УДК 519.4

В. Г. Палюткин (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

БИГРУППЫ ЛИ – КАЦА

The Lie – Kac bigroups are defined as special double Hilbert algebras which canonically correspond to ring groups (the Kac algebras) and are related to the Lie bialgebras.

Визначено бігрупи Лі – Каца як спеціальні подвійні гільбертові алгебри, що канонічно відповідають кільцевим групам (алгебрам Каца), і зв'язані з біалгебрами Лі.

1. В работе рассматриваются объекты, называемые здесь бигруппами Ли и бигруппами Ли–Каца. Чтобы определить их, обратимся сначала к биалгебрам Ли [1], считая, что все упоминаемые далее векторные пространства конечномерны и вещественны.

Определение 1. *Говорят, что алгебры Ли* T, T', *приведенные в двойственность билинейной формой* $\langle\cdot,\cdot\rangle$, *составляют биалгебру Ли* $T*T'$ *относительно этой формы, если скобки Ли в* T *и* T' *вместе со скобкой*

$$[t, t'] := -\mathrm{ad}'_T t(t') + \mathrm{ad}'_{T'} t'(t), \qquad t \in T, \quad t' \in T',$$

где операции $\mathrm{ad}'_T t$, $\mathrm{ad}'_{T'} t'$ — *сопряженные относительно формы* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *соответственно операциям* $\mathrm{ad}_T t$, $\mathrm{ad}_{T'} t'$, *задают структуру алгебры Ли на прямом произведении* TT' *векторных пространств* T *и* T'.

Таким образом, T и T' — подалгебры Ли в $T*T'$ и $TT' = T*T'$ как векторные пространства.

Определение 2. *Назовем группу Ли* S *с алгеброй Ли* $T*T'$ *бигруппой Ли, если каждый элемент* $s \in S$ *однозначно представим в виде* $s = s_T s_{T'}$, *где* s_T, $s_{T'}$ — *элементы из подгрупп* S_T, $S_{T'}$ *с алгебрами Ли* T *и* T' *соответственно.*

По аналогии с определением 1 будем говорить, что группы Ли S_T и $S_{T'}$ составляют бигруппу Ли относительно формы $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Согласно приведенному определению бигруппы Ли — специальный случай таких групп

$$R = Q*P, \tag{1}$$

что любой элемент $r \in R$ однозначно выражается в виде группового произведения $r = qp$, $q \in Q$, $p \in P$, подгрупп

$$Q, \ P. \tag{2}$$

По такой группе однозначно определяются преобразования

$$P(p): Q \to Q, \quad p \in P, \qquad Q(q): P \to P, \quad q \in Q, \tag{3}$$

как решения $\hat{p}$, $\hat{q}$ уравнения

$$\hat{q}p = \hat{p}q, \quad p, \hat{p} \in P, \quad q, \hat{q} \in Q, \qquad \hat{q} = P(p)q, \quad \hat{p} = Q(q)p.$$

Таким образом,

$$pq^{-1} = (P(p))^{-1}Q(q)p, \qquad p \in P, \quad q \in Q. \tag{4}$$

Из групповых аксиом следует, что:

1) первое и второе отображения в (3) — гомоморфизмы групп P, Q в группы преобразований множеств Q и P соответственно;

2) справедливы равенства

$$P(p)(q_1q) = (P(Q(q)p)q_1)P(p)q, \tag{5}$$

$$Q(q)(p_1p) = (Q(P(p)q)p_1)Q(q)p, \quad p, p_1 \in P, \quad q, q_1 \in Q. \tag{6}$$

Группу R можно отождествить как множество с прямым произведением QP множеств Q, P с помощью координатного отображения

$$r = qp \to (q, p), \quad r \in R. \tag{7}$$

Обратно, две группы Q, P, связанные преобразованиями (3), которые удовлетворяют условиям 1, 2, определяют на прямом произведении QP структуру группы $R = Q * P$.

Условимся не различать обозначений алгебры Ли и отвечающей ей группы Ли, если в последней введены координаты, отождествляющие эту группу как множество с ее алгеброй Ли. В случае необходимости будем указывать явно смысл таких двузначных символов.

По этой договоренности бигруппа Ли из определения 2 допускает обозначение $T * T'$, если существуют координатные отображения $s_T \to T$, $s_{T'} \to T'$, образы которых совпадают с T, T' соответственно.

2. Прежде чем определить бигруппу Ли–Каца, условимся называть *групповой неймановской алгеброй* $N(G)$ группы Ли G неймановскую алгебру, порожденную операторами левых групповых сдвигов в $L_2(G, d\mu)$, $d\mu$ — левая мера Хаара группы G.

