УДК 517.956.6

В. А. Елеев, С. К. Кумыкова
(Ин-т прикл. математики и автоматизации РАН, Кабардино-Балк. ун-т, Нальчик)

О НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ СО СМЕЩЕНИЕМ НА ХАРАКТЕРИСТИКАХ ДЛЯ СМЕШАННОГО УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

We prove theorems on the existence and uniqueness of solutions of nonlocal boundary-value problems with a shift for mixed second- and third-order equations of hyperbolic-parabolic type.

Доведено теореми про існування та єдиність розв'язків нелокальних граничних задач із зміщенням для мішаних рівнянь гіперболо-параболічного типу другого і третього порядків.

Рассматривается уравнение

$$0 = \begin{cases} \dfrac{\partial^s U}{\partial x^s} - \dfrac{\partial U}{\partial y} + \sum\limits_{i=0}^{2} \lambda_i \dfrac{\partial^i U}{\partial x^i}, & y > 0, \\ (-y)^\sigma \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \lambda_3 \dfrac{\partial U}{\partial x} + \lambda_4 U, & y < 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $s = \text{const} = 2$ или 3, $\sigma = \text{const} = 0$ или 2, в конечной области Ω, ограниченной отрезками AA_0, BB_0, A_0B_0 прямых $x = 0$, $x = 1$, $y = 1$ соответственно и характеристиками $AC: x - 2(\sigma+2)^{-1}(-y)^{(\sigma+2)/2} = 0$, $BC: x + 2(\sigma+2)^{-1} \times$ $\times (-y)^{(\sigma+2)/2} = 1$, выходящими из точки $C(1/2, y_c)$, $y_c < 0$.

Пусть Ω_1 и Ω_2 — параболическая и гиперболическая части области Ω;

$$\theta_0(x) = \frac{x}{2} - i\left\{\frac{(\sigma+2)x}{4}\right\}^{2/(\sigma+2)},$$

$$\theta_1(x) = \frac{1+x}{2} - i\left\{\frac{(\sigma+2)(1-x)}{4}\right\}^{2/(\sigma+2)}$$

— аффиксы точек пересечения характеристик уравнения (1) при $y < 0$, выходящих из точки $(x, 0) \in J$, с характеристиками AC, BC соответственно; I — единичный интервал $0 < x < 1$ прямой $y = 0$.

В зависимости от значений s, σ, λ_i, $i = \overline{0, 4}$, рассмотрим ряд краевых задач со смещением для уравнения (1).

***Случай* I.** Пусть $s = 2$, $\sigma = 0$, $\lambda_0 = \overline{\lambda}_0 = \text{const}$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = \pm\lambda^2$.

Задача T_0^2. Найти регулярное в области Ω при $y \neq 0$ решение $U(x, y)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$R_0 U = \left(\alpha_1 \frac{\partial U}{\partial x} - \beta_1 U\right)\Big|_{x=0} = \gamma_1(y), \tag{2}$$

$$R_1 U = \left(\alpha_2 \frac{\partial U}{\partial x} + \beta_2 U\right)\Big|_{x=1} = \gamma_2(y), \tag{3}$$

$$a(x)A_{0x}^{1}\left\{\frac{d}{dx}U[\theta_0(x)]\right\} + b(x)A_{1x}^{1}\left\{\frac{d}{dx}U[\theta_1(x)]\right\} + c(x)U_y(x.0) = \gamma_3(y) \quad (4)$$

и условиям сопряжения

$$\tau_1(x) = \alpha(x)\tau_2(x) + \beta(x), \quad 0 \le x \le 1, \quad (5)$$

$$\nu_1(x) = \delta_1(x)\nu_2(x) + \delta_2(x)\tau_2(x) + q(x), \quad (6)$$

где $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\delta_1(x)$, $\delta_2(x)$, $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $q(x) \in C^1(\bar{I}) \cap C^2(I)$ — заданные функции, причем $\alpha(x) \ne 0$, $\alpha_j^2 + \beta_j^2 \ne 0$, $a^2(x) + b^2(x) + c^2(x) \ne 0$, $j = 1, 2$;

$$\theta_0(x) = \frac{x}{2} - i\frac{x}{2}, \quad \theta_1(x) = \frac{x+1}{2} + i\frac{x-1}{2};$$

$$A_{\rho x}^{1}[f(x)] = f(x) - \int_{\rho}^{x} f(t)\frac{t-\rho}{x-\rho}\frac{\partial}{\partial t}J_0[\lambda\sqrt{(x-\rho)(x-t)}]\,dt,$$

