УДК 517.5

П. И. Когут (Днепропетр. ун-т), **В. С. Мельник** (Ин-т прикл. систем. анализа НАН Украины и М-ва образования Украины, Киев)

О СЛАБОЙ КОМПАКТНОСТИ ОГРАНИЧЕННЫХ МНОЖЕСТВ В БАНАХОВЫХ И ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

We investigate the compactness of a class of bounded subsets in Banach and locally convex spaces. We obtain generalization of the Banach–Alaoglu theorem to the class of sets which are not polars to convex balanced neighborhoods of zero.

Досліджується компактність одного класу обмежених підмножин в банахових та локально опуклих просторах. Одержано узагальнення теореми Банаха–Алаоглу на клас підмножин, які не є полярами до опуклих урівноважених околів нуля.

В соответствии с теоремой Банаха – Алаоглу [1, с. 133], если X^* топологически двойственное к банахову пространству X (причем X не обязательно рефлексивно), то любой замкнутый шар B_{X^*} является $*$-слабо компактным в X^*. Напомним, что $*$-слабой топологией на X^* называют локально выпуклую топологию $\sigma(X^*, X)$, в которой линейные функционалы

$$X^* \ni f \mapsto \langle f, u \rangle_X \quad u \in X,$$

непрерывны. Что касается других типов подмножеств в X^*, которые отличны от шара, то хорошо известно, что любое ограниченное и $*$-слабо замкнутое подмножество B из X^* компактно в $*$-слабой топологии на X^*. Однако эффективные критерии проверки свойств $*$-слабой замкнутости практически отсутствуют. Поэтому обобщение теоремы Банаха – Алаоглу на другие типы множеств, которые не являются шаром, представляется вполне естественным.

1. О слабой компактности ограниченных множеств в банаховых пространствах. Пусть X, $\{Z_j\}_{j=\overline{1,k}}$ — произвольные банаховы пространства, X^*, $\{Z_j^*\}_{j=\overline{1,k}}$ — их топологически двойственные. Рассмотрим семейство линейных отображений $\{\Lambda_j : (D(\Lambda_j) \subset Z_j) \to X\}_{j=\overline{1,k}}$, для которых области их определения $D(\Lambda_j)$ плотны в Z_j. Пусть $\{\Lambda_j^* : (D(\Lambda_j^*) \subset X^*) \to Z_j^*\}_{j=\overline{1,k}}$ — соответствующее семейство сопряженных отображений. Обозначим через $\mathcal{D}^*$ множество $\bigcap_{j=1}^k D(\Lambda_j^*)$. Рассмотрим на $\mathcal{D}^*$ норму графика:

$$\| y^* \|_* = \| y^* \|_{X^*} + \sum_{j=1}^{k} \left\| \Lambda_j^* y^* \right\|_{Z_j^*} . \tag{1}$$

Нормированное пространство $(\mathcal{D}^*, \|\cdot\|_*)$ будем обозначать через Y^*. Известно, что при каждом значении $j = 1, 2, \ldots, k$ графики $\operatorname{gr} \Lambda_j^*$ операторов Λ_j^* замкнуты в $X_\sigma^* \times Z_{j\sigma}^*$, где через X_σ^* обозначено пространство X^*, наделенное $\sigma(X^*, X)$-топологией [2, с. 198]. Следовательно, Y^* является банаховым пространством. Обозначим пространство X с $\sigma(X, X^*)$-топологией как X_ω. Рассмотрим в банаховом пространстве Y^* следующий класс подмножеств:

$$\mathcal{K}^* = \left\{ \xi \in Y^* \;\Big|\; \|\xi\|_{X^*} \le l_0, \left\| \Lambda_j^* \xi \right\|_{Z_j^*} \le l_j, \, j = 1, 2, \ldots, k \right\}, \tag{2}$$

где $l_0, l_1, \ldots, l_k$ — произвольные положительные вещественные числа.

