УДК 517.911

М. У. Ахметов (Зап.-Казах. ин-т экономики и финансов Казах. гос. акад. управления),
Р. Д. Сеилова (Актюбин. высш. воен. авиац. уч-ще)

РАНГОВЫЕ ПРИЗНАКИ УПРАВЛЯЕМОСТИ ДЛЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ*

We determine necessary and sufficient conditions of the solvability of boundary-value problem for a linear system of integro-differential equations with pulse influence. We prove theorems on the existence and integral representation of solutions of linear integro-summary second order Volterra equations and linear system of integro-differential equations with pulse influence at fixed times.

Визначено необхідні та достатні умови розв'язності крайової задачі для лінійної системи інтегро-диференціальних рівнянь з імпульсною дією. Доведено теореми про існування та інтегральне зображення лінійних інтегро-сумарних рівнянь Вольтерра другого роду та лінійної системи інтегро-диференціальних рівнянь з імпульсною дією у фіксовані моменти часу.

1. Введение. В теории дифференциальных уравнений с импульсным воздействием $[1-3]$ есть большое число нерешенных проблем, связанных с результатами теории интегральных и интегро-дифференциальных уравнений $[4-8]$.

Целью настоящей работы является нахождение необходимых и достаточных условий разрешимости задачи управления краевой задачи для линейной системы интегро-дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. Задача об управлении линейной импульсной системой исследовалась в [9].

2. Вспомогательные предложения. Зафиксируем вещественные числа α и β, $\alpha<\beta$, и целые положительные числа r и p. Обозначим через $L_2^r[\alpha,\beta]$ пространство всех интегрируемых с квадратом на отрезке $[\alpha,\beta]$ функций φ: $[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^r$ и через $D^r[1,p]$ — множество всех конечных последовательностей $\{\xi_i\}$, $\xi_i\in\mathbb{R}^r$, $i=\overline{1,p}$.

Построим пространство $\Pi^r[\alpha,\beta]=L_2^r[\alpha,\beta]\times D^r[1,p]$ и обозначим его элементы через $\{\varphi,\xi\}$. Введем в этом пространстве скалярное произведение

$$\langle\{\varphi,\xi\},\{\omega,\nu\}\rangle=\int\limits_\alpha^\beta(\varphi,\omega)\,dt+\sum_{i=1}^p(\xi_i,\nu_i),$$

где $(\,,\,)$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^r$. Пусть также θ_i, $i=\overline{1,p}$, — строго возрастающая в (α,β) последовательность действительных чисел.

Обозначим через $PAC[\alpha,\beta]$ множество всех функций $x(t)\colon[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^n$, кусочно абсолютно непрерывных, непрерывных слева во всех точках из $[\alpha,\beta]$ и претерпевающих разрывы первого рода в точках θ_i, $i=\overline{1,p}$.

---

* Выполнена при финансовой поддержке фонда INTAS (грант № 96-0915).

Справедливы следующие леммы, которые являются аналогами теоремы Фубини [4, с. 317].

Лемма 1. *Пусть* D_{ij}, $j, i = \overline{1, p}$, *— постоянные матрицы размера* $n \times n$, $\{\xi_i\} \in D^n[1, p]$. *Тогда для каждого* t, $\alpha < t < \beta$, *справедливо соотношение*

$$\sum_{\alpha<\theta_i<t}\left[\sum_{\alpha<\theta_j\le\theta_i} D_{ij}\xi_j\right] = \sum_{\alpha<\theta_i<t}\left[\sum_{\theta_i\le\theta_j<t} D_{ji}\right]\xi_i.$$

Лемма 2. *Пусть* $K(t, s)$ *—* $(n \times n)$*-мерная матрица, интегрируемая с квадратом на промежутке* $\alpha \le s \le \beta$, $\varphi_i(t) \in L_2^n[\alpha, \beta]$, $i = \overline{1, p}$. *Тогда для любого* t, $\alpha < t < \beta$, *справедливо соотношение*

$$\int_\alpha^t K(t, s)\left[\sum_{\alpha<\theta_i<t}\varphi_i(s)\right]ds = \sum_{\alpha<\theta_i<t}\left[\int_{\theta_i}^t K(t, s)\varphi_i(s)\,ds\right]. \qquad (1)$$