$J_0(z)$ — функция Бесселя нулевого порядка, ρ — действительная постоянная,

$$\begin{aligned} U(x,+0) &= \tau_1(x), \quad U(x,-0) = \tau_2(x), \\ U_y(x,+0) &= \nu_1(x), \quad U_y(x,-0) = \nu_2(x). \end{aligned} \quad (7)$$

Решение задачи Коши для уравнения (1) при $y < 0$ задается формулой [1]

$$U(x,y) = \frac{\tau_2(x+y) + \tau_2(x-y)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y} J_0\left(\lambda\sqrt{(x-t)^2 - y^2}\right)\nu_2(t)\,dt -$$

$$- \frac{\lambda}{2}\int_{x-y}^{x+y} \frac{1}{\sqrt{(x-t)^2 - y^2}} J_0\left(\lambda\sqrt{(x-t)^2 - y^2}\right)\tau_2(t)\,dt.$$

Подставляя это решение в (4), получаем функциональное соотношение между $\tau_2(x)$ и $\nu_2(x)$ [2]:

$$\bar{a}(x)\nu_2(x) = -2\gamma_3(x) + \bar{b}(x)\tau_2'(x) + \lambda a(x)\int_0^x \tau_2(t)\frac{J_1[\lambda(x-t)]}{x-t}\,dt -$$

$$- \lambda b(x)\int_x^1 \tau_2(t)\frac{J_1[\lambda(x-t)]}{x-t}\,dt, \quad 0 \le x \le 1, \quad (8)$$

где $\bar{a}(x) = a(x) - b(x) - 2c(x)$, $\bar{b}(x) = a(x) + b(x)$.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *В области Ω не может существовать более одного решения задачи T_0^2, если*

$$\bar{\lambda}_0 \le 0, \quad \bar{a}(x) \ne 0, \quad \alpha(x)\delta_2(x) \ge 0,$$

$$\left\{\frac{\alpha(x)\delta_1(x)b(x)}{\bar{a}(x)}\right\}' \le 0, \quad \left\{\frac{\alpha(x)\delta_1(x)a(x)}{\bar{a}(x)}\right\}' \le 0,$$

$$\left\{\frac{\alpha(0)\delta_1(0)b(0)}{\bar{a}(0)}\right\} \le \min\left\{-\frac{\alpha(0)\delta_1(0)a(0)}{\bar{a}(0)}, \frac{\alpha(1)\delta_1(1)a(1)}{\bar{a}(1)}\right\},$$

$$\left\{\frac{\alpha(1)\,\delta_1(1)\,a(1)}{\overline{a}(1)}\right\} \geq \max\left\{-\frac{\alpha(1)\,\gamma_3(1)\,b(1)}{\overline{a}(1)},\ \frac{\alpha(0)\,\delta_1(0)\,b(0)}{\overline{a}(0)}\right\},$$

$$\alpha_1\,\beta_1(x) \geq 0, \qquad \alpha_2\,\beta_2 \geq 0.$$

Доказательство. В области Ω_1 рассмотрим тождество

$$U(U_{xx} - U_y + \overline{\lambda}_0 U) = (UU_x)_x - UU_y + \overline{\lambda}_0 U \equiv 0 \tag{9}$$

и проинтегрируем его по x вдоль отрезка $A_\rho B_\rho$, где $A_\rho = (\varepsilon, \rho)$, $B_\rho = (1-\varepsilon, \rho)$; ε, ρ — достаточно малые числа. Затем, переходя к пределу при $\rho \to 0$, $\varepsilon \to 0$ с учетом однородных граничных условий (2), (3) при $y \to 0$

$$\alpha_1\,\tau_1'(0) - \beta_1\,\tau_1(0) = 0, \qquad \alpha_2\,\tau_2'(0) - \beta_2\,\tau_2(1) = 0,$$

получаем

$$\overline{J}_1 = \int_0^1 \tau_1(x)\,\nu_1(x)\,dx =$$

$$= -\frac{\alpha_1}{\beta_1}\,\tau_1'^2(0) - \frac{\alpha_2}{\beta_2}\,\tau_2'^2(1) - \int_0^1 \left[\tau_1'^2(x) - \overline{\lambda}_0\,\tau_1^2(x)\right]dx. \tag{10}$$

