|_{-t} = \| e^{-At}(y(s) - y(s')) \| = \| y(s+t) - y(s'+t) \|.$$

Оскільки вектор-функція $y(s)$ неперервна в точці t, то $\| y(s) - y(s') \|_{-t} \to 0$ при $s' \to 0$, а це означає, що в просторі $\mathfrak{B}_-$ існує границя y_0 вектор-функції $y(s)$ при $s \to 0$.

Покажемо тепер, що для кожного $x_0 \in \mathfrak{B}_-$ вектор-функція $y(t) = U(t)x_0$ є слабким розв'язком рівняння (1) на $(0, \infty)$, неперервним в нулі в топології $\mathfrak{B}_-$. Для цього досить довести, що для довільного фіксованого $t_0 > 0$ $y(t)$ — слабкий розв'язок (1) на проміжку $[t_0, \infty)$, тобто $y(t)$ — сильно неперервна в $\mathfrak{B}$ на $[t_0, \infty)$ і задовольняє рівняння (2) на цьому проміжку. Оскільки при $t > t_0$

$$y(t) = U(t)x_0 = U(t - t_0 + t_0)x_0 = U(t - t_0)U(t_0)x_0 = e^{-A(t-t_0)}U(t_0)x_0,$$

$U(t_0)x_0 \in \mathfrak{B}$, а $U(t - t_0)$ сильно неперервна на $[t_0, \infty)$ в $\mathfrak{B}$, то, як зазначалось в пункті 1, $y(t)$ — слабкий розв'язок рівняння (1) на $[t_0, \infty)$ і, отже, на $(0, \infty)$. За теоремою 1 $y(t) \to x_0$ у просторі $\mathfrak{B}_-$ при $t \to 0$, тобто вектор-функція $y(t)$ є неперервною в нулі в $\mathfrak{B}_-$.

Нехай тепер $y(t)$ — довільний слабкий розв'язок рівняння (1) на $(0, \infty)$. Тоді $y(t)$ має границю в точці 0 у просторі $\mathfrak{B}_-$. Позначимо її через y_0. Покладемо $z(t) = y(t) - U(t)y_0$. Вектор-функція $z(t)$ — слабкий розв'язок рівняння (1) на $(0, \infty)$, що прямує до нуля у просторі $\mathfrak{B}_-$ при $t \to 0$, тобто для будь-якого $s > 0$ $\| z(t) \|_{-s} \to 0$ при $t \to 0$. Співвідношення

$$\| z(t) \|_{-s} = \| e^{-As} z(t) \| = \| z(t+s) \| \to \| z(s) \|$$

зумовлюють рівність $z(s) = 0$ при $s > 0$. Теорему доведено.

Таким чином, формула (7) з $y_0 \in \mathfrak{B}_-$ дає всі слабкі розв'язки рівняння (1) на $(0, \infty)$.

Півгрупа $\{ e^{-At} \}_{t \geq 0}$ називається диференційовною, якщо для кожного $x \in \in \mathfrak{B}$ вектор-функція $e^{-At}x$ є диференційовною на $(0, \infty)$. Якщо півгрупа $\{ e^{-At} \}_{t \geq 0}$ диференційовна на $(0, \infty)$, то вона є нескінченно диференційовною на цьому проміжку [3, с. 53].

***Наслідок* 1.** *Нехай A — генератор нескінченно диференційовної (аналітичної) півгрупи класу C_0. Тоді будь-який слабкий розв'язок рівняння* (1) *на* $(0, \infty)$ *є нескінченно диференційовним (аналітичним) на* $(0, \infty)$.

Доведення. Досить довести, що кожний слабкий розв'язок $y(t)$ рівняння (1) на $(0, \infty)$ є нескінченно диференційовним (аналітичним) на інтервалі (t_0, ∞) з довільним $t_0 > 0$.

З теореми 1 і зображення (7) випливає, що при $t > t_0$ $y(t) = e^{-A(t-t_0)}U(t_0)y_0$. Оскільки за теоремою 1 $U(t_0)y_0 \in \mathfrak{B}$, остання рівність зумовлює нескінченну диференційовність (аналітичність) $y(t)$ на $(0, \infty)$. Наслідок доведено.