Рассмотрим интегральное уравнение

$$x(t) = \int_\alpha^t G(t,s)x(s)ds + \sum_{\alpha<\theta_i<t} S_i(t)x(\theta_i) + \sum_{\alpha<\theta_i<t} N_i(t)x(\theta_i+) + f(t) + \sum_{\alpha<\theta_i<t} I_i, \qquad (2)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $(n \times n)$-мерная матрица $G(t, s)$ интегрируема с квадратом на множестве $[\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta]$, матрицы $S_i(t)$, $N_i(t)$ размера $n \times n$, столбцы этих матриц и функция $f(t)$ являются элементами $L_2^n[\alpha, \beta]$, $\{\xi_i\} \in D^n[1, p]$. Предположим также, что для всех $i = \overline{1, p}$ верно $\det(E - N_i(\theta_i)) \ne 0$.

Теорема 1. *Система* (2) *допускает единственное кусочно-непрерывное решение* $x(t) \in PAC[\alpha, \beta]$, *которое можно представить в виде*

$$x(t) = \int_\alpha^t P_1(t,s)f(s)ds + \sum_{\alpha<\theta_i<t} Q_i(t)I_i + \sum_{\alpha<\theta_i<t} P_2^i(t,s)f(\theta_i) + f(t) + \sum_{\alpha<\theta_i<t} I_i, \qquad (3)$$

где P_1, P_2^i *и* Q_i, $i = \overline{1, p}$, *— кусочно-непрерывные функции.*

Доказательство. Пусть $R(t, s)$ — резольвента интегрального уравнения Вольтерра второго рода с ядром $G(t, s)$. Тогда, используя леммы 1, 2, убеждаемся, что система (2) эквивалентна уравнению

$$x(t) = \sum_{\alpha<\theta_i<t}\left[\int_{\theta_i}^t R(t,s)S_i(s)ds + S_i(t)\right]x(\theta_i) + \sum_{\alpha<\theta_i<t}\left[\int_{\theta_i}^t R(t,s)N(s)ds + \right.$$

$$\left. + N_i(t)\right]x(\theta_i+) + \sum_{\alpha<\theta_i<t}\left[\int_{\theta_i}^t R(t,s)\,ds\right]I_i + \int_{\theta_i}^t R(t,s)f(s)ds + f(t) + \sum_{\alpha<\theta_i<t} I_i. \qquad (4)$$

Пусть

$$M_{ij} = \int_{\theta_i}^{\theta_j} R(\theta_j, s)S_i(s)ds + S_i(\theta_j), \qquad N_{ij} = \int_{\theta_i}^{\theta_j} R(\theta_j, s)N_i(s)ds + N_i(\theta_j),$$

$$\pi_{ij} = \int_{\theta_i}^{\theta_j} R(\theta_j, s)ds + E,$$

где E — единичная $(n \times n)$-мерная матрица.

Тогда из (4) следует

$$x(\theta_j) = \sum_{\alpha<\theta_i<\theta_j}\left[M_{ij}x(\theta_i)+N_{ij}x(\theta_i+)\right] + \sum_{\alpha<\theta_i<\theta_j}\pi_{ij}I_i + \int\limits_{\alpha}^{\theta_j}R(\theta_j,s)f(s)ds + f(\theta_j). \quad (5)$$

Используя (4) и (5), получаем

$$x(\theta_j+) = (I-N_j(\theta_j))^{-1}(I-S_j(\theta_j))x(\theta_j)+(I-N_j(\theta_j))^{-1}I_j. \qquad (6)$$

Из выражений (5) и (6) следует, что $x(\theta_j)$ и $x(\theta_j+)$ определяются как решения неоднородной алгебраической системы и неоднородная часть этой системы является линейной комбинацией векторов

$$\int\limits_{\alpha}^{\theta_i}R(t,s)f(s)ds, \quad f(\theta_i), \quad I_i, \quad i=\overline{1,p}. \qquad (7)$$

Следовательно, векторы $x(\theta_j)$ и $x(\theta_j+)$ — также линейная комбинация векторов (7) с матричными коэффициентами.

Подставляя эти значения в (4), убеждаемся, что решение уравнения (2) имеет вид (3). Теорема доказана.