Определение 3. *Будем говорить, что две унимодулярные группы Ли* G_1 *и* G_2 *составляют бигруппу Ли–Каца, если существует такая двойная гильбертова алгебра* A (*см.* [2], §3), *удовлетворяющая условиям Каца* ([3], §5, *теорема* 5.2), *что алгебра* $N(G_1)$ *(соответственно* $N(G_2)$*) пространственно изоморфна неймановской алгебре, связанной с* A *слева по первой (соответственно второй) паре операций.*

Напомним, что двойная гильбертова алгебра (д. г. а.) — это предгильбертово пространство A, снабженное структурами двух гильбертовых алгебр [4] (п. A54 приложения),

$$a, b \to a \Delta b, \quad a \to a^{\Delta}; \quad a, b \to a \nabla b, \quad a \to a^{\nabla}, \quad a, b \in A, \tag{8}$$

причем оператор V, действующий из алгебраического тензорного произведения $A \otimes A$ в его замыкание по гильбертовой норме $\overline{A \otimes A}$ и определяемый равенством

$$\left(a \otimes b_1^{\nabla}, V\left(a_1^{\Delta} \otimes b\right)\right) = (a \Delta a_1, b \nabla b_1), \quad a, a_1, b, b_1 \in A, \tag{8}$$

ограничен. Здесь $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $\overline{A \otimes A}$.

Неймановская алгебра N_{Δ} (соответственно N_{∇}), связанная слева с A по первой (соответственно второй) паре операций, порождена расширениями на $\overline{A}$ (замыкании A по гильбертовой норме) линейных операций $b \to a \Delta b$ (соответственно $b \to a \nabla b$), которые по определению гильбертовой алгебры постулируются ограниченными, причем переходу от a к a^{Δ} (соответственно от a к a^{∇}) соответствует переход в N_{Δ} (соответственно N_{∇}) к сопряженному оператору, $a, b \in A$.

Говорят, что д. г. а. удовлетворяет условиям Каца, если оператор $V: \overline{A \otimes A} \to \overline{A \otimes A}$ унитарен и

$$\left(a^{\nabla}\right)^{\Delta} = \left(a^{\Delta}\right)^{\nabla}, \quad (a \nabla b)^{\Delta} = a^{\Delta} \nabla b^{\Delta},$$
$$(a \Delta b)^{\nabla} = a^{\nabla} \Delta b^{\nabla}, \quad a, b, \in A; \tag{10}$$

$$(V\otimes I)(I\otimes V) = (I\otimes V)(I\otimes\sim)(V\otimes I)(I\otimes\sim)(V\otimes I), \quad I := \mathrm{id}. \tag{11}$$

Здесь символ $\sim$ означает такую линейную операцию на $\overline{A\otimes A}$, что $\sim(a\otimes b) = b\otimes a$, операторы в равенстве (11) — расширения на $\overline{A^{\otimes 3}}$ (замыкании алгебраических тензорных произведений $\overline{A^{\otimes 2}}\otimes A$ или $A\otimes\overline{A^{\otimes 2}}$ по гильбертовой норме) операторов, очевидным образом определенных на одном из последних пространств.

3. Далее дается описание класса пар групп Ли, составляющих при определенных условиях бигруппы Ли–Каца.

Пусть G и Γ — вещественные конечномерные алгебры Ли, а G', Γ' — векторные пространства, приведенные в двойственность с G, Γ билинейными формами $\langle\cdot,\cdot\rangle_G$, $\langle\cdot,\cdot\rangle_\Gamma$ соответственно.

Очевидно, что форма

$$\langle t, t'\rangle := \langle g, g'\rangle_G + \langle\gamma,\gamma'\rangle_\Gamma, \qquad t = (g,\gamma'), \quad t' = (\gamma, g'), \tag{12}$$

приводит в двойственность прямое произведение $G\Gamma'$ векторных пространств G, Γ' с прямым произведением $\Gamma G'$ векторных пространств Γ, G'.

Предположим, что на Γ' задана структура G-модуля, а на G' — Γ-модуля. Примем общее обозначение $G\circ\Gamma'$ для произвольного расширения алгебры Ли G с помощью G-модуля Γ', рассматриваемого как коммутативная алгебра Ли. Обозначением $G\cdot\Gamma'$ выделим тривиальное расширение, т. е. полупрямое произведение упомянутой алгебры и модуля.

Алгебру Ли $G\cdot\Gamma'$ будем называть *тривиализацией* заданного расширения $G\circ\Gamma'$.

Аналогичным образом определяется алгебра Ли $\Gamma\circ G'$ и ее тривиализация $\Gamma\cdot G'$. Отметим отождествления

$$G\circ\Gamma' = G\cdot\Gamma' = G\Gamma', \qquad \Gamma\circ G' = \Gamma\cdot G' = \Gamma G' \tag{13}$$

по векторной структуре. Далее считаем, что всем упомянутым в этом пункте алгебрам Ли отвечают экспоненциальные группы Ли. В тех, что отвечают алгебрам Ли G, Γ, G', Γ', введем канонические координаты первого рода, отождествляя их тем самым как множества с соответствующими алгебрами Ли и обозначая в согласии с принятой договоренностью символами этих алгебр. При этом базисы в алгебрах Ли выберем так, чтобы форма $\langle\cdot,\cdot\rangle_G$ (соответственно $\langle\cdot,\cdot\rangle_\Gamma$) (см. (12)) на векторах $g\in G$, $g'\in G'$ (соответственно $\gamma\in\Gamma$, $\gamma'\in\Gamma'$) принимала значение, равное сумме произведений одинаковых по номеру координат этих векторов.

