УДК 517.9

В. Д. Кошманенко (Ін-т математики НАН України, Київ)

РЕГУЛЯРИЗОВАНІ АПРОКСИМАЦІЇ СИНГУЛЯРНИХ ЗБУРЕНЬ $\mathcal{H}_{-2}$-КЛАСУ*

For a sequence of singular perturbations belonging to $\mathcal{H}_{-1}$-class and converging to a given singular perturbation from $\mathcal{H}_{-2}$-class, we find a method of additive regularization which guarantees the strong resolvent convergence of perturbed operators.

Для послідовності сингулярних збурень з $\mathcal{H}_{-1}$-класу, яка збігається до заданого сингулярного збурення $\mathcal{H}_{-2}$-класу, знайдено спосіб адитивної регуляризації, який забезпечує сильну резольвентну збіжність збурених операторів.

1. Вступ та допоміжні факти. Нехай $\mathcal{H}$ позначає комплексний сепарабельний простір Гільберта з нормою $\|\cdot\|$ та скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$. Розглянемо в $\mathcal{H}$ самоспряжений необмежений оператор $A = A^* \geq 1$. Інший самоспряжений оператор $\tilde{A} \neq A$ в $\mathcal{H}$ називається [1] (див. також [2 – 19]) *сингулярно збуреним* відносно A, якщо область

$$\mathcal{D} := \{\varphi \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(\tilde{A}) \mid A\varphi = \tilde{A}\varphi\} \tag{1}$$

є щільною в $\mathcal{H}$, де $\mathcal{D}(\cdot)$ позначає операторну область визначення. При умові (1) пишемо $\tilde{A} \in \mathcal{A}_s(A)$, якщо область значень оператора $\tilde{A}$ збігається з $\mathcal{H}$, тобто $\mathcal{R}(\tilde{A}) = \mathcal{H}$, і, отже, обернений оператор A^{-1} існує і є обмеженим. Це означає, що точка нуль — регулярна для $\tilde{A}$.

Зрозуміло, що A та $\tilde{A}$ є різними самоспряженими розширеннями симетричного оператора

$$\dot{A} = A|\mathcal{D} = \tilde{A}|\mathcal{D}, \tag{2}$$

який очевидно є замкненим. При цьому оператори A, $\tilde{A}$ — взаємно прості відносно $\dot{A}$ [20, 21]; це означає, що $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(\tilde{A}) = \mathcal{D}$ і $\dot{A}$ — максимальна спільна частина для пари A, $\tilde{A}$.

Нехай оператор $\tilde{A} \in \mathcal{A}_s(A)$ — фіксований. Тоді згідно з (1) та (2) область $\mathcal{D}$ та симетричний оператор $\dot{A}$ єдино визначені. Нехай A_∞ позначає розширення за Фрідріхсом оператора $\dot{A}$. Можливі два випадки: $A_\infty \neq A$ та $A_\infty = A$. Відповідно виділяємо в $\mathcal{A}_s(A)$ дві підмножини. Записуємо $\tilde{A} \in \mathcal{A}_{s_1}(A)$, якщо $A_\infty \neq A$ і оператори A_∞, A — взаємно прості відносно $\dot{A}$, та $\tilde{A} \in \mathcal{A}_{s_2}(A)$, якщо $A_\infty = A$.

Введемо A-шкалу гільбертових просторів:

$$\mathcal{H}_{-k} \equiv \mathcal{H}_{-k}(A) \supset \mathcal{H}_0 \equiv \mathcal{H} \supset \mathcal{H}_k \equiv \mathcal{H}_k(A), \qquad k \geq 0,$$

де $\mathcal{H}_k = \mathcal{D}(A^{k/2})$ в нормі $\|\varphi\|_k := \|A^{k/2}\varphi\|$, а $\mathcal{H}_{-k}$ є дуально спряженим до $\mathcal{H}_k$, тобто $\mathcal{H}_{-k}$ є поповненням $\mathcal{H}$ за нормою $\|\varphi\|_{-k} := \|A^{-k/2}f\|$. Далі використовуємо лише частину A-шкали:

$$\mathcal{H}_{-2} \supset \mathcal{H}_{-1} \supset \mathcal{H}_0 \equiv \mathcal{H} \supset \mathcal{H}_1 \supset \mathcal{H}_2, \tag{3}$$

де $\mathcal{H}_2 = \mathcal{D}(A)$ — область визначення оператора A, а $\mathcal{H}_1 = \mathcal{D}(A^{1/2}) = \mathcal{Q}(\gamma_A)$

* Частково підтримана Державним фондом фундаментальних досліджень України, проект № 1.4/62 та DFG-project № 436 UKR 113/43.

— область визначення замкненої квадратичної форми γ_A, породженої оператором A.

З (3) видно, що оператор A, як відображення з $\mathcal{H}_2$ в $\mathcal{H}$, є унітарним. Він діє ізометрично з $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_{-1}$, а також з $\mathcal{H}$ в $\mathcal{H}_{-2}$. Тому його замикання $A^{cl} \equiv \equiv \mathbf{A}: \mathcal{H} \to \mathcal{H}_{-2}$, а також $\mathbf{A}^{-1}: \mathcal{H} \to \mathcal{H}_{-2}$ — унітарні оператори. Зрозуміло, що оператор $\mathbf{A}$ відображує $\mathcal{H}_1$ на увесь простір $\mathcal{H}_{-1}$.

Виконуються наступні рівності [22, 23]:

$$(\omega, \mathbf{A}f)_{-2} = (\mathbf{A}^{-1}\omega, f) = (A^{-1}\mathbf{A}^{-1}\omega, A^{-1}f)_2, \quad \omega \in \mathcal{H}_{-2}, \quad f \in \mathcal{H},$$
$$(\omega, \mathbf{A}\varphi)_{-1} = \langle \omega, \varphi \rangle = \langle \mathbf{A}^{-1}\omega, \mathbf{A}\varphi \rangle = (\mathbf{A}^{-1}\omega, \varphi)_1, \quad \omega \in \mathcal{H}_{-1}, \quad \varphi \in \mathcal{H}_1, \tag{4}$$
$$\langle f, \varphi \rangle = (f, \varphi), \quad f \in \mathcal{H}, \quad \varphi \in \mathcal{H}_2,$$

де $(\cdot,\cdot)_{\pm k}$ — скалярний добуток в $\mathcal{H}_{\pm k}$, а $\langle \cdot,\cdot \rangle$ — дуальний скалярний добуток між просторами в A-шкалі.

Нехай $V: \mathcal{H}_k \to \mathcal{H}_{-k}$ — замкнений симетричний оператор $0 \neq V \subset V^*$ з щільною областю визначення $\mathcal{D}(V) \subseteq \mathcal{H}_k$ і областю значень $\mathcal{R}(V) \subseteq \mathcal{H}_{-k}$, $0 < < k \leq 2$. Варто зауважити, що спряжений оператор V^* визначається відносно дуального скалярного добутку $\langle \cdot,\cdot \rangle$. Отже,

$$\langle V\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, V\psi \rangle, \quad \varphi, \psi \in \mathcal{D}(V) \subset \mathcal{D}(V^*).$$

Оператор $0 \neq V: \mathcal{H}_k \to \mathcal{H}_{-k}$ в шкалі (3) називаємо *сингулярним* відносно простору $\mathcal{H}$ (порівн. з [11, 16, 17, 19]), якщо множина $\operatorname{Ker} V = \{\varphi \in \mathcal{D}(V) \mid V\varphi = = 0\}$ є щільною в $\mathcal{H}$, тобто

$$\operatorname{Ker} V \sqsubset \mathcal{H}, \tag{5}$$

де $\sqsubset$ позначає щільне вкладення. Для сингулярного відносно простору $\mathcal{H}$ оператора V записуємо $V \in \mathcal{H}_{-1}(A)$-класу (або $V \in \mathcal{H}_{-1}$-класу), якщо $V: \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_{-1}$ і для замкненого в $\mathcal{H}_1$ підпростору $\operatorname{Ker} V$ виконується умова

$$\operatorname{Ker} V \cap \mathcal{D}(A) \sqsubset \operatorname{Ker} V. \tag{6}$$

Записуємо $V \in \mathcal{H}_{-2}$-класу, якщо $V: \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_{-2}$ і

$$\operatorname{Ker} V \sqsubset \mathcal{H}_1. \tag{7}$$

Далі оператори V з $\mathcal{H}_{-i}$-класів, $i = 1, 2$, розглядаємо як сингулярні збурення оператора A.