3. Существование решений. Рассмотрим следующую систему интегро-дифференциальных уравнений с импульсным воздействием:

$$\begin{gathered}\frac{dx}{dt} = A(t)x+f(t)+\int\limits_{\alpha}^{t}K(t,s)x(s)ds, \qquad t\neq\theta_i,\\ \Delta x(\theta_i) = B_ix(\theta_i)+\sum_{\alpha<\theta_j\le\theta_i}D_{ij}x(\theta_j)+I_i,\end{gathered} \qquad (8)$$

где $x\in\mathbb{R}^n$, $\Delta x(\theta_i)\equiv x(\theta_i+)-x(\theta_i)$, $t\in[\alpha,\beta]$, $A(t)$ и $K(t,s)$, $i=\overline{1,p}$, — матрицы размера $n\times n$, столбцы матриц $A(t)$, $M_i(t)$, $i=\overline{1,p}$, — элементы пространства $L_2^n[\alpha,\beta]$, $\{f,I\}\in\Pi^n[\alpha,\beta]$, D_{ij} и B_i, $i,j=\overline{1,p}$, — постоянные матрицы размера $n\times n$, матрица $K(t,s)$ интегрируема с квадратом на множестве $[\alpha,\beta]\times[\alpha,\beta]$.

Рассмотрим задачу существования и единственности решения уравнения (8) и определение условий разрешимости краевой задачи

$$x(\alpha) = a, \qquad x(\beta) = b, \qquad a,b\in\mathbb{R}^n \qquad (9)$$

для этой системы.

Теорема 2. *Пусть система* (8) *удовлетворяет указанным выше условиям. Тогда для любого* $x_0\in\mathbb{R}^n$ *существует единственное решение* $x(t)\in\in PAC[\alpha,\beta]$ *этой системы,* $x(\alpha)=x_0$, *определенное на промежутке* $[\alpha,\beta]$.

Доказательство. Дифференцируя и проверяя условия разрыва, можно убедиться, что интегро-суммарное уравнение

$$\begin{aligned}x(t) = x_0 &+ \int\limits_{\alpha}^{t}A(s)x(s)ds + \int\limits_{\alpha}^{t}\left[\int\limits_{\alpha}^{\sigma}K(\sigma,s)x(s)ds\right]d\sigma + \sum_{\alpha<\theta_i<t}B_ix(\theta_i) +\\ &+ \int\limits_{\alpha}^{t}f(s)ds + \sum_{\alpha<\theta_i<t}\sum_{\alpha<\theta_j<\theta_i}D_{ij}x(\theta_i) + \sum_{\alpha<\theta_i<t}I_i\end{aligned} \qquad (10)$$

является эквивалентным системе (8).

Применив теорему Фубини и лемму 2, последнее уравнение можно переписать в виде

$$x(t) = \int_{\alpha}^{t} \Psi(t,s)x(s)ds + \sum_{\alpha<\theta_i<t} \Phi_i(t)x(\theta_i) + \sum_{\alpha<\theta_i<t} I_i + F(t), \tag{11}$$

где

$$\Psi(t,s) = A(s) + \int_{s}^{t} K(\sigma,s)d\sigma, \quad \Phi_i(t) = \sum_{\theta_i \le \theta_j < t} D_{ij}, \quad F(t) = x_0 + \int_{\alpha}^{t} f(s)ds .$$

Уравнение (11) является системой вида (2). Поэтому согласно теореме 1 оно допускает единственное решение. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь систему интегро-дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} \frac{\partial h}{\partial s} = -h(t,s)A(s) - \int_{s}^{t} h(t,\sigma)K(\sigma,s)d\sigma, \quad s \ne \theta_i, \\ \Delta h(t,\theta_i) = -h(t,\theta_i)B_i(E+B_i)^{-1} - \sum_{\theta_i \le \theta_j < t} h(t,\theta_j+)D_{ji}(E+B_i)^{-1}, \end{gathered} \tag{12}$$

в которой $h = (h_1, h_2, h_3, \ldots, h_n)$ — вектор-строка, $t \in [\alpha, \beta]$, матрицы $A(t)$, $K(t,s)$, D_{ji}, B_i такие же, как и в системе (8). Предположим, что для всех $j = \overline{1, p}$ справедливо $\det(E - D_{jj}(E+B_j)^{-1}) \ne 0$.

Аналогично теореме 2, применяя теорему 1 и лемму 2, можно показать, что для каждой вектор-строки h_0 из $\mathbb{R}^n$, $h_0 = \left(h_0^1, h_0^2, h_0^3, \ldots, h_0^n\right)$, существует единственное решение уравнения (12), удовлетворяющее условию $h(t,t) = h_0$.