Среди остальных из упомянутых групп рассмотрим прежде всего группы Ли, отвечающие алгебрам Ли $G\cdot\Gamma'$, $G\circ\Gamma'$, и в первой (соответственно второй) из них обозначим групповое произведение ее элементов t, t_1 в приведенном порядке через $t\cdot t_1$ (соответственно $t\circ t_1$), а обратный к t — через $t^{\cdot}$ (соответственно t°).

Любой элемент группы Ли с алгеброй Ли $G\cdot\Gamma'$ однозначно представим как групповое произведение $g\cdot\gamma'$ двух элементов, где первый (соответственно второй) принадлежит подгруппе G (соответственно Γ').

Тогда отображение

$$g\cdot\gamma'\to(g,\gamma'), \qquad g\in G, \quad \gamma'\in\Gamma', \tag{14}$$

задает координаты в рассматриваемой группе и представляет ее как множество в виде прямого произведения $G\Gamma'$ векторных пространств G и Γ'. То же можно сказать и о группе Ли с алгеброй Ли $G\circ\Gamma'$, где любой элемент также представим однозначно в виде $g\circ\gamma'$, $g\in G$, $\gamma'\in\Gamma'$, и отображение

$$g \circ \gamma' \to (g, \gamma'), \quad g \in G, \quad \gamma' \in \Gamma', \tag{15}$$

также задает координаты в рассматриваемой группе, причем редукция последних на G и Γ' совпадает с ранее введенными.

Очевидно, при всех координатных отображениях, о которых говорилось выше, единица группы переходит в нуль-вектор $\overline{0}$ соответствующего векторного пространства.

Нетрудно убедиться, что в координатах (14) и (15) имеем

$$t^{\circ} = t^{\cdot}, \quad t = (g, \gamma') \in G\Gamma'. \tag{16}$$

В соответствии с договоренностью обозначаем группы Ли, отвечающие алгебрам Ли $G \cdot \Gamma'$, $G \circ \Gamma'$, символами их алгебр Ли. Очевидно, тогда отождествления (13) справедливы и в групповой интерпретации.

Отметим, что согласно принятым обозначениям элемент $g \in G$ или $\gamma' \in \Gamma'$ при интерпретации G и Γ' как подмножеств в $G \cdot \Gamma'$ или $G \circ \Gamma'$ отождествляется с его образом при отображении (14) или (15), т. е. $g = (g, \overline{0})$, $\gamma' = (\overline{0}, \gamma')$. С другой стороны, будем обозначать через $(t)_G$, $(t)_{\Gamma'}$ элементы из G и Γ', определяемые соответственно как G- и Γ'-компоненты элемента t из $G \cdot \Gamma'$ или $G \circ \Gamma'$.

Групповые операции в векторной группе Ли естественно записывать в аддитивной форме. Тогда групповые операции над элементами групп $G \cdot \Gamma'$ и $G \circ \Gamma'$ можно выразить следующим образом:

$$(g, \gamma') \cdot (g_1, \gamma_1') = \left(g \cdot g_1, \exp E_{g_1^{\cdot}}(\gamma') + \gamma_1'\right), \tag{17}$$

$$\begin{gathered} (g, \gamma') \circ (g_1, \gamma_1') = \left(g \cdot g_1, \exp E_{g_1^{\cdot}}(\gamma') + \gamma_1' + \{g, g_1\}\right), \\ g, g_1 \in G, \quad \gamma', \gamma_1' \in \Gamma'; \end{gathered} \tag{18}$$

$$(g, \gamma')^{\cdot} = (g, \gamma')^{\circ} = \left(g^{\cdot}, -\exp E_{g^{\cdot}}(\gamma)\right), \quad g \in G, \quad \gamma' \in \Gamma'. \tag{19}$$

Здесь $g \to E_g : \Gamma' \to \Gamma'$ — представление алгебры Ли G, определяющее структуру G-модуля в Γ', $\{g, g_1\}$ — 2-коцикл, соответствующий расширению $G \circ \Gamma'$, т. е. Γ'-компонента элемента $(g, \overline{0}) \circ (g_1, \overline{0}) = g \circ g_1 \in G\Gamma'$, $g \cdot g_1$ — групповое произведение в канонических координатах первого рода в G, совпадающее с G-компонентой как элемента $(g, \overline{0}) \cdot (g_1, \overline{0})$, так и элемента $(g, \overline{0}) \circ (g_1, \overline{0})$.

Отметим, что в силу (16)

$$\left(g \circ g^{\cdot}\right)_{\Gamma'} = \left\{g, g^{\cdot}\right\} = \overline{0}. \tag{20}$$

Как следует из смысла знаков $\circ$ и $\cdot$, последний есть специальный случай первого. В некоторых ситуациях эти знаки можно отождествлять друг с другом, равно как и с некоторыми стандартными символами векторной структуры, например, $\gamma' \circ \gamma_1' = \gamma' \cdot \gamma_1' = \gamma' + \gamma_1'$; $\gamma', \gamma_1' \in \Gamma'$.