Заметим, что множество $\mathcal{D} \overset{\text{def}}{=} X \times \prod_{j=1}^{k} D(\Lambda_j)$ можно рассматривать как семейство линейных непрерывных функционалов $G_\phi(\cdot)$, определенных на Y^*. При этом каждый из $G_\phi(\cdot)$ разделяет точки на Y^* и задается правилом

$$G_\phi(y^*) = \langle y^*, \phi \rangle \overset{\text{def}}{=} \langle y^*, \phi_0 \rangle_X + \sum_{j=1}^{k} \left\langle \Lambda_j^* y^*, \phi_j \right\rangle_{Z_j}. \tag{3}$$

Здесь $\phi = (\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_k) \in \mathcal{D}$, а через $\langle \cdot, \cdot \rangle_X : X^* \times X \to R$ обозначено дуальное спаривание X^* и X.

Пусть $\sigma(Y^*, \mathcal{D})$ — слабейшая топология на Y^*, в которой все функционалы из $\mathcal{D}$ непрерывны. Тогда пара $(Y^*, \sigma(Y^*, \mathcal{D}))$ представляет собой локально выпуклое топологическое пространство.

Определение 1. *Будем говорить, что последовательность* $\{y_n^*\} \subset Y^*$ $\mathcal{D}$-*слабо сходится к элементу* $y^* \in Y^*$, *если соотношения*

$$\lim_{n\to\infty} \langle y_n^*, \phi_0 \rangle_X = \langle y^*, \phi_0 \rangle_X,$$

$$\lim_{n\to\infty} \langle \Lambda_j^* y_n^*, \phi_j \rangle_{Z_j} = \langle \Lambda_j^* y^*, \phi_j \rangle_{Z_j}$$

выполняются при всех $\phi = (\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_k) \in \mathcal{D}$.

Это определение можно легко обобщить на случай $\mathcal{D}$-слабо сходящихся направленностей $\{y_\alpha^*\}_{\alpha \in A} \subset Y^*$, где A — направленное множество индексов.

Следующая теорема устанавливает достаточные условия компактности множества $\mathcal{K}^*$ в локально выпуклом пространстве $(Y^*, \sigma(Y^*, \mathcal{D}))$.

Теорема 1. *Пусть* X, $\{Z_j\}_{j=\overline{1,k}}$ — *банаховы пространства,* X^*, $\{Z_j^*\}_{j=\overline{1,k}}$ — *их топологически двойственные и задано семейство линейных отображений* $\left\{\Lambda_j : \left(D(\Lambda_j) \subset Z_j\right) \to X\right\}_{j=\overline{1,k}}$, *для которых их области определения* $D(\Lambda_j)$ *плотны в* Z_j *при каждом* $j = 1, 2, \ldots, k$. *Тогда любое множество* $\mathcal{K}^*$ *вида* (2) $\mathcal{D}$-*слабо компактно в* Y^*.

Доказательство. Покажем, что для любой направленности точек $\{y_\alpha^*\}_{\alpha \in A} \subset \mathcal{K}^*$ можно указать ее поднаправленность $\{d_\beta^*\}_{\beta \in B}$, которая $\mathcal{D}$-слабо сходится в Y^* к некоторому элементу из $\mathcal{K}^*$. Пусть $\{y_\alpha^*\}_{\alpha \in A} \subset \mathcal{K}^*$ — произвольная направленность. Ясно, что $\{y_\alpha^*\}_{\alpha \in A}$ принадлежит замкнутому шару в X^* радиуса l_0. Следовательно, в силу теоремы Банаха – Алаоглу [1, с. 133] можно выделить поднаправленность $\{x_\beta^*\}_{\beta \in B_0}$ такую, что $x_\beta^* \to y^*$ в