Пусть $H(t,s) = \operatorname{colon}(H_1, H_2, H_3, \ldots, H_n)$, $H(t,t) = E$, — матрица, строки которой H_i, $i = \overline{1, p}$, являются решениями системы (12).

Теорема 3. *Пусть* $x(t) = x(t,\alpha,x_0)$ — *решение задачи Коши для уравнения* (8). *Тогда справедливо представление*

$$x(t) = H(t,\alpha)x_0 + \int_{\alpha}^{t} H(t,s)f(s)ds + \sum_{\alpha<\theta_i<t} H(t,\theta_i+)I_j . \tag{13}$$

Доказательство. Обозначим $\varphi(s) = H(t,s)x(s)$, где $x(t) = x(t,\alpha,x_0)$ — решение системы (8). Известно, что [1]

$$\varphi(s)\Big|_{\alpha}^{t} = \int_{\alpha}^{t} \varphi'(s)ds + \sum_{\alpha<\theta_i<t} \Delta\varphi(\theta_i). \tag{14}$$

Рассмотрим каждое из двух слагаемых в (14).

1. Зафиксируем i. Тогда

$$\begin{gathered} \Delta\varphi(\theta_i) = H(t,\theta_i+)x(\theta_i+) - H(t,\theta_i)x(\theta_i) = \Delta H(t,\theta_i)x(\theta_i+) + \\ + H(t,\theta_i)\Delta x(\theta_i) = H(t,\theta_i+)\Delta x(\theta_i) + \Delta H(t,\theta_i)x(\theta_i). \end{gathered} \tag{15}$$

Суммируя обе части (15) по i, для которых $\alpha < \theta_i < t$, и применяя лемму 1, имеем

$$\sum_{\alpha<\theta_i<t} \Delta\varphi(\theta_i) = \sum_{\alpha<\theta_i<t} [\Delta H(t,\theta_i)(E+B_i) + H(t,\theta_i)B_i]x(\theta_i) +$$

$$+ \sum_{\alpha<\theta_i<t} \left[\sum_{\alpha<\theta_j<\theta_i} H(t,\theta_i+)D_{ij} \right] x(\theta_j) + \sum_{\alpha<\theta_i<t} H(t,\theta_i+)I_i =$$

$$= \sum_{\alpha \le \theta_i < t} \left[\Delta H(t,\theta_i)(E+B_i) + H(t,\theta_i)B_i + \sum_{\theta_i < \theta_j < t} H(t,\theta_j+)D_{ji} \right] x(\theta_i) + \sum_{\alpha < \theta_i < t} H(t,\theta_i+)I_i .$$

Так как $H(t, s)$ — решение системы (12), то из последнего выражения следует

$$\sum_{\alpha < \theta_i < t} \Delta\varphi(\theta_i) = \sum_{\alpha < \theta_i < t} H(t, \theta_i+) I_i . \tag{16}$$

2. Дифференцируя выражение $\varphi(s) = H(t, s)x(s)$, получаем

$$\varphi'(s) = \frac{\partial H}{\partial s} x(s) + H(t, s)\left[A(s)x(s) + f(s) + \int_\alpha^t K(s, v)\, x(v)\, dv \right].$$

Применяя теорему Фубини, находим

$$\int_\alpha^t \varphi'(s)\, ds = \int_\alpha^t \left[\frac{\partial H}{\partial s} + H(t, s)A(s) \right] x(s)\, ds + \int_\alpha^t H(t, s)[\, K(s, v)\, x(v)\, dv]\, ds +$$

$$+ \int_\alpha^t H(t, s)\, f(s)\, ds = \int_\alpha^t \left[\frac{\partial H}{\partial s} + H(t, s)A(s) + \int_\alpha^t H(t, v)\, K(v, s)\, dv \right] x(s)\, ds +$$

$$+ \int_\alpha^t H(t, s)\, f(s)\, ds .$$

Отсюда, согласно (12), следует

$$\int_\alpha^t \varphi'(s)\, ds = \int_\alpha^t H(t, v)\, f(v)\, dv . \tag{17}$$

Из (14), (16) и (17) находим

$$\varphi(s)\Big|_\alpha^t = \int_\alpha^t H(t, s)\, f(s)\, ds + \sum_{\alpha < \theta_i < t} H(t, \theta_j+) I_j ,$$

откуда в силу $H(t, t) = E$ и вытекает (13). Теорема доказана.