Из (10) с учетом условий теоремы 1 следует, что выполняется неравенство $\overline{J}_1 \leq 0$. Учитывая условия сопряжения (5), (6) и полагая $\beta(x) = q(x) = 0$, получаем

$$\overline{J}_1 = \int_0^1 \tau_1(x)\,\nu_1(x)\,dx = \int_0^1 \alpha(x)\,\delta_1(x)\,\tau_2(x)\,\nu_2(x)\,dx + \int_0^1 \alpha(x)\,\delta_2(x)\,\tau_2^2(x)\,dx.$$

Отсюда, подставляя $\nu_2(x)$ из (8) и используя интегральное представление функции Бесселя [3], находим

$$\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)J_s(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{x}{2}\right)^s \int_{-1}^1 (1-z)^{s-1/2}\cos xz\,dz, \qquad \operatorname{Re} s > -\frac{1}{2},$$

где $\Gamma(t)$ — гамма-функция Эйлера. В результате несложных преобразований получаем

$$\overline{J}_2 = \int_0^1 \alpha(x)\,\delta_1(x)\,\tau_2(x)\,\nu_2(x)\,dx =$$

$$= \frac{\alpha(1)\,\delta_1(1)\,\overline{b}(1)}{2\overline{a}(1)}\,\tau_2^2(1) - \frac{\alpha(0)\,\delta_1(0)\,\overline{b}(0)}{2\overline{a}(0)}\,\tau_2^2(0) -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^1 \left\{\frac{\alpha(x)\,\delta_1(x)\,\overline{b}(x)}{\overline{a}(x)}\right\}'\tau_2^2(x)\,dx +$$

$$+\frac{\lambda^2}{\pi}\int_0^1 (1-z)^{1/2}\left\{\left[\frac{\alpha(1)\,\delta_1(1)\,a(1)}{\overline{a}(1)} - \frac{\alpha(0)\,\delta_1(0)\,b(0)}{\overline{a}(0)}\right]\times\right.$$

$$\times\left[\left(\int_0^1 \tau_2(t)\cos\lambda zt\,dt\right)^2 + \left(\int_0^1 \tau_2(t)\sin\lambda zt\,dt\right)^2\right] -$$

$$- \int_0^1 \left[\frac{\alpha(x)\,\delta_1(x)\,a(x)}{\overline{a}(x)} \right]' \left[\left(\int_0^x \tau_2(t) \cos\lambda zt\, dt \right)^2 + \left(\int_0^x \tau_2(t) \sin\lambda zt\, dt \right)^2 \right] dx \, -$$

$$- \int_0^1 \left[\frac{\alpha(x)\,\delta_1(x)\,b(x)}{\overline{a}(x)} \right]' \left[\left(\int_x^1 \tau_2(t) \cos\lambda zt\, dt \right)^2 + \left(\int_x^1 \tau_2(t) \sin\lambda zt\, dt \right)^2 \right] dx \Bigg\} dz. \quad (11)$$

На основании условий теоремы единственности заключаем, что $\overline{J}_1 \geq 0$. Сравнивая (10) и (11), имеем $\overline{J}_1 = 0$ и, следовательно, $\tau_1(x) \equiv 0$.

Проинтегрировав тождество (9) при однородных граничных условиях (2), (3) и $\tau(x) \equiv 0$, получим

$$\int_0^1 U^2(x,1)\, dx + \int_0^1 \left[\frac{\beta_1}{\alpha_1} U^2(0,y) + \frac{\beta_2}{\alpha_2} U^2(1,y) \right] dy \; + \int_{\Omega_1} [U_x^2 - \overline{\lambda}_0 U^2]\, dx\, dy \; = \; 0.$$

Отсюда следует, что $U(x,y) \equiv 0$ в области $\overline{\Omega}_1$ и аналогично [2] устанавливается, что $U(x,y) \equiv 0$ в $\overline{\Omega}_2$, т. е. $U(x,y) \equiv 0$ в $\overline{\Omega}$ и решение задачи T_0^2 единственно.