X^*_σ и $\| y^*\|_{X^*} \le l_0$. Положим $j=1$ и рассмотрим направленность $\left\{\Lambda^*_1 x^*_\beta\right\}_{\beta\in B_0}$. Так как элементы $\Lambda^*_1 x^*_\beta$ также принадлежат замкнутому шару в Z^*_1 радиуса l_1, то можно построить поднаправленность $\left\{\Lambda^*_1 z^*_\gamma\right\}_{\gamma\in B_1}$ такую, что $\Lambda^*_1 z^*_\gamma \to \mu^*_1$ в $Z^*_{1\sigma}$ и $\|\mu^*_1\|_{Z^*_1} \le l_1$. Повторяя данную итерацию при $j = 2, 3, \dots , k$, в конечном итоге можно выделить поднаправленность $\left\{d^*_\nu\right\}_{\nu\in B_k}$ исходной направленности $\left\{y^*_\alpha\right\}_{\alpha\in A} \subset \mathcal{K}^*$ такую, что

$$\langle d^*_\nu, \phi_0\rangle_X \xrightarrow{\nu\in B_k} \langle y^*, \phi_0\rangle_X,$$
$$\left\langle \Lambda^*_j d^*_\nu, \phi_j\right\rangle_{Z_j} \xrightarrow{\nu\in B_k} \left\langle \mu^*_j, \phi_j\right\rangle_{Z_j},$$
$$\| y^*\|_{X^*} \le l_0, \quad \|\mu^*_j\|_{Z^*_j} \le l_j, \quad j = 1, 2, \dots , k,$$

при всех $\phi = (\phi_0, \phi_1, \dots , \phi_k) \in \mathcal{D}$.

Поскольку операторы $\Lambda^*_j : \left(D\left(\Lambda^*_j\right) \subset X^*\right) \to Z^*_j$ являются замкнутыми в $X^*_\sigma \times Z^*_{j\sigma}$ (согласно свойствам множеств $D(\Lambda^*_j)$), то $\mu^*_j = \Lambda^*_j y^*$. Тем самым доказано, что $\langle d^*_\nu, \phi\rangle \to \langle y^*, \phi_0\rangle$ $\forall\phi \in \mathcal{D}$. При этом выполняются неравенства $\| y^*\|_{X^*} \le l_0$, $\|\Lambda^*_j y^*\|_{Z^*_j} \le l_j$, $j = 1, 2,\dots , k$. Следовательно, имеет место включение $y^* \in \mathcal{K}^*$, что и требовалось доказать.

***Пример* 1.** Пусть Ω — открытое ограниченное подмножество евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим семейство операторов

$$\Lambda_j \overset{\text{def}}{=} -\frac{\partial}{\partial x_j} \qquad \left(\Lambda_j : \left(D\left(\Lambda_j\right) \subset L^1(\Omega)\right) \to L^1(\Omega)\right),$$

где

$$D\left(\Lambda_j\right) = \left\{ y \in L^1(\Omega) \;\middle|\; \operatorname{supp} y(x) \text{ есть компакт в } \Omega, \frac{\partial y}{\partial x_j} \in L^1(\Omega)\right\},$$

при всех $j = 1, 2, \dots , n$. Здесь $\partial y/\partial x_j$ — частные производные в смысле распределений.

Легко видеть, что имеет место цепочка включений

$$C^1_0(\Omega) \subset \overset{\circ}{W}{}^1_1(\Omega) \subset D(\Lambda_j) \subset L^1(\Omega).$$

Однако $C^1_0(\Omega)$ плотно в $L^1(\Omega)$ в топологии, индуцированной нормой [3, с. 95]. Следовательно, его слабое замыкание совпадает со всем $L^1(\Omega)$. А значит, области определений $D(\Lambda_j)$ слабо плотны в $L^1(\Omega)$ при всех $j = 1, 2, \dots , n$. Таким образом, сопряженный оператор $\Lambda^*_j : \left(D\left(\Lambda^*_j\right) \subset L^\infty(\Omega)\right) \to L^\infty(\Omega)$ существует и его можно определить как $\Lambda^*_j = \partial/\partial x_j$. Тогда $\mathcal{D}^* \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{j=1}^n D\left(\Lambda^*_j\right) = W^1_\infty(\Omega)$, где

$$W^1_\infty(\Omega) = \left\{ y(x) \;\middle|\; y \in L^\infty(\Omega), \frac{\partial y}{\partial x_j} \in L^\infty(\Omega), \ j = \overline{1, n} \right\}$$