Введемо поняття узагальненої суми для A та його сингулярного збурення V (див. [24, 25], а також [1, 5, 10, 13]).

Узагальненою сумою операторів A та V називаємо оператор $A \dotplus V$ в $\mathcal{H}$, визначений таким чином:

$$(A \dotplus V)\varphi := \mathbf{A}\varphi + V\varphi, \quad \varphi \in \mathcal{D}(A \dotplus V) := \{\varphi \in \mathcal{D}(V) \mid \mathbf{A}\varphi + V\varphi \in \mathcal{H}\}. \tag{8}$$

Дане означення узагальненої суми містить у собі як частинний випадок поняття суми операторів у сенсі квадратичних форм. Дійсно, нехай γ_A — квадратична форма, породжена оператором A, тобто γ_A — замикання в $\mathcal{H}$ форми $(A\varphi, \psi)$, $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(A)$. Отже, $\gamma_A(\varphi, \psi) = \langle \mathbf{A}\varphi, \psi \rangle = (\varphi, \psi)_1$, $\varphi, \psi \in \mathcal{H}_1$. Далі, нехай ν позначає квадратичну форму, породжену оператором V, $\nu[\varphi] = \langle V\varphi, \varphi \rangle$, $\varphi \in \mathcal{D}(V)$. Якщо форма ν задовольняє умову відомої КЛМН-теореми [26]:

$$|\nu[\varphi]| \leq b\gamma_A[\varphi] + a\|\varphi\|^2, \quad 0 \leq b < 1, \quad 0 \leq a,$$

то сума форм $\tilde{\gamma} = \gamma_A + \nu$ обмежена знизу і замикальна в $\mathcal{H}$. Асоційований з її замиканням самоспряжений оператор $\tilde{A}$ збігається з $A \dotplus V$ [6, 13, 24]. Аналогічне твердження справедливе і у випадку, коли форма ν додатна і замикальна в просторі $\mathcal{H}_1$. Мають місце і більш глибокі результати [6, 10, 16, 17].

Теорема 1. *Нехай $V \in \mathcal{H}_{-1}$-класу. Якщо для оператора $\mathbf{A}^{-1}V + I$ в просторі $\mathcal{H}_1$ виконується умова*

$$\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{R}(\mathbf{A}^{-1}V + I), \tag{9}$$

де I — тотожне перетворення, то узагальнена сума $\tilde{A} = A \dotplus V$ є самоспряженим оператором в $\mathcal{H}$. При цьому $\tilde{A} \in \mathcal{A}_{s_1}(A)$, $\mathcal{D}(\tilde{A}) \subset \mathcal{H}_1$, і оператори $\tilde{A}$, A_∞ — взаємно прості відносно $\dot{A}$.

Доведення. Оскільки область $\mathcal{D}(A)$ є щільною в $\mathcal{H}_1$, а оператор $\mathbf{A}^{-1}V + I$ — очевидно симетричний у просторі $\mathcal{H}_1$, то з (9) випливає існування оберненого оператора $(\mathbf{A}^{-1}V + I)^{-1}$, для якого $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}((\mathbf{A}^{-1}V + I)^{-1})$. При цьому для кожного $\psi = (\mathbf{A}^{-1}V + I)^{-1}f,\ f \in \mathcal{D}(A)$, маємо

$$(\mathbf{A} + V)\psi = \mathbf{A}(I + \mathbf{A}^{-1}V)\psi = \mathbf{A}f = Af = h \in \mathcal{H}.$$

Оскільки $A \geq 1$, то множина векторів $\{h = Af \mid f \in \mathcal{D}(A)\}$ заповнює увесь простір $\mathcal{H}_1$. Тому звуження оператора $A + V$ на область $(\mathbf{A}^{-1}V + I)^{-1}\mathcal{D}(A)$ є самоспряженим оператором в $\mathcal{H}$, який, очевидно, збігається з узагальненою сумою: $A \dotplus V = \tilde{A}$. За побудовою, $\mathcal{D}(\tilde{A}) = \{\psi \in \mathcal{H}_1 \mid \psi = (\mathbf{A}^{-1}V + I)^{-1}f,\ f \in \mathcal{D}(A)\}$. Отже, $\mathcal{D}(\tilde{A}) \subset \mathcal{H}_1$.

Розглянемо для пари A, $\tilde{A}$ множину $\mathcal{D}$, визначену згідно з (1). Зрозуміло, що

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{M}_1 \equiv \operatorname{Ker} V, \quad \mathcal{D} = \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{H}_2, \tag{10}$$

оскільки рівність $\mathbf{A}f + Vf = Af$ можлива лише для $f \in \operatorname{Ker} V \cap \mathcal{D}(A)$. На підставі умови (6) ця множина щільна в $\mathcal{H}$ і, таким чином, $\tilde{A} \in \mathcal{A}_s(A)$. Далі, з умови $V \neq 0$ випливає, що підпростір $\mathcal{M}_1 \neq \mathcal{H}_1$. І тому $\tilde{A} \neq A_\infty$. За означенням (8) завдяки (10) множина $\mathcal{D}$ є максимальною, на якій оператори A, $\tilde{A}$ та A_∞ збігаються. Отже, $A \in \mathcal{A}_{s_1}(A)$ і $\tilde{A}$, A_∞ — взаємно прості відносно $\dot{A}$. Теорему доведено.

Будемо говорити, що для оператора $V \in \mathcal{H}_{-1}$-класу точка -1 є регулярною, якщо в $\mathcal{H}_1$ існує обмежений оператор $(\mathbf{A}^{-1}V + I)^{-1}$, визначений на всьому просторі $\mathcal{H}_1$. В такому випадку записуємо

$$-1 \in \rho(V). \tag{11}$$

Очевидно, що умова (9) виконується автоматично, якщо точка -1 є регулярною. З теореми 1 випливає справедливість наступного результату.

Твердження 1. *Нехай оператор $V \in \mathcal{H}_{-1}$-класу задовольняє умову* (11). *Тоді узагальнена сума $A \dotplus V = \tilde{A} \in \mathcal{A}_{s_1}(A)$, $\mathcal{D}(\tilde{A}) \subset \mathcal{H}_1$ і оператори $\tilde{A}$, A_∞ — взаємно прості відносно $\dot{A}$.*

Виявляється, що і навпаки, кожному $\tilde{A} \in \mathcal{A}_{s_1}(A)$ такому, що $\mathcal{D}(\tilde{A}) \subset \mathcal{H}_1$ і пара $\tilde{A}$, A_∞ є взаємно простою відносно $\dot{A}$, однозначно відповідає сингулярне збурення $V \in \mathcal{H}_{-1}$-класу, для якого узагальнена сума $A \dotplus V$ є самоспряженим оператором, який збігається з $\tilde{A}$ (див. нижче теорему 3).