Повторим все изложенное в этом пункте, проводя формальную замену

$$\gamma \leftrightarrow g, \qquad \Gamma \leftrightarrow G \tag{21}$$

при сохранении индексного оснащения символов. Тем самым введем обозначения групповых операций, а также координаты в группах Ли $\Gamma \cdot G'$ и $\Gamma \circ G'$. При этом групповые операции в этих группах выражаются формулами, получаемыми из (17) заменой (21).

Условимся использовать далее запись $(21) \cdot (\cdot)$ для ссылки в тексте на результат замены (21) в формуле с номером $(\cdot)$.

4. Теорема. *Пусть* G, Γ *— алгебры Ли, отвечающие экспоненциальным группам Ли, а* G', Γ' *— векторные пространства, приведенные в двойственность соответственно с* G *и* Γ *и билинейной формой* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *вида* (12).

Пусть далее $G\circ\Gamma'$, $\Gamma\circ G'$ *— группы Ли, определенные в п. 3, а* $G\cdot\Gamma'$ *и* $\Gamma\cdot G'$ *— соответственно их тривиализации, причем пары*

$$G\cdot\Gamma',\quad \Gamma\circ G' \quad \text{и} \quad G\circ\Gamma',\quad \Gamma\cdot G' \tag{22}$$

составляют бигруппы Ли относительно формы $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *(см. определение* 2). *Тогда пара* $G\cdot\Gamma'$, $\Gamma\cdot G'$ *также составляет бигруппу Ли относительно той же формы.*

Предположим дополнительно, что:

1) *последняя из упомянутых бигрупп унимодулярна, равно как и ее подгруппы*

$$G\cdot\Gamma',\quad \Gamma\cdot G',\quad G,\quad \Gamma, \tag{23}$$

2) *справедливы равенства*

$$\langle \mathring{\Gamma}(\gamma)g, t\rangle = \langle g, t\circ\gamma\rangle, \tag{24}$$

$$\langle t', \mathring{G}(g)\gamma\rangle = \langle g\circ t', \gamma\rangle, \tag{25}$$

$$\langle \dot{\Gamma}(\gamma)g, \gamma_1\rangle = \langle \dot{G}(g)\gamma, g_1\rangle = 0, \tag{26}$$

$$t\in\Gamma\circ G' \quad t'\in G\circ\Gamma' \quad g, g_1\in G,\quad \gamma,\gamma_1\in\Gamma,$$

где пара отображений $\dot{G}(g)$, $\mathring{\Gamma}(\gamma)$ *(соответственно* $\mathring{G}(g)$, $\dot{\Gamma}(\gamma)$*) соответствует паре отображений* (3) *при спецификации пары подгрупп* (2) *как первой (соответственно второй) пары в* (22).

Тогда бигруппы Ли $G\circ\Gamma'$, $\Gamma\circ G'$ *составляют бигруппы Ли–Каца.*

5. Доказательству теоремы предпошлем две леммы и следующие обозначения:

$$\Gamma(\gamma) := \mathrm{Ad}'_{\Gamma\cdot G'}\gamma^{\cdot}: G\to G,\qquad G(g) := \mathrm{Ad}'_{G\cdot\Gamma'}g^{\cdot}: \Gamma\to\Gamma,$$
$$g\in G,\quad \gamma\in\Gamma. \tag{27}$$

Здесь и далее штрих над знаком линейных операций означает переход к сопряженным относительно формы (12) операциям.

Лемма 1. *При выполнении условий теоремы имеем*

$$\dot{\Gamma}(\gamma)g = \left(\mathring{\Gamma}(\gamma)g\right)_G = \Gamma(\gamma)g, \tag{28}$$

$$\dot{G}(g)\gamma = \left(\mathring{G}(g)\gamma\right)_\Gamma = G(g)\gamma,\qquad g\in G,\quad \gamma\in\Gamma. \tag{29}$$

Доказательство. Вторые равенства в цепочках (28) и (29) легко проверить на основании условий (24), (25) теоремы при $t=g'$ и $t'=g'$ и учета равенств (17) – (19), (27). Для доказательства остальных равенств в (28), (29) обратимся к алгебрам Ли $(G\circ\Gamma')*(\Gamma\cdot G')$, $(G\cdot\Gamma')*(\Gamma\circ G')$. Непосредственно проверяется, что в каждой из них подпространство $\Gamma'G'$ представляет собой коммутативный идеал, причем фактор-алгебры по этому идеалу совпадают. В любой из указанных групп Ли этому идеалу соответствует нормальная векторная подгруппа $\Gamma'G'$, а совпадающим фактор-алгебрам — структура группы Ли $G*\Gamma$, возникающая после редукции на $G\Gamma$ результатов групповых операций над элементами из G и Γ.