— банахово пространство с нормой

$$\| y\|_{W^1_\infty} = \operatorname*{vraisup}_{x\in\Omega} |y(x)| + \sum_{j=1}^{n} \operatorname*{vraisup}_{x\in\Omega} \left|\frac{\partial y(x)}{\partial x_j}\right|.$$

Поэтому в силу теоремы 1 любое ограниченное множество вида

$$\mathcal{K}^* = \left\{ y \in W^1_\infty(\Omega) \,\middle|\, \| y\|_{L^\infty(\Omega)} \le l_0, \ \left\|\frac{\partial y}{\partial x_j}\right\|_{L^\infty(\Omega)} \le l_j, \ j=\overline{1,n} \right\}$$

будет $\mathcal{D}$-компактным. А значит, из любой направленности точек $\{y^*_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset \subset \mathcal{K}^*$ можно выделить поднаправленность $\{x^*_\beta\}_{\beta\in B}$ такую, что

$$\lim_{\beta\in B} \langle x^*_\beta, \phi\rangle_Y = \langle y, \phi\rangle_Y \quad \forall\, \phi = (\phi_0, \phi_1, \ldots, \varphi_n) \in L^1(\Omega) \times \prod_{j=1}^{n} D(\Lambda_j),$$

где $y \in \mathcal{K}^*$ и

$$\langle y, \phi\rangle_Y = \int_\Omega y(x)\phi_0(x)\,dx + \sum_{j=1}^{n} \int_\Omega \phi_j(x) \frac{\partial y(x)}{\partial x_j}\,dx.$$

Более того,так как пространство $L^1(\Omega)$ сепарабельно, то рассматриваемое множество $\mathcal{K}^*$ будет секвенциально $\mathcal{D}$-компактно.

***Замечание* 1.** При доказательстве теоремы 1 мы предполагали, что операторы Λ^*_j являются сопряженными к операторам Λ_j с плотными областями определения. Однако легко заметить, что теорема останется в силе, если потребовать, чтобы операторы Λ^*_j были замкнутыми при каждом $j = 1, 2, \ldots$ $\ldots, k$. В этом случае можно положить $\mathcal{D} = X \times \prod_{j=1}^{k} Z_j$. При этом нет необходимости восстанавливать операторы Λ_j, для которых Λ^*_j были бы сопряженными.

Рассмотрим достаточные условия замкнутости операторов Λ^*_j или, что то же самое, замкнутости в $X^*_\sigma \times Z^*_{j\sigma}$ их графиков

$$\operatorname{gr} \Lambda^*_j = \left\{ \left(y^*, \Lambda^*_j y^*\right), \ y^* \in D(\Lambda_j) \subset X^* \right\} \subset X^* \times Z^*_j.$$

Пусть $\mathfrak{R}_j : Z_j \times X \to X \times Z_j$ — изоморфизм из $Z_j \times X$ на $X \times Z_j$, определенный по правилу $\mathfrak{R}_j(z_j, x) = (-x, z_j)$. Для любого подмножества M банахова пространства X обозначим через $M^\perp$ его аннулятор, т. е.

$$M^\perp \overset{\text{def}}{=} \left\{ x^* \in X^* \,\middle|\, \langle x^*, x\rangle_X = 0 \quad \forall\, x \in M \right\}.$$