Взаємно однозначна відповідність має місце і між сингулярно збуреними операторами $\tilde{A} \in \mathcal{A}_{s_2}(A)$ та сингулярними збуреннями $V \in \mathcal{H}_{-2}(A)$-класу. Така відповідність встановлюється [1, 2, 15] на основі формули

$$\tilde{A}^{-1} \equiv A_V^{-1} = A^{-1} + \tilde{B}^{-1} P_{\mathcal{N}_0},$$

де оператор $\tilde{B} = \mathbf{A}^{-1} V A^{-1} P_{\mathcal{N}_0}$ діє в дефектному підпросторі $\mathcal{N}_0 = \operatorname{Ker}(\dot{A})^*$, а $P_{\mathcal{N}_0}$ — ортогональний проектор на $\mathcal{N}_0$.

Зауважимо, що оператор $\tilde{A} \in \mathcal{A}_{s_2}(A)$ неможливо зобразити у вигляді узагальненої суми A та $V \in \mathcal{H}_{-2}$-класу, тому що для будь-якого $\tilde{A} \in \mathcal{A}_{s_2}(A)$ область визначення $\mathcal{D}(\tilde{A})$ обов'язково містить елементи, які не належать області $\mathcal{D}(V)$.

Проте кожен оператор $\tilde{A} \in \mathcal{A}_{s_2}(A)$ можна апроксимувати в сенсі сильної резольвентної збіжності послідовністю $\tilde{A}_n \in \mathcal{A}_{s_1}(A)$, елементи якої мають зображення у вигляді узагальненої суми: $\tilde{A}_n = A \dotplus V_{n,r}$, де $V_{n,r} \in \mathcal{H}_{-1}(A)$-класу — послідовність регуляризованих сингулярних збурень V_n, які, за припущенням, збігаються певним чином до V (див. (39)).

Відзначимо, що в [27, 28] дано зображення операторів Шредінгера з точковим потенціалом (такі оператори належать множині $\mathcal{A}_{s_2}(A)$) узагальненою сумою вільного оператора Шредінгера та певних розширень симетричного сингулярного збурення $\mathcal{H}_{-2}$-класу. В [27, 28] побудовані також апроксимації таких операторів в рівномірному резольвентному сенсі операторами Шредінгера з регулярними локальними і нелокальними потенціалами.

2. Взаємозв'язок між операторами V та $\tilde{B}$. Нехай $V\colon \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_{-1}$ — замкнений симетричний оператор, який належить $\mathcal{H}_1$-класу і задовольняє умову (9). Тоді за теоремою 1 узагальнена сума $\tilde{A} = A \dotplus V \in \mathcal{A}_{s_1}(A)$. Оскільки $\tilde{A}$ є одночасно одним із самоспряжених розширень симетричного оператора $\dot{A}$ (див. (2)), то для його резольвенти виконується формула Крейна [1, 3, 7, 9, 21, 29]:

$$(\tilde{A} - zI)^{-1} = (A - zI)^{-1} + \tilde{B}_z^{-1} P_{\mathcal{N}_z}, \quad z \in \rho = \rho(A) \cap \rho(\tilde{A}), \tag{12}$$

де $\rho(\cdot)$ — множина регулярних точок відповідного оператора, $P_{\mathcal{N}_z}$ — ортогональний проектор на дефектний підпростір $\mathcal{N}_z$ оператора $\dot{A}$, а $\tilde{B}_z\colon \mathcal{N}_{\bar{z}} \to \mathcal{N}_z$ — операторна функція, яка фіксує розширення $\tilde{A}$. З умови (9) (див. також доведення теореми 1), випливає, що $\tilde{A}$ є оборотним оператором в $\mathcal{H}$. Тому згідно з формулою (12) для $\tilde{A}$ виконується співвідношення

$$\tilde{A}^{-1} = A^{-1} + \tilde{B}^{-1} P_{\mathcal{N}_0}, \tag{13}$$

де $\tilde{B} = \tilde{B}_{z=0}$ — самоспряжений оператор в $\mathcal{N}_0$.

У цьому пункті знайдено формули, які пов'язують оператори $\tilde{B}$ та V, а в наступному ці формули використовуються для доведення основного результату роботи.

Нагадаємо, що $\mathcal{M}_1 := \operatorname{Ker} V$ — замкнений підпростір в $\mathcal{H}_1$. Оскільки $\mathcal{M}_1 \neq \mathcal{H}_1$, то $\mathcal{H}_1 = \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{N}_1$, $\mathcal{N}_1 \neq 0$. Позначимо через $\mathcal{M}_0 = \mathcal{R}(\dot{A})$ область значень оператора $\dot{A}$ (див. (2)) і $\mathcal{N}_0 := \operatorname{Ker} \dot{A}^*$. Таким чином, $\mathcal{H} = \mathcal{M}_0 \oplus \mathcal{N}_0$. Далі, внаслідок того, що $0 \neq V \in \mathcal{H}_1$-класу, множина $\mathcal{M}_2 = \operatorname{Ker} V \cap \mathcal{H}_2$ (яка є щільною в $\mathcal{M}_1$, на підставі умови (6)) утворює власний підпростір в $\mathcal{H}_2$. Тому $\mathcal{H}_2 = \mathcal{M}_2 \oplus \mathcal{N}_2$, $\mathcal{N}_2 \neq 0$.

Відмітимо, що

$$\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2^{cl,1}, \tag{14}$$

де cl, 1 — замикання в підпросторі $\mathcal{H}_1$. Зауважимо також, що

$$\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}_0, \tag{15}$$

оскільки з (4) випливає, що

$$(\mathcal{N}_1, \mathcal{M}_0) = (\mathcal{N}_1, A\mathcal{M}_2) = \langle \mathcal{N}_1, A\mathcal{M}_2 \rangle = (\mathcal{N}_1, \mathcal{M}_2)_1 = \{0\},$$

а також $\mathcal{M}_2 \subset \mathcal{M}_1$ і $\mathcal{N}_1 \perp \mathcal{M}_1$ в $\mathcal{H}_1$.

Далі $P_{\mathcal{L}_i}$, $i = 0, 1, 2,$ — ортогональні проектори в $\mathcal{H}_i$, $(\mathcal{H}_0 \equiv \mathcal{H})$ на $\mathcal{L}_i$, де $\mathcal{L}_i$ дорівнює підпростору $\mathcal{M}_i$ або $\mathcal{N}_i$.

Введемо в підпросторі $\mathcal{N}_0 = \operatorname{Ker} (\dot{A})^*$ оператор B, який часто використовується в подальшому. Він задається наступним чином:

$$B\eta = A\varphi \in \mathcal{N}_0, \quad \eta \in \mathcal{D}(B) := \{\eta \in \mathcal{N}_1 \mid \eta = P_{\mathcal{N}_1}\varphi,\ \varphi \in \mathcal{N}_2 \subset \mathcal{D}(A)\}. \tag{16}$$

Неважко зрозуміти, що оператор B є коректно означеним на підставі співвідношень (14) та (15). Дійсно, якщо $P_{\mathcal{N}_1}\varphi = 0$, $\varphi \in \mathcal{N}_2$, то $BP_{\mathcal{N}_1}\varphi = 0$ також, оскільки $\varphi \in \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{D}(A) = \mathcal{M}_2$ і, отже, $\varphi = 0$.

Лема [4]. *Справедлива рівність*

$$A^{-1} = A_\infty^{-1} + B^{-1}P_{\mathcal{N}_0}. \tag{17}$$

В дійсності рівність (17) — частинний випадок формули Крейна для резольвенти оператора A (див. (12), (13)). Нетривіальний факт полягає в тому, що оператор B_z з формули Крейна при $z = 0$ збігається з оператором B, визначеним згідно з (16).