4. Управляемость краевой задачи. Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\begin{gathered} \frac{dx}{dt} = A(t)x + \int_\alpha^t K(t, s)x(s)ds + C(t)u(t) + f(t), \qquad t \ne \theta_i , \\ \Delta x(\theta_i) = B_i x(\theta_i) + \sum_{\alpha < \theta_j \le \theta_i} D_{ij}\, x(\theta_j) + Q_i v_i + I_i , \end{gathered} \tag{18}$$

$$x(\alpha) = a, \qquad x(\beta) = b, \qquad a, b \in \mathbb{R}^n. \tag{19}$$

В (18), (19) $x \in \mathbb{R}^n$, матрицы A, K, B_i, $i = \overline{1, p}$, такие же, как и в (8), матрицы $C(t)$ и Q_i, $i = \overline{1, p}$, размера $n \times m$, m — фиксированное натуральное число, столбцы матрицы $C(t)$ являются функциями из $L_2^n[\alpha, \beta]$, Q_i, $i = \overline{1, p}$, — постоянные матрицы, решениями системы (18) являются непрерывные слева функции, принадлежащие $PAC[\alpha, \beta]$.

Если для каждого элемента $\{f, I\} \in \Pi^n[\alpha, \beta]$ и всех $a, b \in \mathbb{R}^n$ существует управление $\{u, v\} \in \Pi^m[\alpha, \beta]$, при котором задача (18), (19) имеет решение, то будем говорить, что задача управления γ разрешима.

Аналогично теореме 2 из [9], используя теорему 3, можно проверить, что справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Задача γ разрешима тогда и только тогда, когда система уравнений*

$$C^T(t)H^T(\beta, t)h^T = 0 \quad \forall t \in [\alpha, \beta], \quad Q_i^T H^T(\beta, \theta_i+)h^T = 0, \quad i = \overline{1, p}, \tag{20}$$

допускает только тривиальное решение $h = 0$.

Далее, предположим, что матрицы $A(t)$ и $C(t)$ допускают непрерывные производные до $(r-1)$-го порядка, ядро $K(t, s)$ имеет непрерывные частные производные по s до $(r-1)$-го порядка, а матрица $K(t, t)$ — непрерывные производные до $(r-2)$-го порядка включительно При указанных предположениях фундаментальная матрица H решений сопряженного уравнения (12) будет непрерывной вместе со своими производными до r-го порядка включительно на множестве $[\alpha, \beta] \setminus \{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p\}$. Дифференцируя (12), при $h = H$ получаем

$$\frac{\partial^2 H(t,s)}{\partial s^2} = -\frac{\partial[H(t,s)A(s)]}{\partial s} + H(t,s)K(s,s) - \int_s^t H(t,\sigma)\frac{\partial K(\sigma,s)}{\partial s}d\sigma,$$

$$\frac{\partial^3 H(t,s)}{\partial s^3} = -\frac{\partial^2[H(t,s)A(s)]}{\partial s^2} + \frac{\partial[H(t,s)K(s,s)]}{\partial s} +$$

$$+ H(t,s)\frac{\partial K(s,s)}{\partial s} - \int_s^t H(t,\sigma)\frac{\partial^2 K(\sigma,s)}{\partial s^2}d\sigma.$$

Таким способом выразим производные $\partial^{(k)}H(t,s)/\partial s^{(k)}$, $k = 2, 3, \ldots, r$, через младшие производные. Так как $H(t,t) = E$, то значения производных выражаются явно через коэффициенты сопряженного уравнения:

$$H(\beta,\beta) = E, \qquad \frac{\partial H(\beta,\beta)}{\partial s} = -A(\beta),$$

$$\frac{\partial^2 H(\beta,\beta)}{\partial s^2} = -A'(\beta) + (A(\beta))^2 + K(\beta,\beta),$$

$$\frac{\partial^3 H(\beta,\beta)}{\partial s^3} = -A''(\beta) + 3A(\beta)A'(\beta) - (A(\beta))^3 - 2K(\beta,\beta)A(\beta) + 2K'(\beta,\beta)$$

и т. д.