Теорема 2. *Пусть* X, $\{Z_j\}_{j=\overline{1,k}}$ — *произвольные банаховы пространства,* X^*, $\{Z^*_j\}_{j=\overline{1,k}}$ — *их топологически двойственные, задано семейство линейных отображений* $\{\Lambda^*_j : D(\Lambda^*_j) \to Z^*_j\}_{j=\overline{1,k}}$, *для которых их области определения* $D(\Lambda^*_j)$ *плотны в* X^*_σ *при всех* $j = 1, 2, \ldots, k$, *и пусть* $\left\{\hat{\Lambda}_j : \left(D(\hat{\Lambda}_j) \subset Z_j\right) \to X\right\}_{j=\overline{1,k}}$ — *сопряженные операторы к* Λ^*_j. *Тогда множество* $\mathcal{K}^*$ *будет* $\mathcal{D}$*-слабо компактным в* Y^*, *если аннуляторы* $\left(\mathfrak{R}_j \operatorname{gr} \hat{\Lambda}_j\right)^\perp$ *являются графиками некоторых операторов.*

Замечание 2. В формулировке данной теоремы не предполагается, что операторы Λ_j^* являются сопряженными к операторам Λ_j с плотными областями определения.

Доказательство. Прежде всего установим, что в силу исходных предположений операторы Λ_j^* будут замкнуты в $X_\sigma^* \times Z_{j\sigma}^*$. Тогда искомое утверждение будет непосредственно следовать из замечания 1. Известно, что если область определения оператора Λ_j^* плотна в X_σ^*, то для Λ_j^* существует единственный сопряженный оператор $\hat{\Lambda}_j : \left(D(\hat{\Lambda}_j) \subset Z_j\right) \to X$ такой, что

$$\left\langle x^*, \hat{\Lambda}_j l \right\rangle_X - \left\langle \Lambda_j^* x^*, l \right\rangle_{Z_j} = 0 \qquad \forall\, x^* \in D\left(\Lambda_j^*\right). \tag{4}$$

Следовательно, для каждой пары $\left\langle x^*, \Lambda_j^* x^* \right\rangle \in \operatorname{gr} \Lambda_j^*$ имеет место включение $\left\langle x^*, \Lambda_j^* x^* \right\rangle \in \left(\mathfrak{R}_j \operatorname{gr} \hat{\Lambda}_j^*\right)^\perp$. Отсюда находим $\operatorname{gr} \Lambda_j^* \subseteq \left(\mathfrak{R}_j \operatorname{gr} \hat{\Lambda}_j\right)^\perp$. Однако множество $\left(\mathfrak{R}_j \operatorname{gr} \hat{\Lambda}_j\right)^\perp$ является графиком некоторого оператора, а значит, это множество, как аннулятор, будет замкнутым в $X_\sigma^* \times Z_{j\sigma}^*$ [4, с. 109]. Следовательно, если $\left(\mathfrak{R}_j \operatorname{gr} \hat{\Lambda}_j\right)^\perp \subseteq \operatorname{gr} \Lambda_j^*$, то оператор Λ_j^* также будет замкнутым в $X_\sigma^* \times Z_{j\sigma}^*$.

Пусть (a, b) — произвольная пара из $\left(\mathfrak{R}_j \operatorname{gr} \hat{\Lambda}_j\right)^\perp$. Тогда

$$\langle b, l \rangle_{Z_j} - \left\langle a, \hat{\Lambda}_j l \right\rangle_X = 0 \tag{5}$$

при всех $l \in D\left(\hat{\Lambda}_j\right)$. Прежде всего заметим, что если $(a, b) \in \left(\mathfrak{R}_j \operatorname{gr} \hat{\Lambda}_j\right)^\perp$, то существует подмножество $\mathcal{D}$, плотное в X_σ^*, такое, что $a \in \mathcal{D}$. Покажем, что в этом случае $\Lambda_j^* a = b$, т. е. $(a, b) \in \operatorname{gr} \Lambda_j^*$. Для этого достаточно установить, что из $\langle b, l \rangle_{Z_j} = 0$ при всех $l \in D\left(\hat{\Lambda}_j\right)$ следует условие $b = 0$. Однако если множество $D\left(\hat{\Lambda}_j\right)$ плотно в $Z_{j\omega}$, то искомое утверждение очевидно.