З (17) одержуємо опис A_∞ — розширення за Фрідріхсом оператора $\dot{A}$:

$$A_\infty\psi = A\varphi, \quad \mathcal{D}(A_\infty) = \{\psi \in \mathcal{H}_1 \mid \psi = \varphi - B^{-1}P_{\mathcal{N}_0}A\varphi = \varphi - P_{\mathcal{N}_1}\varphi,\ \varphi \in \mathcal{D}(A)\}.$$

Розглянемо оператор $\mathbf{A}^{-1}V\mathbf{A}^{-1} : \mathcal{H}_{-1} \to \mathcal{H}_1$. Оскільки $\mathbf{A}^{-1} : \mathcal{H}_{-1} \to \mathcal{H}_1$ діє унітарно, а V дорівнює нулю на підпросторі $\mathcal{M}_1 = \operatorname{Ker} V$ в $\mathcal{H}_1$, то $\mathbf{A}^{-1}V\mathbf{A}^{-1}$ діє нетривіально лише з підпростору $\mathcal{N}_{-1} = \mathbf{A}\mathcal{N}_1$ в $\mathcal{N}_1$. Тому звуження $\mathbf{A}^{-1}V\mathbf{A}^{-1}$ на $\mathcal{H}$ можна записати у вигляді

$$\mathbf{A}^{-1}V\mathbf{A}^{-1}|\mathcal{H} = \mathbf{A}^{-1}VA^{-1} = \mathbf{A}^{-1}VA^{-1}P_{\mathcal{N}_0} =$$

$$= P_{\mathcal{N}_1}\mathbf{A}^{-1}P_{\mathcal{N}_{-1}}VP_{\mathcal{N}_1}A^{-1}P_{\mathcal{N}_0} = P_{\mathcal{N}_1}\mathbf{A}^{-1}P_{\mathcal{N}_{-1}}VP_{\mathcal{N}_1}B^{-1}P_{\mathcal{N}_0},$$

де ми скористалися тим, що $A^{-1}\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_2 \subset \mathcal{M}_1 = \operatorname{Ker} V$, а також тим, що для довільного $\eta_2 \in \mathcal{N}_2 = A^{-1}\mathcal{N}_0$ має місце рівність $V\eta_2 = VP_{\mathcal{N}_1}\eta_2$. Отже, звуження оператора $\mathbf{A}^{-1}V\mathbf{A}^{-1}$ на $\mathcal{H}$ діє нетривіально з $\mathcal{N}_0$ в $\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}_0$, тобто це звуження є оператором в $\mathcal{N}_0$.

Нехай $\check{\mathbf{A}}$, $\check{V}$ — звуження операторів $\mathbf{A}$, V на $\mathcal{N}_1$. Тоді

$$\check{\mathbf{A}}P_{\mathcal{N}_1} = P_{\mathcal{N}_{-1}}\mathbf{A}P_{\mathcal{N}_1} = \mathbf{A}P_{\mathcal{N}_1}, \quad V = \check{V}P_{\mathcal{N}_1} = P_{\mathcal{N}_{-1}}VP_{\mathcal{N}_1} = VP_{\mathcal{N}_1}. \tag{18}$$

Теорема 2. *Нехай оператор* $V \in \mathcal{H}_{-1}$*-класу задовольняє умову* (9) *і, отже, узагальнена сума* $A \dotplus V = \tilde{A} \in \mathcal{A}_{s_1}(A)$ (*див. теорему* 1). *Тоді оператор* $\tilde{B}$ *з формули* (13) *має зображення*:

$$\tilde{B} = -B(\check{V}^{-1}\check{\mathbf{A}} + I_{\mathcal{N}_1}), \tag{19}$$

де $I_{\mathcal{N}_1}$ — *тотожне перетворення в підпросторі* $\mathcal{N}_1 = \mathcal{H}_1 \ominus \mathcal{M}_1$, *оператор* B *визначено згідно з* (16), *а* $\check{\mathbf{A}}$ *та* $\check{V}$ *означені в* (18).

Доведення. Нехай

$$\mathbf{R}_z := (\mathbf{A} - zI)^{-1}, \quad \tilde{\mathbf{R}}_z := (\tilde{\mathbf{A}} - zI)^{-1} : \mathcal{H}_{-1} \to \mathcal{H}_1, \quad z \in \rho = \rho(\tilde{A}) \cap \rho(A),$$

де $\tilde{A} := \mathbf{A} + V : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_{-1}$. Має місце (див. [5, 6]) узагальнена резольвентна тотожність

$$\tilde{\mathbf{R}}_z - \mathbf{R}_z = -\tilde{\mathbf{R}}_z V \mathbf{R}_z, \quad z \in \rho, \tag{20}$$

а також рівність

$$\tilde{\mathbf{R}}_z - \mathbf{R}_z = -(I + \mathbf{R}_z V)^{-1}\mathbf{R}_z V \mathbf{R}_z, \quad z \in \rho. \tag{21}$$

З умови (9) випливає, що точка $0 \in \rho$ і, отже, з (20) та (21) при $z = 0$ маємо

$$\tilde{\mathbf{A}}^{-1} - \mathbf{A}^{-1} = -\tilde{\mathbf{A}}^{-1} V \mathbf{A}^{-1} = -(I + \mathbf{A}^{-1} V)^{-1} \mathbf{A}^{-1} V \mathbf{A}^{-1}, \tag{22}$$

де оператор $(I + \mathbf{A}^{-1} V)^{-1}$ існує також внаслідок умови (9).

Зрозуміло, що оператори $\check{\mathbf{A}}$, $\check{V}$ мають обернені. Тому оператор $\mathbf{A}^{-1} V \mathbf{A}^{-1} \restriction \mathcal{H}$ можна записати у вигляді

$$\mathbf{A}^{-1} V \mathbf{A}^{-1} \restriction \mathcal{H} = \check{\mathbf{A}}^{-1}\check{V}B^{-1}P_{\mathcal{N}_0},$$

де ми використали рівність $B^{-1} = P_{\mathcal{N}_1}A^{-1}P_{\mathcal{N}_0}$. Отже, в $\mathcal{N}_0$ маємо

$$(\check{\mathbf{A}}^{-1}\check{V}B^{-1})^{-1} = B\check{V}^{-1}\check{\mathbf{A}} : \mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}_0 \to \mathcal{N}_0.$$

Зрозуміло також, що звуження оператора $\mathbf{A}^{-1} V \mathbf{A}^{-1}$ на підпростір $\mathcal{N}_{-1}$ має вигляд $\mathbf{A}^{-1} V \mathbf{A}^{-1} \restriction \mathcal{N}_{-1} = \check{\mathbf{A}}^{-1}\check{V}\check{\mathbf{A}}^{-1}$. Цей оператор також є оборотним:

$$(\check{\mathbf{A}}^{-1}\check{V}\check{\mathbf{A}}^{-1})^{-1} = \check{\mathbf{A}}\check{V}^{-1}\check{\mathbf{A}} : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_{-1}.$$

Таким чином, рівність (22) можна переписати у вигляді

$$\tilde{\mathbf{A}}^{-1} - \mathbf{A}^{-1} = -\check{\mathbf{A}}\check{V}^{-1}\check{\mathbf{A}}(I + \mathbf{A}^{-1}V)^{-1}P_{\mathcal{N}_{-1}} =$$

$$= -(\check{\mathbf{A}}\check{V}^{-1}\check{\mathbf{A}}(I_{\mathcal{N}_1} + \check{\mathbf{A}}\check{V}))^{-1}P_{\mathcal{N}_{-1}} = -(\check{\mathbf{A}}(\check{V}^{-1}\check{\mathbf{A}} + I_{\mathcal{N}_1}))^{-1}P_{\mathcal{N}_{-1}} =$$

$$= -(\check{V}^{-1}\check{\mathbf{A}} + I_{\mathcal{N}_1})^{-1}\check{\mathbf{A}}^{-1}P_{\mathcal{N}_{-1}},$$