Обозначим групповые произведения элементов t, t_1 в группах

$$(G \circ \Gamma') * (\Gamma \cdot G'), \qquad (G \cdot \Gamma') * (\Gamma \circ G'), \qquad G * \Gamma \tag{30}$$

соответственно через $t \wedge t_1$, $t \vee t_1$, $t * t_1$, а обратные к t — через $t^{\wedge}, t^{\vee}, t^{*}$, отождествляя эти обозначения с ранее введенными в подгруппах, составляющих бигруппы Ли (30). Спецификации координатных отображений (7) для этих бигрупп выражаются в терминах символов $\wedge$ и $\vee$ соответственно в виде

$$g \wedge \gamma' \wedge \gamma \wedge g' \to (g, \gamma', \gamma, g'),$$
$$g \vee \gamma' \vee \gamma \vee g' \to (g, \gamma', \gamma, g') \in G\Gamma'\Gamma G'.$$

Совпадающие редукции этих отображений на $G\Gamma$ приводят к координатам на группе $G * \Gamma$:

$$\begin{aligned} g * \gamma &\to (g \wedge \gamma)_{G\Gamma} \to (g, \gamma) \in G\Gamma, \\ g * \gamma &\to (g \vee \gamma)_{G\Gamma} \to (g, \gamma) \in G\Gamma. \end{aligned} \tag{31}$$

Выражая в этих координатах элемент $\gamma * g \in G * \Gamma$, имеем, с одной стороны,

$$\gamma * g \to \left(\left(\dot{\Gamma}(\gamma)g^{\circ}\right)^{\circ} \wedge \mathring{G}(g)\gamma\right)_{G\Gamma} = \left(\left(\left(\dot{\Gamma}(\gamma)g^{\circ}\right)^{\circ}\right)_{G}, \left(\mathring{G}\left(g^{\circ}\right)\gamma\right)_{\Gamma}\right) \in G\Gamma, \tag{32}$$

а с другой —

$$\gamma * g \to \left(\left(\mathring{\Gamma}(\gamma)g^{\circ}\right)^{\circ} \vee \dot{G}(g)\gamma\right)_{G\Gamma} = \left(\left(\left(\mathring{\Gamma}(\gamma)g^{\cdot}\right)^{\cdot}\right)_{G}, \left(\dot{G}\left(g^{\cdot}\right)\gamma\right)_{\Gamma}\right) \in G\Gamma. \tag{33}$$

Покомпонентное сравнение (32) и (33) приводит к равенствам

$$\left(\dot{\Gamma}(\gamma)g\right)_{G} = \left(\mathring{\Gamma}(\gamma)g\right)_{G}, \quad \left(\dot{G}(g)\gamma\right)_{\Gamma} = \left(\mathring{G}(g)\gamma\right)_{\Gamma}, \qquad g \in G, \quad \gamma \in \Gamma,$$

левые части которых совпадают в силу условия (26) с $\dot{\Gamma}(\gamma)g$ и $\dot{G}(g)\gamma$ соответственно, что означает справедливость требуемых равенств. Лемма доказана.

Лемма 2. *При выполнении условий теоремы и при обозначениях* (27) *справедливы равенства*

$$\langle g_1 \cdot g, \gamma_1 \circ \gamma \rangle = \langle g, \gamma_1 \circ \gamma \rangle + \langle g_1, G(\Gamma(\dot{\gamma})g)\gamma_1 \circ G(g)\gamma \rangle, \tag{34}$$

$$\Gamma(\gamma)(g_1 \cdot g) = \Gamma(G(g)\gamma)g_1 \cdot \Gamma(\gamma)g, \qquad g, g_1 \in G, \quad \gamma, \gamma_1 \in \Gamma; \tag{35}$$

$$\langle \gamma_1 \cdot \gamma, g_1 \circ g \rangle = \langle \gamma, g_1 \circ g \rangle + \langle \gamma_1, \Gamma(G(g)\gamma)g_1 \circ \Gamma(\gamma)g \rangle, \tag{36}$$

$$G(g)(\gamma_1 \cdot \gamma) = G(\Gamma(\gamma)g)\gamma_1 \cdot G(g)\gamma, \qquad \gamma, \gamma_1 \in \Gamma, \quad g, g_1 \in G. \tag{37}$$

Доказательство. Рассматривая группу $(G \cdot \Gamma') * (\Gamma \circ G')$ в контексте п.1, т. е. специфицируя операции $P(p)$ и $Q(q)$ (см. (3)) как $\mathring{\Gamma}(\gamma)$ и $\dot{G}(g)$ $(p = \gamma,$ $q = g)$ соответственно, а затем учитывая равенства (5) и (6) в этой спецификации, имеем

$$\mathring{\Gamma}(\gamma)(g_1 \cdot g) = \mathring{\Gamma}\left(\dot{G}(g)\gamma\right)g_1 \cdot \mathring{\Gamma}(\gamma)g =$$

$$= \left(\mathring{\Gamma}\left(\dot{G}(g)\gamma\right)g_1\right)_{G} \cdot \left(\mathring{\Gamma}\left(\dot{G}(g)\gamma\right)g_1\right)_{\Gamma'} \cdot \left(\mathring{\Gamma}(\gamma)g\right)_{G}\left(\mathring{\Gamma}(\gamma)g\right)_{\Gamma'} = \left(\left(\mathring{\Gamma}\left(\dot{G}(g)\gamma\right)g_1\right)_{G} \cdot \left(\mathring{\Gamma}(\gamma)g\right)_{G},\right.$$

$$\left.\mathrm{Ad}_{G \cdot \Gamma'}\left(\left(\mathring{\Gamma}(\gamma)g\right)^{\circ}\right)_{G}\left(\left(\mathring{\Gamma}\left(\dot{G}(g)\gamma\right)g_1\right)_{\Gamma'}\right) \cdot \left(\mathring{\Gamma}(\gamma)g\right)_{\Gamma'}\right) \in G\Gamma, \qquad \gamma \in \Gamma, \quad g, g_1 \in G.$$