Переходя к доказательству существования решения задачи T_0^2 из параболической части Ω_1 при $y \to +0$, имеем

$$\tau_1''(x) - \nu_1(x) + \overline{\lambda}_0 \tau_1(x) = 0. \quad (12)$$

Исключая $\nu_1(x)$, $\tau_2(x)$, $\nu_2(x)$ из (5), (6), (8) и (12), для определения $\tau_1(x)$ получаем граничную задачу для интегро-дифференциального уравнения вида

$$\tau_1''(x) + n(x)\,\tau_1'(x) + m(x)\,\tau_1(x) =$$

$$= g_0(x) + g_1(x) \int_0^x \tau_1(t) \frac{J_1[\lambda(x-t)]}{\alpha(t)\,(x-t)}\, dt + g_2(x) \int_x^1 \tau_1(t) \frac{J_1[\lambda(t-x)]}{\alpha(t)\,(t-x)}\, dt, \quad (13)$$

$$\alpha_1 \tau_1'(0) - \beta_1 \tau_1(0) = \gamma_1(0), \quad (14)$$

$$\alpha_2 \tau_1'(1) - \beta_2 \tau_1(1) = \gamma_2(0), \quad (15)$$

где

$$n(x) = \frac{\overline{b}(x)\,\delta_1(x)}{\alpha(x)\,\overline{a}(x)}, \qquad m(x) = \frac{\delta_2(x)}{\alpha(x)} + \overline{\lambda}_0,$$

$$g_0(x) = \frac{\delta_2(x)\,\beta(x)}{\alpha(x)} - q(x) - \frac{2\,\delta_1(x)\,\gamma_3(x)}{\overline{a}(x)} \, -$$

$$- \frac{\delta_1(x)\,\lambda\, a(x)}{\overline{a}(x)} \int_0^x \frac{\beta(t)}{\alpha(t)} \frac{J_1[\lambda(x-t)]}{x-t}\, dt - \frac{\delta_1(x)\,\lambda\, b(x)}{\overline{a}(x)} \int_x^1 \frac{\beta(t)}{\alpha(t)} \frac{J_1[\lambda(x-t)]}{t-x}\, dt,$$

$$g_1(x) = \frac{\lambda\,\delta_1(x)\,a(x)}{\overline{a}(x)},$$

$$g_2(x) = \frac{\lambda\,\delta_1(x)\,b(x)}{\overline{a}(x)}.$$

Решение уравнения (13), удовлетворяющее однородным граничным условиям (14), (15), можно представить в виде

$$\tau_1(x) = \int\limits_0^1 G(x,t)\left\{g_0(t) + g_1(t)\int\limits_0^t \tau_1(t_1)\frac{J_1[\lambda(t-t_1)]}{\alpha(t_1)(t-t_1)}\,dt_1 + \right.$$

$$\left. + \, g_2(t)\int\limits_t^1 \tau_1(t_1)\frac{J_1[\lambda(t_1-t)]}{\alpha(t_1)(t_1-t)}\,dt_1\right\}dt,$$

где $G(x,t)$ — функция Грина уравнения (13).

Отсюда, поменяв порядок интегрирования в двойных интегралах, получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\tau_1(x) = \tilde{g}_0(x) + \int\limits_0^1 \tilde{G}(x,t)\,\tau_1(t)\,dt,$$

где

$$\tilde{g}_0(x) = \int\limits_0^1 \tilde{G}(x,t)\,g_0(t)\,dt,$$

$$\tilde{G}(x,t) =$$

$$= \frac{1}{\alpha(t_1)}\int\limits_{t_1}^1 \frac{G(x,t)\,g_1(t)\,J_1[\lambda(t-t_1)]}{t-t_1}\,dt_1 + \frac{1}{\alpha(t_1)}\int\limits_0^{t_1} \frac{G(x,t)\,g_2(t)\,J_1[\lambda(t_1-t)]}{t_1-t}\,dt_1,$$

которое однозначно разрешимо в силу единственности решения задачи T_0^2.

***Случай* II.** Пусть $s=2$, $\sigma=2$, $\lambda_0 = \overline{\lambda}_0 = \mathrm{const}$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_4 = 0$, $|\lambda_3| < 1$.

Задача T_2^2. Найти регулярное в области Ω, $y \neq 0$, решение $U(x,y)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2), (3) и соотношению

$$a(x)\,D_{0x}^{\alpha}\,\omega(x)\,U[\theta_0(x)] + b(x)\,D_{x1}^{\beta}\,\delta(x)\,U[\theta_1(x)] +$$
$$+ \, c(x)\,U_y(x,0) + d(x)\,U(x,0) = \gamma_3(x), \tag{16}$$

причем $a^2(x)+b^2(x)+c^2(x)+d^2(x) \neq 0$, $\gamma_i \in C(\bar{J})$, $i=1,2$; $a,b,c,d,\gamma_3 \in$ $\in C^1(\bar{J}) \cap C^2(J)$,

$$\theta_0(x) = \frac{x}{2} - i\sqrt{x}, \qquad \theta_i(x) = \frac{1+x}{2} - i\sqrt{1-x};$$

D_{0x}^1, D_{x1}^1 — операторы дробного в смысле Римана–Лиувилля интегро-дифференцирования [4].