або

$$\tilde{\mathbf{A}}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - (\check{V}^{-1}\check{\mathbf{A}} + I_{\mathcal{N}_1})^{-1}\check{\mathbf{A}}^{-1}P_{\mathcal{N}_{-1}}. \tag{23}$$

Звужуючи співвідношення (23) на простір $\mathcal{H}$, одержуємо

$$\tilde{\mathbf{A}}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - (\check{V}^{-1}\check{\mathbf{A}} + I_{\mathcal{N}_1})^{-1} B^{-1} P_{\mathcal{N}_0}. \tag{24}$$

Тепер завдяки (13) з (24) випливає

$$\tilde{B}^{-1} P_{\mathcal{N}_0} = -(\check{V}^{-1}\check{\mathbf{A}} + I_{\mathcal{N}_1})^{-1} B^{-1} P_{\mathcal{N}_0} = -(I + \mathbf{A}^{-1} V)^{-1} \mathbf{A}^{-1} V A^{-1} P_{\mathcal{N}_0}. \tag{25}$$

Оскільки $\mathbf{A}^{-1} V A^{-1} P_{\mathcal{N}_0} = \mathbf{A}^{-1} P_{\mathcal{N}_{-1}} V P_{\mathcal{N}_1} A^{-1} P_{\mathcal{N}_0} = P_{\mathcal{N}_1} \check{\mathbf{A}}^{-1} \check{V} B^{-1} P_{\mathcal{N}_0}$, то в термінах операторів $\check{\mathbf{A}}$, $\check{V}$, B з (25) одержуємо

$$\tilde{B}^{-1} = -(I_{\mathcal{N}_1} + \check{\mathbf{A}}^{-1}\check{V})^{-1} \check{\mathbf{A}}^{-1} \check{V} B^{-1}, \tag{26}$$

де оператор $\check{\mathbf{A}}^{-1}\check{V}B^{-1}$ діє з $\mathcal{N}_0$ в $\mathcal{N}_1$, а $(I_{\mathcal{N}_1} + \check{\mathbf{A}}^{-1}\check{V})^{-1}$ — в підпросторі $\mathcal{N}_1$, який входить в $\mathcal{N}_0$. Таким чином, права частина (26) є коректно означеним оператором в $\mathcal{N}_0$, який можна записати у вигляді

$$\tilde{B}^{-1} = ((\check{\mathbf{A}}^{-1}\check{V}B^{-1})^{-1}(I_{\mathcal{N}_1} + \check{\mathbf{A}}^{-1}\check{V}))^{-1} = -(B(\check{V}^{-1}\check{\mathbf{A}} + I_{\mathcal{N}_1}))^{-1}. \tag{27}$$

Переходячи в (27) до обернених операторів, одержуємо (19). Теорему доведено.

Розв'яжемо обернену задачу. Для заданого $\tilde{A} \in \mathcal{A}_{s_1}(A)$ знайдемо оператор $V \in \mathcal{H}_{-1}$-класу такий, що $\tilde{A} = A \tilde{+} V$.

Теорема 3. *Нехай оператор* $\tilde{A} \in \mathcal{A}_{s_1}(A)$ *задовольняє умову*

$$\mathcal{D}(\tilde{A}) \subset \mathcal{H}_1. \tag{28}$$

Припустимо, що пара $\tilde{A}$, A_∞ *є взаємно простою відносно симетричного оператора* $\dot{A}$, *визначеного згідно з* (2).

Тоді $\tilde{A}$ *можна зобразити сумою* $\tilde{A} = A \tilde{+} V$ *з оператором* $V \in \mathcal{H}_{-1}$-*класу, який має вигляд*

$$V = -\check{\mathbf{A}}(B^{-1}\tilde{B} + I_{\mathcal{N}_1})^{-1} P_{\mathcal{N}_1}, \tag{29}$$

де оператор B *визначено згідно з* (16), *а* $\tilde{B}$ *задано формулою* (13).

Доведення. Оскільки $\tilde{A}$ є самоспряженим розширенням симетричного оператора $\dot{A}$, то для $\tilde{A}$ справедлива формула (13). З (13) та (28) випливає, що $\mathcal{D}(\tilde{B}) \subset \mathcal{H}_1$. Точніше,

$$\mathcal{D}(\tilde{B}) \subset \mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}_0, \tag{30}$$

де, нагадаємо, $\mathcal{N}_1 = \mathcal{H}_1 \ominus \mathcal{D}$. Дійсно, оскільки $\mathcal{D}(\tilde{B}) \subset \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{N}_0$, то

$$(\mathcal{D}(\tilde{B}), \mathcal{M}_2)_1 = (\mathcal{D}(\tilde{B}), A^{-1}\mathcal{M}_0)_1 = (\mathcal{D}(\tilde{B}), \mathcal{M}_0) = \{0\}.$$

Більше того, $(\mathcal{D}(\tilde{B}), \mathcal{M}_1)_1 = \{0\}$ також, оскільки підпростір $\mathcal{M}_2$ щільний в $\mathcal{M}_1$ (див. (14)), що і забезпечує справедливість (30).

Введемо оператор $W = B^{-1}\tilde{B}$. Нагадаємо, що оператори B^{-1}, $\tilde{B}^{-1}$ обмежені і визначені на всьому підпросторі $\mathcal{N}_0$. Отже,

$$W : \mathcal{N}_1 \supseteq \mathcal{D}(\tilde{B}) = \mathcal{D}(W) \to \mathcal{R}(W) = \mathcal{D}(B) \subseteq \mathcal{N}_1,$$

тобто W діє в $\mathcal{N}_1$. Наступні співвідношення показують, що W — симетричний оператор в $\mathcal{N}_1$. Дійсно, для довільних $\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{D}(\tilde{B})$ маємо

$$(B^{-1}\tilde{B}\eta_1, \eta_2)_1 = (P_{\mathcal{N}_1}A^{-1}\tilde{B}\eta_1, \eta_2)_1 = (A^{-1}\tilde{B}\eta_1, \eta_2)_1 = (\tilde{B}\eta_1, \eta_2) =$$
$$= (\eta_1, \tilde{B}\eta_2) = \langle \mathbf{A}\eta_1, A^{-1}\tilde{B}\eta_2 \rangle = (\eta_1, P_{\mathcal{N}_1}A^{-1}\tilde{B}\eta_2)_1 = (\eta_1, B^{-1}\tilde{B}\eta_2)_1,$$

де використано самоспряженість оператора $\tilde{B}$ в $\mathcal{N}_0$. Відзначимо, що обернений оператор до W існує, діє в $\mathcal{N}_1$ і має вигляд $W^{-1} = \tilde{B}^{-1}B$.