Может оказаться, что $m + pm = m(1+p) < n$. И в этом случае теорему 4 применять нельзя. Система (20) эквивалентна системе уравнений

$$\begin{gathered} C^T(t)H^T(\beta,t)h^T = 0 \quad \forall t \in [\alpha,\beta], \qquad \frac{\partial[C^T(t)H^T(\beta,t)]}{\partial t}h^T = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial^{r-1}[C^T(t)H^T(\beta,t)]}{\partial t^{r-1}}h^T = 0 \qquad \forall t \in [\alpha,\beta], \\ Q_i^T H^T(\beta,\theta_i+)h^T = 0, \qquad i = \overline{1,p}. \end{gathered} \tag{21}$$

Поэтому если $(r+p) \geq n$ и ранг матрицы системы (21) хотя бы в одной точке $t = t_0$ равен n, то задача γ разрешима. В частности, подставляя $t = \beta$ в (21), находим, что матрица коэффициентов системы (21) при $r = 2$ имеет вид

$$\operatorname{colon}\left[C^T(\beta),\ C'^T(\beta)-C^T(\beta)A(\beta),\ Q_i^T,\ i=\overline{1,p}\,\right]. \tag{22}$$

При $r=3$ и $t=\beta$ матрица коэффициентов имеет вид

$$\operatorname{colon}\Big[C^T(\beta),\ C'^T(\beta)-C^T(\beta)A(\beta),\ C''^T(\beta)-2C'^T(\beta)A(\beta)+$$
$$+\ C^T(\beta)\Big(\big(A(\beta)'\big)^2-A(\beta)+K(\beta,\beta)\Big),\ Q_i^T,\ i=\overline{1,p}\,\Big].$$

Отсюда вытекают следующие утверждения.

Теорема 5. *Если* $m(1+p)\geq n$ *и ранг матрицы*

$$\operatorname{colon}\left[C^T(\beta), Q_1^T H^T(\beta,\theta_1+), Q_2^T H^T(\beta,\theta_2+),\ldots, Q_p^T H^T(\beta,\theta_p+)\right]$$

равен n, *то задача* γ *разрешима.*

Теорема 6. *Если* $m(2+p)\geq n$ *и ранг матрицы*

$$\operatorname{colon}\left[C^T(\beta),\ C'^T(\beta)-C^T(\beta)A(\beta),\ Q_1^T H^T(\beta,\theta_1+),\ldots,\ Q_p^T H^T(\beta,\theta_p+)\right]$$

равен n, *то задача* γ *разрешима.*

Теорема 7. *Если* $m(3+p)\geq n$ *и ранг матрицы*

$$\operatorname{colon}\Big[C^T(\beta), C'^T(\beta)-C^T(\beta)A(\beta), C^T(\beta)-2C''^T(\beta)A'(\beta)+$$
$$+\ C^T(\beta)\big((A(\beta))^2-A'(\beta)+K(\beta,\beta)\big),\ Q_1^T H^T(\beta,\theta_1+),\ldots,\ Q_p^T H^T(\beta,\theta_p+)\Big]$$

равен n, *то задача* γ *разрешима.*

Рассмотрим теперь стационарную систему интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра, в которой матрицы A, K, C и Q постоянные:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= Ax(t)+\int_\alpha^t Kx(s)ds+Cu(t)+f(t), \qquad t\neq\theta_i,\\ \Delta x(\theta_i) &= Qv_i+I_i.\end{aligned} \tag{23}$$

Система, сопряженная системе (23), имеет вид

$$\frac{\partial h}{\partial s} = -h(t,s)A-\int_s^t h(t,\sigma)K\,d\sigma, \qquad s\neq\theta_i. \tag{24}$$

Кроме того, справедливы соотношения $H(\beta,\beta)=E$, $H'(\beta,\beta)=-A$.