Зауважимо, що опис сильних розв'язків рівняння (1) на $(0, \infty)$ у випадку, коли півгрупа $\{ e^{-At} \}_{t \geq 0}$ є нескінченно диференційовною, наведено в [4], а в частинному випадку, коли A — додатний самоспряжений оператор в гільбертовому просторі, — в [5], і цей опис повністю збігається з наведеним вище. Підкреслимо лише, що у порівнянні з [4, 5] у даній роботі узагальнення відбувається у двох напрямках: 1) замість сильних розглядаються слабкі розв'язки рівняння (1) на $(0, \infty)$; 2) відсутня умова гладкості півгрупи $\{ e^{-At} \}_{t \geq 0}$ на $(0, \infty)$.

Під слабкою задачею Коші для рівняння (1) будемо розуміти задачу відшукання слабкого розв'язку $y(t)$ цього рівняння на $(0, \infty)$, що задовольняє умову

$$\lim_{t \to 0} y(t) = y_0 \in \mathfrak{B}_-, \tag{8}$$

де границя береться в топології простору $\mathfrak{B}_-$.

З теореми 2 безпосередньо випливає таке твердження.

Наслідок 2. *Яким би не був вектор* $y_0 \in \mathfrak{B}_-$, *слабка задача Коші* (1), (8) *однозначно розв'язна і її розв'язок* $y(t)$ *має вигляд* (7).

3. Як показує теорема 2, будь-який слабкий розв'язок рівняння (1) має границю у просторі $\mathfrak{B}_-$ при $t \to 0$. Природно виникає питання про знаходження тих слабких розв'язків, границі яких у нулі існують у вихідному просторі $\mathfrak{B}$. Якщо A — генератор неперервної групи в рефлексивному банаховому просторі, то $\mathfrak{B}_{-t} = \mathfrak{B}$ для будь-якого $t > 0$, тобто $\mathfrak{B}_- = \mathfrak{B}$. А це означає, що в розглядуваному випадку кожний слабкий розв'язок рівняння (1) на $(0, \infty)$ є неперервним в $\mathfrak{B}$. У загальній ситуації це не так. Стосовно цього має місце наступна теорема.

Теорема 3. *Нехай A — генератор півгрупи стиску класу C_0 в рефлексивному банаховому просторі $\mathfrak{B}$, і $\ker e^{-At} = \{0\}$ при $t > 0$. Слабкий розв'язок $y(t)$ рівняння* (1) *на* $(0, \infty)$ *має границю при $t \to 0$ в просторі $\mathfrak{B}$ тоді і тільки тоді, коли*

$$\| y(t) \| \leq c < \infty, \qquad c = \text{const}. \tag{9}$$

Доведення. Те, що нерівність (9) виконується для кожного слабкого розв'язку рівняння (1) на $(0, \infty)$, який має границю при $t \to 0$ у просторі $\mathfrak{B}$, очевидно. Навпаки, нехай слабкий розв'язок $y(t)$ рівняння (1) на $(0, \infty)$ задовольняє умову (9). За теоремою Банаха – Алаоглу [6] існує послідовність $t_n \to 0$ така, що $y(t_n)$ слабко прямує при $n \to \infty$ до деякого елемента $z_0 \in \mathfrak{B}$, тобто для довільного $f \in \mathfrak{B}^*$ $\lim\limits_{n \to \infty} \langle y(t_n) - z_0, f \rangle = 0$. З теореми 2 випливає, що $\lim\limits_{n \to \infty} \langle y(t_n) - y_0, F \rangle = 0$ для будь-якого $F \in \mathfrak{B}_-^*$. Включення $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{B}_-$ спричиняє $\mathfrak{B}_-^* \subseteq \mathfrak{B}^*$. Тому $\langle z_0 - y_0, F \rangle = 0$ для довільного $F \in \mathfrak{B}_-^*$, а отже, $z_0 - y_0 = 0$. Теорему доведено.

Теорема 3 стверджує, що обмеженість в околі нуля слабкого розв'язку рівняння (1) на $(0, \infty)$ в нормі простору $\mathfrak{B}$ еквівалентна його неперервності в точці 0 у просторі $\mathfrak{B}$. Підкреслимо, що тут суттєву роль відіграє рефлексивність $\mathfrak{B}$. Можна навести приклади нерефлексивних $\mathfrak{B}$, в яких зазначена обмеженість слабкого розв'язку не зумовлює ні його неперервності в нулі, ані зображення (7) з $y_0 \in \mathfrak{B}$. Так, з обмеженості гармонічної в крузі або півплощині функції на концентричних колах або, відповідно, на прямих, паралельних дійсній осі, в просторі L_1 ще не випливає існування її границі в цьому просторі при наближенні до межі області [7, с. 55 – 62; 172 – 178]. Зауважимо також, що теорема 1 містить в собі чимало відомих результатів з теорії граничних значень розв'язків диференціальних рівнянь в різноманітних функціональних просторах (їх частковий огляд див. в [8]).