Доведемо, що оператор $W + I_{\mathcal{N}_1} = B^{-1}\tilde{B} + I_{\mathcal{N}_1}$ також має обернений в $\mathcal{N}_1$. З цією метою переконаємося, що

$$\operatorname{Ker}(B^{-1}\tilde{B} + I_{\mathcal{N}_1}) = \operatorname{Ker}(W + I_{\mathcal{N}_1}) = \{0\}.$$

Припустимо, що для деякого вектора $\eta_1 \in \mathcal{D}(\tilde{B}) = \mathcal{D}(W) \subset \mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}_0$ виконується рівність $(W + I_{\mathcal{N}_1})\eta_1 = 0$. Тобто $W\eta_1 = -\eta_1$, або, що еквівалентно, $\tilde{B}\eta_1 = -B\eta_1$, де використано означення $W = B^{-1}\tilde{B}$ і те, що $\mathcal{R}(W) = \mathcal{D}(B)$. Позначимо $\phi = \tilde{B}\eta_1 = -B\eta_1 \in \mathcal{N}_0$. Оскільки $\mathcal{R}(\tilde{B}) = \mathcal{R}(B) = \mathcal{N}_0$, то $\tilde{B}^{-1}\phi = -\eta_1$, $B^{-1}\phi = -\eta_1$. Тому що $A^{-1} = A_\infty^{-1} + B^{-1}P_{\mathcal{N}_0}$ та $\tilde{A}^{-1} = A^{-1} + \tilde{B}^{-1}P_{\mathcal{N}_0}$, маємо

$$\tilde{A}^{-1}\phi = A^{-1}\phi + \tilde{B}^{-1}\phi = A_\infty^{-1}\phi + B^{-1}\phi + \tilde{B}^{-1}\phi = A_\infty^{-1}\phi - \eta_1 + \eta_1 = A_\infty^{-1}\phi.$$

Таким чином, для $\phi \in \mathcal{N}_0$ одержуємо

$$A_\infty^{-1}\phi = \tilde{A}^{-1}\phi = \xi \in \mathcal{D}(A_\infty) \cap \mathcal{D}(\tilde{A}).$$

З останньої рівності випливає, що $\phi = \tilde{A}\xi = A_\infty\xi$. Отже, якщо вектор $\xi \neq 0$, то він не може належати області $\mathcal{D}$, оскільки $\phi \in \mathcal{N}_0$, а $\mathcal{N}_0 \perp \mathcal{M}_0$, де $\mathcal{M}_0 = \tilde{A}\mathcal{D} = A\mathcal{D}$. Це означає, внаслідок умови взаємної простоти операторів A_∞ та $\tilde{A}$ відносно $\dot{A}$, що $\xi = 0$, а також $\phi = \eta_1 = 0$. Таким чином, для довільного $\eta_1 \in \mathcal{D}(\tilde{B}) = \mathcal{D}(W)$ маємо $B^{-1}\tilde{B}\eta_1 \neq -\eta_1$. Це означає, що з рівності $(W + I_{\mathcal{N}_1})\eta_1 = 0$ випливає $\eta_1 = 0$ і, отже, оператор $W + I_{\mathcal{N}_1}$ має обернений.

Введемо в A-шкалі оператор

$$V := -\mathbf{A}(W + I_{\mathcal{N}_1})^{-1}P_{\mathcal{N}_1} = -\check{\mathbf{A}}(B^{-1}\tilde{B} + I_{\mathcal{N}_1})^{-1}P_{\mathcal{N}_1} : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_{-1}. \tag{31}$$

Зрозуміло, що V — симетричний в сенсі дуальної пари просторів, оскільки $W + I_{\mathcal{N}_1}$, а також $(W + I_{\mathcal{N}_1})^{-1}$ — симетричні в підпросторі $\mathcal{N}_1$.

Переконаємося, що оператор V, визначений згідно з (31), належить до $\mathcal{H}_{-1}$-класу. За умовами теореми оператори A та A_∞ є взаємно простими відносно $\dot{A}$, тому $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{H}_2 = \operatorname{Ker} V \cap \mathcal{D}(A) \equiv \mathcal{M}_2$, де, за побудовою, $\mathcal{M}_1 = \operatorname{Ker} V = \mathcal{D}^{cl,1}$ і $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\dot{A}) \equiv \mathcal{M}_2$. Отже, дійсно, $V \in \mathcal{H}_{-1}$-класу (див. (6)).

Введемо узагальнену суму $A \dotplus V$ в $\mathcal{H}$ і покажемо, що вона збігається з оператором $\tilde{A}$. З цією метою розглянемо оператор

$$\mathbf{A} + V = \mathbf{A}(I - (B^{-1}\tilde{B} + I_{\mathcal{N}_1})^{-1}P_{\mathcal{N}_1})$$

та обернений до нього

$$(\mathbf{A} + V)^{-1} = (I - (B^{-1}\tilde{B} + I_{\mathcal{N}_1})^{-1}P_{\mathcal{N}_1})^{-1}\mathbf{A}^{-1}.$$

Очевидно, що звуження оператора $(\mathbf{A} + V)^{-1}$ на підпростір $\mathcal{M}_0$ збігається з $A^{-1}P_{\mathcal{M}_0}$, а звуження $(\mathbf{A} + V)^{-1}$ на підпростір $\mathcal{N}_0$ має вигляд

$$(\mathbf{A}+V)^{-1}P_{\mathcal{N}_0} = (I_{\mathcal{N}_1}-(B^{-1}\tilde{B}+I_{\mathcal{N}_1})^{-1}P_{\mathcal{N}_1})^{-1}P_{\mathcal{N}_1}\mathbf{A}^{-1}P_{\mathcal{N}_0}.$$

Враховуючи, що

$$(I_{\mathcal{N}_1}-(B^{-1}\tilde{B}+I_{\mathcal{N}_1})^{-1}P_{\mathcal{N}_1})^{-1} = (B^{-1}\tilde{B}+I_{\mathcal{N}_1})P_{\mathcal{N}_1}\tilde{B}^{-1}B,$$

одержуємо

$$(\mathbf{A}+V)^{-1}P_{\mathcal{N}_0} = P_{\mathcal{N}_1}(B^{-1}+\tilde{B}^{-1})P_{\mathcal{N}_0}.$$

Далі, очевидно, що

$$\tilde{A}^{-1}P_{\mathcal{N}_0} = (A^{-1}+\tilde{B}^{-1})P_{\mathcal{N}_0} = A^{-1}P_{\mathcal{N}_0} + \tilde{B}^{-1}P_{\mathcal{N}_0} = B^{-1}P_{\mathcal{N}_0} + \tilde{B}^{-1}P_{\mathcal{N}_0}.$$

Тому робимо висновок, що $(\mathbf{A}+V)^{-1}P_{\mathcal{N}_0} = \tilde{A}^{-1}P_{\mathcal{N}_0}$, а отже, $A \tilde{+} V = \tilde{A}$.

3. Резольвентна збіжність сингулярно збурених операторів. Нехай оператор $V \in \mathcal{H}_{-2}$-класу — фіксований. Згідно з (7) узагальнена сума $A \tilde{+} V$ є істотно самоспряженим оператором, замикання якого збігається з A. Це випливає з того, що в $\mathcal{D}(V)$ не існує вектора φ, для якого $V\varphi \neq 0$ і одночасно $A\varphi + V\varphi = h \in \mathcal{H}$, $h \neq 0$, тому що $\mathcal{D}(V) \dot{\subset} \mathcal{H}_2 = \mathcal{D}(A)$, $A\varphi \in \mathcal{H}$, $V\varphi \in (\mathcal{H}_{-2}\backslash\mathcal{H}) \cup \{0\}$. Для побудови відповідного до V сингулярно збуреного оператора (позначимо його A_V) скористаємося наступною формулою (порівн. з [2, 15])

$$A_V^{-1} = A^{-1} + B_V^{-1}P_{\mathcal{N}_0}, \tag{32}$$

де

$$B_V := (\mathbf{A}^{-1}VA^{-1})|\mathcal{N}_0, \tag{33}$$

а $\mathcal{N}_0 = \operatorname{Ker} \dot{A}^*$ — дефектний підпростір симетричного оператора $\dot{A} = A\,|\operatorname{Ker} V$. Неважко бачити, що $A_V \in \mathcal{A}_{s_2}(A)$. Формули (32), (33) встановлюють взаємно однозначну відповідність між $\tilde{A} = A_V \in \mathcal{A}_{s_2}(A)$ та $V \in \mathcal{H}_{-2}$-класу (див. теорему 2.5 в [2] та теорему 1 в [15]).