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *В области* Ω *не может существовать более одного решения задачи* T_2^2, *если* $\overline{\lambda}_0 \leq 0$,

$$\Gamma(\alpha)(1-x)^{1-\alpha}a(x) + \Gamma(\beta)x^{1-\beta}b(x) + c(x) + d(x) \neq 0, \tag{17}$$

а также либо

$$\omega(x) = \delta(x) = 1, \quad \alpha = \frac{3-\lambda_3}{4}, \quad \beta = \frac{3+\lambda_3}{4}, \quad d(x) = 0 \tag{18}$$

и

$$a(x)b(x) \geq 0, \quad a(x)c(x) \leq 0, \quad b(x)c(x) \leq 0, \tag{19}$$

$$\left[\frac{a(x)}{b(x)}\right]' \le 0, \quad \left[\frac{a(x)}{c(x)}\right]' \ge 0, \quad \left[\frac{b(x)}{c(x)}\right]' \le 0, \tag{20}$$

либо

$$\omega(x) = x^{-1/2}, \quad \delta(x) = (1-x)^{-1/2},$$
$$\alpha = \frac{1-\lambda_3}{4}, \quad \beta = \frac{1+\lambda_3}{4}, \quad c(x) = 0 \tag{21}$$

и

$$a(x)b(x) \ge 0, \quad a(x)d(x) \le 0, \quad b(x)d(x) \le 0, \tag{22}$$

$$\left[\frac{a(x)}{b(x)}\right]' \le 0, \quad \left[\frac{a(x)}{d(x)}\right]' \ge 0, \quad \left[\frac{b(x)}{d(x)}\right]' \le 0 \tag{23}$$

и хотя бы в одной точке интервала J выполняется неравенство

$$\Gamma\left(\frac{1-\lambda_3}{4}\right)(1-x)^{(3+\lambda_3)/4}a(x) + \Gamma\left(\frac{1+\lambda_3}{4}\right)x^{(1-\lambda_3)/4}b(x) + d(x) \ne 0. \tag{24}$$

Действительно, решение задачи Коши для уравнения (1) в области Ω_2 при $|\lambda_3| < 1$ имеет вид [5]

$$U(x,y) = C_1\int_0^1 \tau\left[x + \frac{y^2(1-2t)}{2}\right]t^{-(\lambda_3+3)/4}(1-t)^{(\lambda_3-3)/4}\,dt +$$
$$+ C_2 y\int_0^1 \nu\left[x + \frac{y^2(1-2t)}{2}\right]t^{-(\lambda_3+1)/4}(1-t)^{(\lambda_3-1)/4}\,dt, \tag{25}$$

где

$$\tau(x) = U(x,0), \quad \nu(x) = U_y(x,0),$$

$$C_1 = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\lambda_3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1+\lambda_3}{4}\right)}, \quad C_2 = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-\lambda_3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3+\lambda_3}{4}\right)}.$$

Удовлетворяя (25) условию (16), получаем соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, на линии вырождения J при выполнении условий (18) теоремы 2:

$$C_2\left[\Gamma\left(\frac{3-\lambda_3}{4}\right)(1-x)^{(1+\lambda_3)/4}a(x) + \Gamma\left(\frac{3+\lambda_3}{4}\right)x^{(1-\lambda_3)/4}b(x) + c(x)\right]\nu(x) =$$
$$= C_1\left[\Gamma\left(\frac{1-\lambda_3}{4}\right)(1-x)^{(1+\lambda_3)/4}a(x)\,D_{0x}^{1/2}\tau(x) +\right.$$
$$\left. + \Gamma\left(\frac{1+\lambda_3}{4}\right)x^{(1-\lambda_3)/4}b(x)\,D_{x1}^{1/2}\tau(x)\right] - x^{(1-\lambda_3)/4}(1-x)^{(1+\lambda_3)/4}\gamma_3(x). \tag{26}$$