Слід відзначити, що скрізь в теоремах півгрупу стиску можна замінити на довільну півгрупу класу C_0. Адже нас цікавить поведінка останньої лише в околі нуля. Тому в розглядуваній ситуації вона завжди може бути зведена до півгрупи стиску.

4. Лінійний, щільно заданий в сепарабельному гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$

оператор A називається дисипативним, якщо $\Re(Af, f) \geq 0$ для довільного $f \in \mathcal{D}(A)$ ($(\cdot, \cdot)$ — скалярний добуток в $\mathfrak{H}$). Дисипативний оператор завжди допускає замикання $\overline{A}$, і будь-яка точка півплощини $\Re\lambda < 0$ є для нього точкою регулярного типу [9, с. 106 – 118]. За визначенням дисипативний оператор є максимально дисипативним, якщо він не має нетривіальних дисипативних розширень в $\mathfrak{H}$, та істотно максимально дисипативним, якщо його замикання максимально дисипативне. Якщо оператор A дисипативний і рівність $(A - \lambda I)\mathcal{D}(A) = \mathfrak{H}$ виконується для якого-небудь $\lambda : \Re\lambda < 0$, тоді ця рівність має місце для будь-якого λ з $\Re\lambda < 0$. Остання умова є необхідною і достатньою для максимальної дисипативності оператора A.

Припустимо, що дисипативний оператор A не є істотно максимально дисипативним. Тоді для $\lambda : \Re\lambda < 0$ маємо $(A - \lambda I)\mathcal{D}(A) \neq \mathfrak{H}$. Покладемо

$$\mathfrak{N}_\lambda = \mathfrak{H} \ominus (A - \lambda I)\mathcal{D}(A).$$

Очевидно, що рівність $f + u = 0$ для $f \in \mathcal{D}(A)$, $u \in \mathfrak{N}_\lambda$ рівносильна рівностям $f = 0$, $u = 0$. Отже, на множині $\mathcal{D}(A_\lambda) = \mathcal{D}(\overline{A}) \dotplus \mathfrak{N}_\lambda$ можна визначити оператор A_λ:

$$A_\lambda(f + u) = \overline{A}f - \overline{\lambda}u.$$

Безпосередня перевірка показує, що оператор A_λ ($\Re\lambda < 0$) максимально дисипативний. Ясно також, що $A \subseteq A_\lambda$ і $A_{\lambda_1} \neq A_{\lambda_2}$ при $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Звідси випливає, що кожний дисипативний оператор, який не є істотно максимально дисипативним, допускає безліч максимально дисипативних розширень у просторі $\mathfrak{H}$.

Теорема 4. *Для того щоб дисипативний оператор A в $\mathfrak{H}$ був істотно максимально дисипативним, необхідно і достатньо, щоб для рівняння*

$$\frac{dy(t)}{dt} + A^* y(t) = 0 \tag{10}$$

на $[0, \infty)$ мала місце єдиність слабких розв'язків задачі Коші.

Доведення. Нехай для рівняння (10) на $[0, \infty)$ має місце єдиність слабких розв'язків задачі Коші і припустимо, що оператор $\overline{A}$ не є максимально дисипативним. Тоді існують два різних його максимально дисипативних розширення A_1 і A_2 в $\mathfrak{H}$. Оператори A_1^* і A_2^*, як відомо [9, с. 106], є також максимально дисипативними, а тому генерують півгрупи стиску $\left\{e^{-A_1^* t}\right\}_{t \geq 0}$ та $\left\{e^{-A_2^* t}\right\}_{t \geq 0}$ відповідно. Перевіримо, що для довільного $x \in \mathcal{D}(A)$ вектор-функції $y_i(t) = e^{-A_i^* t}x$, $i = 1, 2$, є слабкими розв'язками рівняння (10) на $[0, \infty)$. Дійсно, якщо $g \in \mathcal{D}(A)$, то

$$\frac{d}{dt}(y_i(t), g) = \frac{d}{dt}\left(e^{-A_i^* t}x, g\right) = \frac{d}{dt}\left(x, e^{-A_i t}g\right) = -\left(x, e^{-A_i t}A_i g\right) = -(y_i(t), A_i g).$$