Припустимо, що для заданого $V \in \mathcal{H}_{-2}$-класу існує послідовність операторів $V_n \in \mathcal{H}_{-1}$-класу, $n = 1, 2, \ldots$, яка збігається до V в сенсі (39) (див. нижче) і така, що при кожному n узагальнена сума $\tilde{A}_n = A \tilde{+} V_n$ визначає самоспряжений оператор в $\mathcal{H}$. У кожному конкретному випадку таку послідовність V_n неважко побудувати.

Природно поставити питання про сильну резольвентну збіжність $\tilde{A}_n$ до A_V. З теорії точкових потенціалів (див. [27, 28], а також [4, 5]) відомо, що забезпечити таку збіжність можливо лише після певної регуляризації операторів V_n. У цьому пункті запропоновано конструкцію регуляризованих збурень $V_{n,r}$, яка забезпечує сильну резольвентну збіжність послідовності узагальнених сум $\tilde{A}_{n,r} = A \tilde{+} V_{n,r}$ до оператора A_V, при цьому звичайно всі $\tilde{A}_{n,r}$ належать до $\mathcal{H}_{-1}$-класу.

Далі будемо використовувати позначення:

$$\mathcal{M}_{1,n} = \operatorname{Ker} V_n, \quad \mathcal{M}_{2,n} = \mathcal{M}_{1,n} \cap \mathcal{H}_2,$$

$$\mathcal{N}_{2,n} = \mathcal{H}_2 \ominus \mathcal{M}_{2,n}, \quad \mathcal{N}_{1,n} = \mathcal{H}_1 \ominus \mathcal{M}_{1,n}.$$

Згідно з (6) маємо $\mathcal{M}_{2,n} \sqsubset \mathcal{M}_{1,n} \sqsubset \mathcal{H}$. Розглянемо в $\mathcal{H}$ послідовність симетричних операторів $\dot{A}_n = A \mid \mathcal{M}_{2,n}$. Нехай $A_{n,\infty}$ — розширення за Фрідріхсом цих операторів.

Тоді очевидно, що $\mathcal{D}(A_{n,\infty}^{1/2}) = \mathcal{M}_{1,n}$, а також аналогічно (15) $\mathcal{N}_{1,n} \subset \mathcal{N}_{0,n}$, де $\mathcal{N}_{0,n} = \operatorname{Ker} \dot{A}_n^*$. Введемо в дефектних підпросторах $\mathcal{N}_{0,n}$ оператори B_n:

$$\mathcal{D}(B_n) := \left\{\eta \in \mathcal{N}_{1,n} \mid \eta = P_{\mathcal{N}_{1,n}}\varphi,\ \varphi \in \mathcal{N}_{2,n} \subset \mathcal{D}(A)\right\},$$

$$B_n\eta = A\varphi \in \mathcal{N}_{0,n}, \quad \eta \in \mathcal{D}(B_n). \tag{34}$$

З леми випливає, що при кожному $n = 1, 2, \ldots$ для оператора A справедлива рівність

$$A^{-1} = A_{n,\infty}^{-1} + B_n^{-1} P_{\mathcal{N}_{0,n}}. \tag{35}$$

В роботі [4] показано, що при необтяжливих умовах на збіжність операторів $V_n \in \mathcal{H}_{-1}$-класу до оператора $V \in \mathcal{H}_{-2}$-класу послідовність збурених операторів $\tilde{A}_n = A \dotplus V_n$ з необхідністю збігається до незбуреного оператора A, тобто справедливі наступні факти. Нехай ν_n, ν — замкнені квадратичні форми в $\mathcal{H}_1$ та $\mathcal{H}_2$, породжені операторами V_n та V з областями визначення $Q(\nu_n) \subset \mathcal{H}_1$ та $Q(\nu) \subset \mathcal{H}_2$. Не втрачаючи загальності, вважаємо, що $Q(\nu) \subset Q(\nu_n)$. Припустимо, що форми ν_n збігаються до ν: $\nu_n[\varphi] \to \nu[\varphi]$, $\varphi \in Q(\nu)$, $n \to \infty$, при цьому для кожного $\varphi \in \mathcal{M}_2 = \operatorname{Ker} V$ існує послідовність $\varphi_n \in \mathcal{M}_{2,n}$ така, що $\varphi_n \to \varphi$ в сильному сенсі в $\mathcal{H}_1$. Тоді

$$A_{n,\infty} \xrightarrow{\text{с.р.з.}} A,$$

а також

$$\tilde{A}_n = A \dotplus V_n \xrightarrow{\text{с.р.з.}} A, \tag{36}$$

де $\xrightarrow{\text{с.р.з.}}$ позначає сильну резольвентну збіжність. Зокрема, послідовність обмежених операторів $B_n^{-1} P_{\mathcal{N}_{0,n}}$ з формули (35) збігається до нуля в сильному сенсі:

$$s - \lim_{n\to\infty} B_n^{-1} P_{\mathcal{N}_{0,n}} \to 0, \tag{37}$$

або, що еквівалентно, $B_n \to \infty$. Останній факт у фізичній літературі пов'язують з феноменом розбіжності спостережуваних, який звичайно долають процедурою так званих перенормувань (або регуляризацій).

Отже, щоб одержати замість (36) нетривіальний результат, потрібно якимнебудь чином скомпенсувати розбіжність послідовності операторів B_n. Нижче це досягається певною регуляризацією сингулярних збурень V_n.

Поставимо збуренню V_n у відповідність регуляризоване збурення $V_{n,r}$ згідно з формулою

$$V_{n,r} = \check{V}_{n,r} P_{\mathcal{N}_{1,n}} \equiv \left(\check{V}_n^{-1} - \check{O}_n^{-1}\right)^{-1} P_{\mathcal{N}_{1,n}}, \tag{38}$$

де $\check{V}_n := V_n | \mathcal{N}_{1,n}$, $\check{O}_n = O_n | \mathcal{N}_{1,n}$ — звуження відповідних операторів на підпростір $\mathcal{N}_{1,n} = (\operatorname{Ker} V_n)^{\perp}$, а $O_n = \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_{-1}$ — довільна послідовність самоспряжених обернено обмежених на $\mathcal{N}_{1,n}$ операторів, скрізь на $\mathcal{N}_{1,n}$ відмінних від $\check{V}_n$. Наприклад, можна покласти $O_n = \mathbf{A} P_{\mathcal{N}_{1,n}}$. Очевидно, що $\operatorname{Ker} V_n =$

$= \operatorname{Ker} V_{n,r}$. Тому всі $V_{n,r} \in \mathcal{H}_{-1}$-класу і виконується умова $-1 \in \rho(V_{n,r})$. Отже, на підставі твердження 1 існують сингулярно збурені оператори $\tilde{A}_{n,r} = A \tilde{+} \tilde{+} V_{n,r}$, які належать множині $\mathcal{A}_{s_1}(A)$. Таким чином, справедлива наступна теорема.