При выполнении условий (21) теоремы 2 это соотношение принимает вид

$$C_1 = \left[\Gamma\left(\frac{1-\lambda_3}{4}\right)(1-x)^{(\lambda_3+3)/4}a(x) +\right.$$
$$\left. + \Gamma\left(\frac{1+\lambda_3}{4}\right)x^{(3-\lambda_3)/4}b(x) + d(x)\right]\tau(x) =$$

$$= C_2\left[\Gamma\left(\frac{3-\lambda_3}{4}\right)(1-x)^{(\lambda_3+3)/4}\,a(x)\,D_{0x}^{-1/2}\,\nu(x) +\right.$$

$$\left. + \Gamma\left(\frac{\lambda_3+3}{4}\right)x^{(3-\lambda_3)/4}\,b(x)\,D_{x1}^{-1/2}\,\nu(x)\right] + x^{(3-\lambda_3)/4}(1-x)^{(3+\lambda_3)/4}\gamma_3(x). \quad (27)$$

Докажем, что решение задачи T_2^2 единственно при выполнении условий (17)–(20), (23). Для этого покажем, что

$$\bar{J}_1 = \int_0^1 \tau(x)\,\nu(x)\,dx$$

не может быть отрицательным. В самом деле, при $\gamma_3(x) = 0$ соотношение (26) принимает вид

$$\nu(x) = A(x)\,D_{0x}^{1/2}\,\tau(x) + B(x)\,D_{x1}^{1/2}\,\tau(x),$$

где

$$A(x) = \frac{C_1\,\Gamma\left(\frac{1+\lambda_3}{4}\right)(1-x)^{(1+\lambda_3)/4}\,a(x)}{C_2\left[\Gamma\left(\frac{3-\lambda_3}{4}\right)(1-x)^{(1+\lambda_3)/4}\,a(x) + \Gamma\left(\frac{3+\lambda_3}{4}\right)x^{(1-\lambda_3)/4}\,b(x) + c(x)\right]},$$

$$B(x) = \frac{C_1\,\Gamma\left(\frac{1+\lambda_3}{4}\right)x^{(1-\lambda_3)/4}\,b(x)}{C_2\left[\Gamma\left(\frac{3-\lambda_3}{4}\right)(1-x)^{(1+\lambda_3)/4}\,a(x) + \Gamma\left(\frac{3+\lambda_3}{4}\right)x^{(1-\lambda_3)/4}\,b(x) + c(x)\right]}.$$

Вычислениями, аналогичными приведенным в [6], получим

$$\frac{\sqrt{2}}{\pi}\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)\bar{J}_1 =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty t^{-1/2}\,dt\,\left\{A(1)\left[\left(\int_0^1 \tau_1(\xi)\cos t\xi\,d\xi\right)^2 + \left(\int_0^1 \tau_1(\xi)\sin t\xi\,d\xi\right)^2\right] -\right.$$

$$- \int_0^1 A'(x)\left[\left(\int_0^x \tau_1(\xi)\cos t\xi\,d\xi\right)^2 + \left(\int_0^x \tau_1(\xi)\sin t\xi\,d\xi\right)^2\right]dx +$$

$$+ B(0)\left[\left(\int_0^1 \tau_2(\xi)\cos t\xi\,d\xi\right)^2 + \left(\int_0^1 \tau_2(\xi)\sin t\xi\,d\xi\right)^2\right] +$$

$$\left. + \int_0^1 B'(x)\left[\left(\int_x^1 \tau_2(\xi)\cos t\xi\,d\xi\right)^2 + \left(\int_x^1 \tau_2(\xi)\sin t\xi\,d\xi\right)^2\right]dx\right\}, \quad (28)$$

где

$$\tau_1(x) = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{\tau(t)}{(x-t)^{1/2}}\,dt, \qquad \tau_2(x) = -\frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\int_x^1 \frac{\tau(t)}{(t-x)^{1/2}}\,dt.$$

Отсюда с учетом (19), (20) будем иметь $\bar{J}_1 \geq 0$. Как и в случае задачи T_0^2, из области Ω_1 получим $\bar{J}_1 \leq 0$ и можно заключить, что $\bar{J}_1 = 0$. Поскольку слагаемые справа в (28) неотрицательны по условиям теоремы 2, то они также равны нулю. В частности,

$$\int_0^\infty t^{-1/2}\,dt\left(\int_0^1 \tau_i(\xi)\cos t\xi\, d\xi\right)^2 = 0,$$

$$\int_0^\infty t^{-1/2}\,dt\left(\int_0^1 \tau_i(\xi)\sin t\xi\, d\xi\right)^2 = 0, \quad i=1,2.$$