Остальные значения производных фундаментальной матрицы $H(t,s)$ вычисляются по рекуррентной формуле

$$\frac{\partial^{(r+1)}H(\beta,\beta)}{\partial s^{(r+1)}} = -A\frac{\partial^{(r)}H(\beta,\beta)}{\partial s^{(r)}}+K\frac{\partial^{(r-1)}H(\beta,\beta)}{\partial s^{(r-1)}}, \qquad r=2,3,\ldots. \tag{25}$$

Введем обозначения

$$\mathfrak{R}_r^T = \frac{\partial^{(r)}H(\beta,\beta)}{\partial s^{(r)}}, \qquad \mathfrak{R}_0^T = E, \qquad \mathfrak{R}_1^T = -A.$$

Тогда рекуррентная формула (25) примет вид

$$\mathfrak{R}_{r+1} = -\mathfrak{R}_r A+\mathfrak{R}_{r-1}K, \qquad r=2,3,\ldots, \qquad \mathfrak{R}_0 = E, \qquad \mathfrak{R}_1 = -A.$$

Теорема 8. *Для разрешимости задачи* γ *в стационарном случае необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы*

$$\operatorname{colon}\left[C,\ \mathfrak{R}_1C,\ \mathfrak{R}_2C,\ldots,\ QH(\beta,\theta_1+),\ QH(\beta,\theta_2+),\ldots,\ QH(\beta,\theta_p+)\right] \tag{26}$$

был равен n.

Доказательство. Действительно, в стационарном случае матрица $H(t, s)$ является аналитической и

$$H(\beta, s) = E + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^{(k)} H(\beta, \beta)}{\partial s^{(k)}} \frac{(s-\beta)^k}{k!}.$$

Поэтому уравнение

$$C^T H^T(\beta, t) h^T = 0 \quad \forall t \in [\alpha, \beta], \quad Q^T H^T(\beta, \theta_i +) h^T = 0, \quad i = \overline{1, p},$$

эквивалентно системе

$$C^T H^T(\beta, \beta) h^T = 0, \quad C^T \frac{\partial H^T(\beta, \beta)}{\partial s} h^T = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$C^T \frac{\partial^{(k)} H^T(\beta, \beta)}{\partial s^{(k)}} h^T = 0, \quad Q^T H^T(\beta, \theta_i +) h^T = 0, \quad i = \overline{1, p}.$$

Чтобы последняя система имела только тривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы

$$\operatorname{colon}\left[C^T H^T(\beta, \beta),\ C^T \frac{\partial H^T(\beta, \beta)}{\partial s}, \ldots,\ C^T \frac{\partial^{(k)} H^T(\beta, \beta)}{\partial s^{(k)}}, \right.$$

$$\left. Q^T H^T(\beta, \theta_1 +), \ldots,\ Q^T H^T(\beta, \theta_p +) \right] \tag{27}$$

был равен n.

Транспонируя матрицу (27) и применяя указанные выше обозначения, получаем матрицу (26). Теорема доказана.

В частности, для стационарной системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием вместо (21) получим матрицу

$$\operatorname{colon}\left\{ C,\ -AC,\ A^2 C, \ldots,\ (-A)^r C,\ Q,\ -AQ, \ldots,\ (-A)^r Q \right\},$$

ранг которой в силу теоремы Гамильтона – Кэли равен рангу матрицы

$$\operatorname{colon}\left\{ C,\ AC,\ A^2 C, \ldots,\ A^{r-1} C,\ Q,\ AQ, \ldots,\ A^{n-1} Q \right\}.$$

Это утверждение доказано в [9].

1. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Выща шк., 1987. – 287 с.
2. *Мышкис А. Д., Самойленко А. М.* Системы с толчками в заданные моменты времени // Мат. сб. – 1967. – **74**, вып. 2. – С. 202–206.
3. *Lakshmicantham V., Bainov D. D., Simeonov P. S.* Theory of impulsive differential equations. – Singapore: World Sci., 1989.
4. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1989. – 623 с.
5. *Ахметов М. У.* Почти периодические решения интегро-дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Мат. физика и нелинейн. колебания. – 1987. – Вып. 42. – С. 5–6.
6. *Ландо Ю. К.* Об управляемых интегро-дифференциальных операторах // Дифференц. уравнения. – 1973. – **9**, № 12. – С. 2227–2230.
7. *Rama Mahana Rao M., Srivastava Sanjay K., Sivasundaram S.* Stability of linear delay impulsive differential equations with impulsive effect // J. Math. Anal. and Appl. – 1992. – **163**. – P. 47–59.
8. *Anokhin A., Berezansky L., Braverman E.* Stability of linear delay impulsive differential equations // Dynamic Systems and Appl. – 1995. – **4**. – P. 173–188.
9. *Ахметов М. У., Перестюк Н. А., Тлеубергенова М. А.* Управление линейными импульсными системами // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 3. – С. 307–314.

Получено 22.10.98