После сравнения G-компонент крайних частей этой цепочки равенств с учетом леммы 1 приходим к (35), а после сравнения Γ'-компонент — к равенству

$$\left(\mathring{\Gamma}(\gamma)(g_1\cdot g)\right)_{\Gamma'} = \mathrm{Ad}_{G\cdot\Gamma'}(\Gamma(\gamma)g)^{\cdot}\left(\left(\mathring{\Gamma}(G(g)\gamma)g_1\right)_{\Gamma'}\right)\cdot\left(\mathring{\Gamma}(\gamma)g\right)_{\Gamma'}. \tag{38}$$

Переходя к представлениям (17), (19) и (21) · (18), (21) · (18) групповых операций соответственно в группах $G\cdot\Gamma'$ и $\Gamma\circ G'$ а затем спаривая обе части равенства (38) посредством формы $\langle\cdot,\cdot\rangle$ (см. (12)) с произвольным элементом $\gamma_1\in\Gamma$, получаем

$$\left\langle \mathring{\Gamma}(\gamma)(g_1\cdot g), \gamma_1\right\rangle - \left\langle \mathrm{Ad}_{G\cdot\Gamma'}(\Gamma(\gamma)g)^{\cdot}\left(\left(\mathring{\Gamma}(G(g)\gamma)g_1\right)_{\Gamma'}\right), \gamma_1\right\rangle + \left\langle \mathring{\Gamma}(\gamma)g, \gamma_1\right\rangle = 0.$$

Далее после простых преобразований с учетом леммы 1 и условия (24) теоремы приходим к равенствам

$$\langle g_1\cdot g, \gamma_1\circ\gamma\rangle - \left\langle \mathring{\Gamma}(G(g)\gamma)g_1,\ \mathrm{Ad}'_{G\cdot\Gamma'}(\Gamma(\gamma)g)^{\cdot}(\gamma_1)\right\rangle + \langle g, \gamma_1\circ\gamma\rangle =$$

$$= \langle g_1\cdot g, \gamma_1\circ\gamma\rangle + \langle g, \gamma_1\circ\gamma\rangle - \left\langle \mathring{\Gamma}(G(g)\gamma)g_1,\ G(\Gamma(\gamma)g)\gamma_1\right\rangle = 0,$$

откуда, учитывая (24), получаем

$$\langle g_1\cdot g, \gamma_1\circ\gamma\rangle + \langle g, \gamma_1\circ\gamma\rangle - \langle g_1,\ G(\Gamma(\gamma)g)\gamma_1\circ G(g)\gamma\rangle = 0,$$

т. е. требуемое равенство (34). Заметим теперь, что оставшиеся еще не доказанными равенства (36) и (37) получаются заменой (21) соответственно из (34) и (35). Однако рассуждения, приведшие к последним, остаются и после такой замены справедливыми применительно к группе $(G\circ\Gamma')*(\Gamma\cdot G')$, а значит, приводят к требуемым равенствам (36) и (37). Лемма доказана.

Лемма 3. *При выполнении условиий теоремы меры Хаара групп* G, Γ, G', Γ' *инвариантны относительно преобразований*

$$\Gamma(\gamma), \qquad G(g), \qquad \mathrm{Ad}_{\Gamma\cdot G'}\gamma, \qquad \mathrm{Ad}_{G\cdot\Gamma'}g$$

соответственно.

Доказательство. Легко видеть, что предположения теоремы об унимодулярности групп (23) обеспечивают справедливость утверждений леммы относительно последних двух отображений и мер Хаара (т. е. лебеговых мер) векторных групп G' и Γ'.

Для того чтобы доказать и остальные утверждения леммы, воспользуемся определенной при доказательстве леммы 1 группой $G*\Gamma$, которую на основании этой леммы можно рассматривать как группу R вида (1) при спецификации пары подгрупп (2) в R как пары подгрупп G, Γ в $G*\Gamma$, а отображенния (3) — как $\Gamma(\gamma)$, $G(g)$ соответственно. При этом будем считать, что в $G*\Gamma$ введены координаты (31).