Поскольку $t^{-1/2} \geq 0$, то

$$\int_0^1 \tau_i(\xi)\cos t\xi\, d\xi = 0, \quad \int_0^1 \tau_i(\xi)\sin t\xi\, d\xi = 0, \quad i=1,2,$$

для всех $t \in [0,\infty)$, в частности, при $t = 2\pi k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. При этих значениях t функции $\sin t\xi$ и $\cos t\xi$ образуют полную ортогональную систему функций в L^2. Следовательно, $\tau_i(\xi) = 0$ почти всюду, а так как они непрерывны по условию, то $\tau_i(\xi) = 0$ всюду. Отсюда легко заметить, что $\tau(x) = 0$ и, следовательно, $\nu(x) = 0$ и $U(x,y) \equiv 0$ в Ω_2 как решение задачи Коши с нулевыми данными, а в Ω_1 $U(x,y) \equiv 0$ как решение однородной задачи (1), (2), (3), $\tau(x) = 0$ [7].

При выполнении условий (21)–(23) теоремы единственность доказывается аналогично.

Переходя к доказательству существования решения задачи T_2^2, исключим $\nu(x)$ из (12) и (26). Получим интегро-дифференциальное уравнение

$$\tau''(x) + \overline{\lambda}_0\,\tau(x) = S_1(x) + S_2(x)\,D_{0x}^{1/2}\,\tau(x) + S_3(x)\,D_{x1}^{1/2}\,\tau(x) \tag{29}$$

с граничными условиями $R_0\tau = \gamma_1(0)$, $R_1\tau = \gamma_2(0)$, где

$$S_1(x) = \frac{x^{(1-\lambda_3)/4}(1-x)^{(1+\lambda_3)/4}\,\gamma_3(x)}{S_4(x)},$$

$$S_2(x) = \frac{C_1\Gamma\left(\dfrac{1-\lambda_3}{4}\right)(1-x)^{(1+\lambda_3)/4}\,a(x)}{S_4(x)},$$

$$S_3(x) = \frac{C_1\Gamma\left(\dfrac{1+\lambda_3}{4}\right)x^{(1-\lambda_3)/4}\,b(x)}{S_4(x)},$$

$$S_4(x) = C_2\Gamma\left(\frac{3-\lambda_3}{4}\right)(1-x)^{(1+\lambda_3)/4}\,a(x) + \Gamma\left(\frac{3+\lambda_3}{4}\right)x^{(1-\lambda_3)/4}\,b(x) + c(x).$$

Решение уравнения (29), удовлетворяющее граничным условиям $R_0\tau = 0$, $R_1\tau = 0$, представляется в виде

$$\tau(x) = \int_0^1 G(x,t)\left[S_2(t)\,D_{0t}^{1/2}\,\tau(t) + S_3(t)\,D_{t1}^{1/2}\,\tau(t)\right]dt, \tag{30}$$

где $G(x,t)$ — функция Грина задачи

$$\tau''(x) + \overline{\lambda}_0\,\tau(x) = 0, \quad R_0\tau = 0, \quad R_1\tau = 0.$$

Уравнение (30) несложными преобразованиями сводится к уравнению Фредгольма второго рода:

$$\tau(x) = \int_0^1 k(x,t)\,\tau(t)\,dt + f(x), \tag{31}$$

где

$$k(x,t) = \int_0^t \frac{[G(x,t_1)\,S_3(t_1)]'}{(t-t_1)^{1/2}}\,dt_1 - \int_t^1 \frac{[G(x,t_1)\,S_2(t_1)]'}{(t_1-t)^{1/2}}\,dt_1,$$

$$f(x) = \int_0^1 G(x,t)\,S_3(t)\,dt.$$

Уравнение (31) однозначно разрешимо в силу единственности решения задачи T_2^2. После нахождения $\tau(x)$ из (12) находим $\nu(x)$. Решение задачи T_2^2 затем продолжаем в параболическую и гиперболическую части таким же образом, как и в случае I.