Зрозуміло, що $y_1(0) = y_2(0) = x$, звідки $e^{-A_1^* t}x \equiv e^{-A_2^* t}x$, $t \in [0, \infty)$, при $x \in \mathcal{D}(A)$. Внаслідок щільності $\mathcal{D}(A)$ в $\mathfrak{B}$ остання тотожність є вірною і для будь-якого $x \in \mathfrak{B}$. Отже, $A_1^* = A_2^*$, тобто $A_1 = A_2$, а це суперечить припущенню. Таким чином, оператор A істотно максимально дисипативний. Необхідність випливає з наслідку 2. Теорему доведено.

Припустимо тепер, що оператор A симетричний в $\mathfrak{H}$. Нагадаємо, що A називається істотно максимально симетричним (істотно самоспряженим), якщо його замикання $\overline{A}$ не допускає симетричних (самоспряжених) розширень в $\mathfrak{H}$. Симетричність A еквівалентна дисипативності операторів $\pm iA$. Істотна максимальна симетричність (істотна самоспряженість) A рівносильна дисипативності операторів $\pm iA$ та максимальній дисипативності одного (обох) з них. З теореми 4 випливає наступне твердження.

***Наслідок* 3.** *Для того щоб симетричний оператор A в $\mathfrak{H}$ був істотно максимально симетричним (істотно самоспряженим), необхідно і достатньо, щоб для одного (обох) з рівнянь*

$$\frac{dy(t)}{dt} \pm iA^*y(t) = 0 \tag{11}$$

на $[0, \infty)$ мала місце єдиність слабких розв'язків задачі Коші.

Відзначимо, що у випадку істотної самоспряженості це твердження було встановлене Ю. М. Березанським [10, с. 392]. Критерій істотної самоспряженості з тією лише відмінністю, що єдиність слабких розв'язків замінюється на єдиність сильних розв'язків, міститься в [11, с. 448]. Таку ж заміну можна зробити і в наслідку 3 і отримати наступне твердження: симетричний оператор A є істотно максимально симетричним (істотно самоспряженим) тоді і тільки тоді, коли для одного (обох) з рівнянь (11) на $[0, b)$ при деякому $b > 0$ має місце єдиність сильних розв'язків задачі Коші. Це пояснюється тим, що для симетричних розширень A_i оператора A маємо $A \subset A_i \subset A^*$ і $A \subset A_i^* \subset A^*$, а тому при $x \in \mathcal{D}(A)$ вектор-функції $e^{-A_i^* t}x$ є сильними розв'язками рівняння (11).

5. Нехай, як і раніше, A — дисипативний оператор в $\mathfrak{H}$. Вектор $x \in C^\infty(A) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0=\{0,1,2,\ldots\}} \mathcal{D}(A^n)$ називається квазіаналітичним вектором оператора A, якщо для довільного $b \in (0, \infty)$ клас функцій—$C^\infty(A)$

$$C_{\{\|A^n x\|\}} = \left\{\varphi \in C^\infty([0,b]) \,\middle|\, \exists\alpha > 0, \exists c > 0\colon \sup_{t\in[0,b]}\left|\varphi^{(k)}(t)\right| \le c_b \alpha^k \left\|A^k x\right\|,\ k \in \mathbb{N}_0\right\}$$

($c_b = \text{const}$, $\alpha = \text{const}$) є квазіаналітичним. Останнє означає, що із рівності нулю функції $\varphi \in C_{\{\|A^n x\|\}}$ та всіх її похідних в деякій точці $t_0 \in [0, \infty)$ випливає її тотожна рівність нулеві на $[0, \infty)$. Множину всіх квазіаналітичних векторів оператора A позначимо через $Q(A)$. Очевидно, що при $\beta \le 1$ $Q(A) \supseteq \mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$, де

$$\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A) = \left\{x \in C^\infty(A) \,\middle|\, \exists\alpha > 0, \exists c > 0 : \left\|A^k x\right\| \le c\alpha^k k^{k\beta},\ k \in \mathbb{N}_0\right\}.$$