Нетрудно проверить, что полупрямое произведение группы $G*\Gamma$ и векторной группы $\Gamma'G'$, на которой первая действует преобразованиями

$$A_{g*\gamma}\colon (\gamma', g') \to \left(\mathrm{Ad}'_{\Gamma}\gamma^{\cdot}\left(\mathrm{Ad}_{G\cdot\Gamma'}g(\gamma')\right), \mathrm{Ad}_{\Gamma\cdot G'}\gamma(\mathrm{Ad}'_{G}g(g'))\right),$$

порождено своими подгруппами $G\cdot\Gamma'$, $\Gamma\cdot G'$ и также оказывается группой вида (1) в спецификации $Q = G\cdot\Gamma'$, $P = \Gamma\cdot G'$, причем алгебра Ли рассматриваемой группы есть биалгебра Ли относительно формы (12), составленная из алгебр Ли $G\cdot\Gamma'$ и $\Gamma\cdot G'$. Иными словами, рассмотренное полупрямое произведение групп оказывается бигруппой Ли $(G\cdot\Gamma')*(\Gamma\cdot G')$.

Из доказательства вместе с предположением теоремы об унимодулярности последней бигруппы Ли следует унимодулярность группы $G*\Gamma$ и, как следствие этого и стандартных результатов о мерах Хаара групп вида (1), требуемая инвариантность мер Хаара групп G, Γ относительно преобразований $\Gamma(\gamma)$ и $G(g)$ соответственно. Лемма доказана.

6. Доказательство теоремы. Построение требуемой бигруппы Ли–Каца начнем с обращения к упомянутой в определении 3 д. г. а., специфицируя символ A из этого определения как пространство $C_0(G\Gamma)$ комплекснозначных непрерывных финитных функций на прямом произведении $G\Gamma$ пространств G и Γ и считая, что на $C_0(G\Gamma)$ индуцирована предгильбертова структура из $L_2(G\Gamma, d\mu_{G\Gamma})$, где $d\mu_{G\Gamma} := d\mu_G d\mu_\Gamma$ — прямое произведение мер Хаара групп G и Γ соответственно. Далее, используя введенные в п. 3 общие обозначения групповых операций в группах Ли $G \circ \Gamma'$, $\Gamma \circ G'$ и их тривиализациях $G \cdot \Gamma'$, $\Gamma \cdot G'$ соответственно, а также операции $G(g)$, $g \in G$, $\Gamma(\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$, введенные в (27), специфицируем операции (8), задающие структуру д. г. а., следующим образом:

$$1)\ \ u \,\Delta\, v(g,\gamma) := \int\limits_G u\big(h, G\big(h^{\cdot} \cdot g\big)\gamma\big) v\big(h^{\cdot} \cdot g, \gamma\big) \exp i\langle h^{\cdot} \circ g, \gamma\rangle \, d\mu_G(h),$$

$$1')\ \ u^{\Delta}(g,\gamma) := \overline{u\big(g^{\cdot}, G(g)\gamma\big)};$$

$$2)\ \ u \,\nabla\, v(g,\gamma) := \int\limits_\Gamma u\big(\Gamma\big(\eta^{\cdot} \cdot \gamma\big) g, \eta\big) v\big(g, \eta^{\cdot} \cdot \gamma\big) \exp i\langle g, \eta^{\cdot} \circ \gamma\rangle \, d\mu_\Gamma(\eta),$$

$$2')\ \ u^{\nabla}(g,\gamma) := \overline{u\big(\Gamma(\gamma) g, \gamma^{\cdot}\big)},\ \ u, v \in C_0(G\Gamma).$$

Здесь $\langle \cdot,\cdot \rangle$ — билинейная форма (12).

Далее определим отображения

$$V_G,\ V_\Gamma : C_0(G\Gamma G\Gamma) \to C_0(G\Gamma G\Gamma),$$

где указанное пространство — аналог $C_0(G\Gamma)$ на прямом произведении $G\Gamma$ на себя, полагая

$$V_G : w\big(((h,\eta),(g,\gamma)\big) \to w\big(\big(\Gamma(\gamma)g\big)^{\cdot} \cdot h, \eta), (g,\gamma)\big) \exp i\langle \big(\Gamma(\gamma)g\big)^{\cdot} \circ h, \eta\rangle, \tag{39}$$

$$\begin{gathered} V_\Gamma : w((h,\eta),(g,\gamma)) \to w((h,\eta),(g, G(h)\eta \cdot \gamma)) \exp i\langle g, (G(h)\eta) \circ \gamma\rangle, \\ w \in C_0(G\Gamma G\Gamma). \end{gathered} \tag{40}$$

Используя равенства (35), (37), (20) и (4) в спецификации

$$Q = G, \quad P = \Gamma; \quad P(p) = \Gamma(\gamma), \quad p = \gamma; \quad Q(q) = G(g), \quad q = g,$$

лемму 3, а также равенство

$$\begin{gathered} \langle \gamma_1 \circ \gamma_2, g\rangle - \langle (\gamma \cdot \gamma_1) \circ \gamma_2, g\rangle + \langle \gamma \circ (\gamma_1 \cdot \gamma_2), g\rangle = \langle \gamma \circ \gamma_1, \Gamma(\gamma_2) g\rangle, \\ \gamma, \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma, \quad g \in G, \end{gathered} \tag{41}$$