***Случай* III.** Пусть $\lambda_i = 0,\ i=\overline{0,2},\ \lambda_3 \neq 0,\ \lambda_4 = 0,\ s=3,\ \sigma=2.$

Задача T_2^3. Требуется определить функцию $U(x,y)$ со следующими свойствами:

1) при $y \neq 0$ $U(x,t)$ — регулярное решение уравнения (1);

2) $U(x,y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega \cup (A,B))$, $U_x(x,y)$, $U_y(x,y) \in C(\Omega)$, $U_x(x,y) \in C(\overline{\Omega}_1)$;

3) $U(x,y)$ удовлетворяет условиям (16),

$$U(0,y) = \varphi_1(y), \quad U(1,y) = \varphi_2(y), \quad U(0,y) = \varphi_3(y), \qquad 0 \le y \le 1, \tag{32}$$

причем

$$a^2(x) + b^2(x) + c^2(x) + d^2(x) \neq 0, \qquad \varphi_i \in C[0,1],$$

$$i = \overline{1,3}, \quad a,\ b,\ c,\ d,\ \gamma_3 \in C^1(\bar{J}) \cup C^2(J).$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *В области* Ω *не может существовать более одного решения задачи* T_2^3, *если выполняются либо условия* (17)–(20), (24), *либо* (17), (21)–(24), *а также*

$$\lim_{x\to+0} U(x,0)\,U_{xx}(x,0) = 0, \qquad \lim_{x\to 1-0} U(x,0)\,U_{xx}(x,0) = 0.$$

В самом деле, переходя в уравнении (1) к пределу при $y \to +0$, получаем

$$\tau'''(x) - \nu(x) = 0. \tag{33}$$

Умножая обе части (33) на $\tau(x)$, а затем интегрируя от 0 до 1, с учетом условий теоремы 3 получаем [8]

$$\bar{J}_1 = \int_0^1 \tau(x)\,\nu(x)\,dx = -\frac{\tau'^2(x)}{2} \le 0.$$

С другой стороны, согласно вычислениям задачи T_2^2 из Ω_2 имеем $\bar{J}_1 \ge 0$. Отсюда $\bar{J}_1 = 0$ и, как и раньше, заключаем, что $U(x,y) \equiv 0$ в $\overline{\Omega}$ и решение задачи T_2^3 единственно.

При исключении $\nu(x)$ соответственно из (33), (26) и (32), (27) вопрос существования решения задачи T_2^3 эквивалентно сводится к вопросу разрешимости интегрального уравнения Фредгольма второго рода:

$$\tau'(x) + \int_0^1 K(x,\xi)\,\tau'(\xi)\,d\xi = f(x), \tag{34}$$

где $K(x,\xi) \in C(\bar{J}\times\bar{J})\bigcap C^2(J\times J)$, $f(x)\in C(\bar{J})\bigcap C^2(J)$ — известные функции. Безусловная разрешимость уравнения (34) в требуемом классе функций заключается из единственности решения задачи.

По найденному $\tau'(x)$ определяются $\tau(x)$ и $\nu(x)$ и решение задачи T_2^3 как решение задачи Коши в области Ω_2, а в области Ω_1 — по формуле из [7]

$$\pi U(x,y) = \int_0^y G_{\xi\xi}(x,y;0,\eta)\,\varphi_1(\eta)\,d\eta - \int_0^y G_{\xi}(x,y;0,\eta)\,\varphi_3(\eta)\,d\eta -$$

$$- \int_0^y G_{\xi\xi}(x,y;1,\eta)\,\varphi_2(\eta)\,d\eta + \int_0^1 G(x,y;\xi,0)\,\tau(\xi)\,d\xi,$$

где $G(x,y;\xi,\eta)$ — функция Грина задачи (1), (2), $U(x,0) = \tau(x)$.

1. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966. – 724 с.
2. *Салахитдинов М. С., Уринов А. К.* Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа с негладкими линиями вырождения // Докл. АН СССР. – 1982. – **262**, № 3. – С. 539–541.
3. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1966. – 295 с.
4. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
5. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. – М.: Наука, 1981. – 448 с.
6. *Кумыкова С. К.* Об одной краевой задаче со смещением для уравнения $\operatorname{sgn} y\,|y|^m U_{xx} + U_{yy} = 0$ // Дифференц. уравнения. – 1976. – **12**, № 1. – С. 77–86.
7. *Джураев Т. Д.* Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. – Ташкент: Изд-во ФАН УзССР, 1979. – 238 с.
8. *Елеев В. А., Кумыкова С. К.* О некоторых краевых задачах со смещением для одного уравнения третьего порядка // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1993. – С. 52–54.

Получено 18.02.98