Теорема 5. *Якщо $\overline{Q(A)} = \mathfrak{H}$, то оператор A істотно максимально дисипативний.*

Доведення. Нехай $y(t)$ — слабкий розв'язок рівняння (10) на $[0, \infty)$. Тоді для довільного $x \in Q(A)$ функція $\varphi_x(t) = (y(t), x)$ нескінченно диференційовна на $[0, \infty)$ і

$$\varphi_x^{(n)}(t) = (-1)^n (y(t), A^n x), \quad \varphi^{(n)}(0) = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Оскільки

$$\left|\varphi_x^{(n)}(t)\right| \le c_b \left\|A^n x\right\|,$$

де $c_b = \sup_{t\in[0,b]} \|y(t)\|$, функція $\varphi_x(t)$ належить до класу $C_{\{\|A^n x\|\}}$. Внаслідок квазіаналітичності цього класу $\varphi_x(t) \equiv 0$ на $[0, \infty)$. Щільність $Q(A)$ в $\mathfrak{H}$

зумовлює тотожність $y(t) \equiv 0$ на $[0, \infty)$. За теоремою 4 оператор A є істотно максимально дисипативним. Теорему доведено.

У випадку, коли множина $\mathfrak{G}_{\{1\}}(A)$ аналітичних векторів оператора A щільна в $\mathfrak{H}$, істотна максимальнадисипативність оператора A доведена в [12, с. 112].

Зауважимо, що на відміну від випадку самоспряженого оператора, щільність множини $Q(A)$ квазіаналітичних векторів максимально дисипативного оператора A не є обов'язковою. Так, якщо $\mathfrak{H} = L_2([0, 1])$, $A\varphi = \varphi'$, $\mathcal{D}(A) = \{\varphi \in W_2^1([0,1]) \mid \varphi(0) = 0\}$, то, як нескладно переконатися, оператор A є максимально дисипативним, проте $Q(A) = \{0\}$.

Неважко також бачити, що при $\beta > 1$ $\overline{\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)} = \mathfrak{H}$ для довільного максимально дисипативного оператора A. Якщо A — секторіальний оператор, тобто його числова область $\{(Af, f), f \in \mathcal{D}(A)\}$ лежить в секторі $\{z : |\arg z| \leq \alpha\pi/2\}$, $0 \leq \alpha < 1$, то A є максимально секторіальним тоді і тільки тоді, коли $\overline{Q(A)} = \mathfrak{H}$. Як показано в [13], оператор A буде істотно максимально секторіальним навіть тоді, коли $\overline{\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)} = \mathfrak{H}$ з $\beta = 2 - \alpha$, $0 \leq \alpha < 1$.

1. *Клемент Ф., Хейманс Х., Ангенент С., ван Дуйн К., де Пахтер Б.* Однопараметрические полугруппы. – М.: Мир, 1992. – 351 с.
2. *Ball J. M.* Strongly continuous semigroups, weak solutions, and the variation constants formula // Proc. Amer. Math. Soc. – 1977. – **63**, № 2. – P. 370–373.
3. *Pazy A.* Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. – New York etc.: Springer-Verlag, 1983. – 275 p.
4. *Князюк А. В.* Граничные значения решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1984. – № 19. – С. 12–14.
5. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные значения решений некоторых классов дифференциальных уравнений // Мат. сб. – 1977. – **102**, № 1. – С. 124–150.
6. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1977. – 354 с.
7. *Гофман К.* Банаховы пространства аналитических функций. – М.: Изд-во иностр. лит., 1963. – 312 с.
8. *Горбачук В. И., Князюк А. В.* Граничные значения решений дифференциально-операторных уравнений // Успехи мат. наук. – 1989. – **44**, № 3. – С. 55–91.
9. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1967. – 464 с.
10. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 800 с.
11. *Березанский Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель З. Г.* Функциональный анализ. – Киев: Выща шк., 1990. – 600 с.
12. *Голдстейн Дж.* Полугруппы линейных операторов и их приложения. – Киев: Выща шк., 1989. – 347 с.
13. *El Koutri A.* Vecteurs α-quasi analytiques et semi-groupes analytiques // C. r. Acad. sci. Ser. I. – 1989. – **309**. – P. 767–769.

Одержано 15.02.2000