— следствие стандартного результата из теории расширения групп применительно к $\Gamma \circ G'$ вместе с равенством $(21) \cdot (41)$ — подобным же следствием, но применительно к $G \circ \Gamma'$, заключаем, что, во-первых, операции 1, 1′, 2, 2′ задают структуры двух гильбертовых алгебр на $C_0(G\Gamma)$, во-вторых, справедливо равенство (9) в рассматриваемой спецификации при

$$V := V_G V_\Gamma : C_0(G\Gamma) \otimes C_0(G\Gamma) \to C_0(G\Gamma G\Gamma) \subset \overline{C_0(G\Gamma) \otimes C_0(G\Gamma)},$$

где последнее пространство — замыкание алгебраического тензорного произведения по $L_2(G\Gamma G\Gamma, d\mu_{G\Gamma} d\mu_{G\Gamma})$-норме (см. (49), (50)), причем оператор V унитарен по этой норме. Таким образом, операции 1, 1′, 2, 2′ задают структуру д. г. а.

Пусть N_Δ (соответственно N_∇) — неймановская алгебра, связанная слева с гильбертовой алгеброй, заданной согласно 1, 1′ (соответственно 2, 2′). Те же соображения, которые привели к обоснованию построения д. г. а. в этом доказательстве, с привлечением формул (18), (19) и (21) · (18), (21) · (19) позволяют убедиться в том, что первая (соответственно вторая) из двух операций:

$$F_G : v(g,\gamma) \to \tilde{v}_G(\gamma, g') := \frac{1}{(2\pi)^{n(G)}} \int_G v(h,\gamma) \exp i\langle h, g'\rangle\, dh, \qquad n(G) = \dim G,$$

$$(\gamma, g') \in \Gamma G', \quad v \in C_0(G\Gamma), \quad \tilde{v}_G \in L_2(\Gamma G', d\mu_{\Gamma\circ G'})$$

($d\mu_{\Gamma\circ G'}$ — мера Хаара на группе $\Gamma \circ G'$),

$$F_\Gamma : v(g,\gamma) \to \tilde{v}_\Gamma(g, \gamma') := \frac{1}{(2\pi)^{n(\Gamma)}} \int_\Gamma v(g,\eta) \exp i\langle \eta, \gamma'\rangle\, d\eta, \qquad n(\Gamma) = \dim \Gamma,$$

$$(g, \gamma') \in G\Gamma', \quad v \in C_0(G\Gamma), \quad \tilde{v}_\Gamma \in L_2(G\Gamma', d\mu_{G\circ\Gamma'})$$

($d\mu_{G\circ\Gamma'}$ — мера Хаара на группе $G\circ\Gamma'$), после расширения по непрерывности на $L_2(G\Gamma, d\mu_{G\Gamma}) \supset C_0(G\Gamma)$ осуществляет пространственный изоморфизм φ_∇ (соответственно φ_Δ) алгебры N_∇ (соответственно N_Δ) на групповую неймановскую алгебру $N(\Gamma\circ G')$: $\varphi_\nabla(B)F_G = F_G B$, $B \in N_\nabla$ (соответственно $N(G\circ\Gamma')$: $\varphi_\Delta(B)F_\Gamma = F_\Gamma B$, $B \in N_\Delta$).

Итак, чтобы завершить доказательство теоремы, остается проверить выполнение равенств (10) и (11) в рассматриваемой спецификации. Эта проверка довольно громоздка, чтобы приводить ее здесь, но совершенно элементарна при использовании результатов лемм 2 и 3, а также равенств (20) и (21) · (20). Теорема доказана.

7. Примеры пар алгебр Ли, допускающих простую проверку условий доказанной теоремы, но приводящих к нетривиальным бигруппам Ли–Каца, содержатся в [5] и [6] (п. 6.3).

В заключение укажем на существование аналогии между результатами этой работы, выраженными в терминах кольцевых групп [3] (§ 5), и работой [7], где рассмотрены специальные расширения конечных кольцевых групп. В этой связи представляет интерес выделить среди этих расширений те, которым канонически соответствуют д. г. а., позволяющие проинтерпретировать их как конечномерные бигруппы Каца.

1. *Дринфельд В. Г.* Гамильтоновы структуры на группах Ли, биалгебры Ли и геометрический смысл классических уравнений Янга – Бакстера // Докл. АН СССР. – 1982. – **268**, № 2. – С. 285–287.
2. *Кац Г. И.* Кольцевые группы и принцип двойственности // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1963. – **12**. – С. 259–301.
3. *Кац Г. И.* Кольцевые группы и принцип двойственности. II // Там же. – 1965. – **13**. – С. 84–113.
4. *Диксмье Ж.* C^*-алгебры и их представления. – М.: Наука, 1974. – 400 с.
5. *Кац Г. И., Палюткин В. Г.* Пример кольцевой группы, порожденной группами Ли // Укр. мат. журн. – 1964. – **16**, № 1. – С. 99–105.
6. *Enock M., Vainerman L.* Deformation of Kac algebras by abelian subgroup // Communs Math. Phys. – 1996. – **178**. – P. 571–596.
7. *Кац Г. И.* Расширения групп, являющиеся кольцевыми группами // Мат. сб. – 1968. – **76**, вып. 3. – С. 473–496.

Получено 17.09.98