Теорема 4. *Нехай за заданим сингулярним збуренням $V \in \mathcal{H}_{-2}$-класу побудовано оператор $A_V \in \mathcal{A}_{s_2}(A)$ згідно з формулою (32). Припустимо, що існує послідовність операторів $V_n \in \mathcal{H}_{-1}$-класу, яка збігається до V в наступному сенсі:*

$$s - \lim_{n\to\infty} B_n \check{V}_n^{-1} \mathbf{A} P_{\mathcal{N}_{1,n}} = A \check{V}^{-1} \mathbf{A} P_{\mathcal{N}_0}, \tag{39}$$

де $\check{V} := V | \mathcal{N}_1$, а B_n визначені в (34). *Припустимо, що регуляризуючі оператори O_n в* (38) *задовольняють умову*

$$s - \mathcal{H}_1 - \lim_{n\to\infty} [\check{O}_n^{-1} - \check{\mathbf{A}}_n^{-1}] = 0, \tag{40}$$

де $\check{\mathbf{A}}_n := \mathbf{A} | \mathcal{N}_{1,n}$. Тоді регуляризовані збурення $V_{n,r}$ побудовані згідно з (38) *належать $\mathcal{H}_{-1}$-класу, а послідовність узагальнених сум $\tilde{A}_{n,r} = A \tilde{+} V_{n,r}$ збігається до A_V в сильному резольвентному сенсі*

$$\tilde{A}_{n,r} \xrightarrow{\text{с.р.з.}} A_V, \quad n \to \infty. \tag{41}$$

При цьому всі $\tilde{A}_{n,r} \in \mathcal{A}_{s_1}(A)$.

Доведення. Внаслідок резольвентної тотожності (див. (24), (19), (27)) для оператора $A_{n,r}$ виконується рівність

$$\tilde{A}_{n,r}^{-1} = A^{-1} - \left(I + \mathbf{A}^{-1} V_{n,r}\right)^{-1} \mathbf{A}^{-1} V_{n,r} A^{-1} = A^{-1} - B_{n,r}^{-1} P_{\mathcal{N}_{0,n}},$$

де на підставі формул (34), (19) оператор

$$B_{n,r}^{-1} = -\left[B_n\left(\check{V}_n^{-1} + I_{\mathcal{N}_{1,n}}\right)\right]^{-1}$$

є коректно означеним в підпросторі $\mathcal{N}_{0,n}$. Використовуючи (38), маємо

$$B_{n,r} = -B_n \check{V}_n^{-1} \check{\mathbf{A}}_n - B_n = -B_n(\check{V}_n^{-1} - \check{O}_n^{-1}) P_{\mathcal{N}_{1,n}} \check{\mathbf{A}}_n - B_n =$$

$$= -B_n \check{V}_n^{-1} \check{\mathbf{A}}_n + B_n \check{O}_n^{-1} \check{\mathbf{A}}_n - B_n.$$

Умова (40) забезпечує збіжність в сильному сенсі послідовності операторів $B_n \check{O}_n^{-1} \check{\mathbf{A}}_n$ до B_n. Отже,

$$s - \lim_{n\to\infty} (-B_{n,r}^{-1}) = s - \lim_{n\to\infty} (B_n \check{V}_n^{-1} \check{\mathbf{A}})^{-1}.$$

Тому згідно з (39) маємо

$$s - \lim_{n\to\infty} B_{n,r}^{-1} P_{\mathcal{N}_{0,n}} = B_V^{-1} P_{\mathcal{N}_0}.$$

Тепер (41) випливає з (32) та (33).

1. *Кошманенко В. Д.* Сингулярные билинейные формы в теории возмущений самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1993. English translation: *Volodymyr Koshmanenko.* Singular quadratic forms in perturbation theory. – Kluwer: Acad. Publ., 1999.
2. *Albeverio S., Karwowski W., Koshmanenko V.* Square power of singularly perturbed operators // Math. Nachr. – 1995. – **173**. – P. 5 – 24.
3. *Albeverio S., Koshmanenko V.* Singular rank one perturbations of self-adjoint extensions // Potential Anal. – 1999. – **11**. – P. 279 – 287.
4. *Albeverio S., Koshmanenko V.* On form-sum approximations of singularity perturbed positive self-adjoint operators // J. Funct. Anal. – 1999. – **169**. – P. 32 – 51.
5. *Albeverio S., Koshmanenko V.* On the problem of the right Hamiltonian under singular form-sum perturbations // Rev. Math. Phys. – 2000. – **12**, № 1.
6. *Albeverio S., Koshmanenko V., Makarov K. A.* Generalized eigenfunctions under singular perturbations // Methods Funct. Anal. Topol. – 1999. – **5**, № 1. – P. 13 – 27.
7. *Albeverio S., Brasche J. F., Koshmanenko V.* Lippmann – Schwinger equation for singularly perturbed operators // Ibid. – 1997. – **3**, № 1. – P. 1 – 27.
8. *Brasche J. F., Koshmanenko V. D., Neidhardt H.* New aspects of Krein's extension theory // Ukr. Math. J. – 1994. – **46**, № 1. – P. 37 – 54.
9. *Gesztesy F., Simon B.* Rank-one perturbations at infinite coupling // J. Funct. Anal. – 1995. – **128**. – P. 245 – 252.
10. *Каратаева Т. В., Кошманенко В. Д.* Обобщенная сумма операторов // Мат. заметки. – 1999. – **66**, № 5. – С. 671 – 681.
11. *Карвовский В., Кошманенко В. Д.* Об определении сингулярных билинейных форм и сингулярных линейных операторов // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 8. – С. 1084 – 1089.
12. *Karwowsky W., Koshmanenko V., Ôta S.* Schrödinger operator perturbed by operators related to null-sets // Positivity. – 1998. – **2**. – P. 77 – 99.
13. *Кошманенко В. Д.* Сингулярные билинейные формы и самосопряженные расширения симметрических операторов // Спектральный анализ дифференциальных операторов. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1980. – С. 37 – 48.
14. *Кошманенко В. Д.* Возмущения самосопряженных операторов сингулярными билинейными формами // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 1. – С. 1 – 14.
15. *Koshmanenko V. D.* Singularly perturbed operators // Operator Theory. Adv. and Appl. – 1994. – **70**. – P. 347 – 351.
16. *Кошманенко В. Д.* Сингулярные возмущения с бесконечной константой связи // Функцион. анализ и его прил. – 1999. – **33**, № 2. – С. 81 – 84.
17. *Koshmanenko V. D.* Singular operator as a parameter of self-adjoint extensions // Operator Theory. Adv. and Appl. – 2000. – **118**. – P. 205 – 225.
18. *Кошманенко В. Д., Самойленко О. В.* Сингулярні збурення скінченного рангу. Точковий спектр // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 9. – С. 1186 – 1212.
19. *Кошманенко В. Д., Ота Ш.* Про характеристичні властивості сингулярних операторів // Там же. – 1996. – **48**, № 11. – С. 1484 – 1493.
20. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1966. – 543 с.
21. *Крейн М. Г.* Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ее приложения. I // Мат. сб. – 1947. – **20**. – С. 431 – 495.
22. *Березанский Ю. М.* Самосопряженные операторы в пространствах функций бесконечного числа переменных. – Киев: Наук. думка, 1978. – 360 с.
23. *Березанский Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель З. Г.* Функциональный анализ. – Киев: Выща шк., 1990. – 600 с.
24. *Березанский Ю. М.* Билинейные формы и гильбертовы оснащения // Спектральный анализ дифференциальных операторов. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1980. – С. 83 – 106.
25. *Крейн М. Г., Яврян В. А.* О функциях спектрального сдвига, возникающих при возмущениях положительного оператора // J. Operator Theory. – 1981. – **6**. – P. 155 – 191.
26. *Reed M., Simon B.* Methods of modern mathematical physics. II. Fourier analysis, self-adjointness. – New York etc.: Acad. Press, 1975.
27. *Нижник Л. П.* О точечном взаимодействии в квантовой механике // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 11. – С. 1557 – 1560.
28. *Albeverio S., Nizhnik L.* Approximation of general zero-range potentials. – Bonn, 1998. – 12 p. – (Preprint / Bonn Univ.; № 585).
29. *Бирман М. Ш.* К теории расширений положительно определенных операторов // Мат. сб. – 1956. – **38** (80). – С. 431 – 450.

Одержано 15.01.99