Предположим противное. Пусть множество $D\left(\hat{\Lambda}_j\right)$ не плотно в $Z_{j\omega}$. Так как сильное замыкание $D\left(\hat{\Lambda}_j\right)$ совпадает с его слабым замыканием в Z_j [4, с. 79], то аннулятор $\left(D\left(\hat{\Lambda}_j\right)\right)^\perp$ для $\overline{D\left(\hat{\Lambda}_j\right)}$ будет не пустым множеством. Здесь через $\overline{D\left(\hat{\Lambda}_j\right)}$ обозначено замыкание множества $D\left(\hat{\Lambda}_j\right)$ в $Z_{j\omega}$. Рассмотрим в $X^* \times Z_j^*$ множество пар $(0, h) \in X^* \times D\left(\hat{\Lambda}_j\right)^\perp$. Ясно, что каждая такая пара будет удовлетворять соотношению (5). Следовательно, $(0, h)$ принадлежит $\left(\mathfrak{R}_j \operatorname{gr} \hat{\Lambda}_j\right)^\perp$. Поскольку $h \neq 0$, то такая пара не может принадлежать какому-либо графику. Следовательно, $\left(\mathfrak{R}_j \operatorname{gr} \hat{\Lambda}_j\right)^\perp$ не является графиком, что противоречит исходным предположениям. Таким образом, множество $D\left(\hat{\Lambda}_j\right)$ плотно в $Z_{j\omega}$. А значит, из соотношения (5) следует существование линейного оператора с плотной в X_σ^* областью определения, который устанавливает однозначное соответствие $a \mapsto b$.

С другой стороны, соотношение (5) является определяющим для нахождения сопряженного оператора Λ_j^*. Следовательно, $\Lambda_j^* a = b$ при всех $a \in D(\Lambda_j^*)$. Поскольку $(a, b) \in \operatorname{gr} \Lambda_j^*$, то в силу произвольности выбора пары (a, b) получим $\left(\mathfrak{R}_j \operatorname{gr} \hat{\Lambda}_j\right)^{\perp} \subseteq \operatorname{gr} \Lambda_j^*$. Тогда, учитывая обратное включение, установленное выше, имеем $\left(\mathfrak{R}_j \operatorname{gr} \hat{\Lambda}_j\right)^{\perp} = \operatorname{gr} \Lambda_j^*$. Теорема доказана.

***Пример* 2.** Сохранив обозначения из примера 1, обозначим через Ω открытое ограниченное множество в R^n. Рассмотрим семейство линейных операторов $\Lambda_j^* : \left(D(\Lambda_j^*) \subset L^\infty(\Omega)\right) \to L^\infty(\Omega)$, где $\Lambda_j^* = \partial / \partial x_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, и каждая из областей определения $D(\Lambda_j^*)$ состоит из функций $y^* \in L^\infty(\Omega)$, для которых их частные производные в смысле распределений удовлетворяют условию $\partial y^* / \partial x_j \in L^\infty(\Omega)$. Покажем, что в рассматриваемом случае множества $D(\Lambda_j^*)$ являются $*$-слабо плотными в $L^\infty(\Omega)$.

Как известно, $L^\infty(\Omega) = \left(L^1(\Omega)\right)^*$ и $L^1(\Omega)$ — сепарабельное банахово пространство, для которого совокупность функций

$$E = \left\{ \phi = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \cdot \chi_{A_k} \;\middle|\; A_k \subset \Omega, \operatorname{mes} A_k < \infty, A_k \cap A_i = \varnothing, k \neq i \right\}$$

представляет собой счетное всюду плотное множество. Здесь χ_{A_k} — характеристические функции измеримых по Лебегу множеств A_k; α_k — рациональные числа. Поскольку множество E счетно, его можно представить в виде

$$E = \left\{ \phi_i \in L^1(\Omega) \;\middle|\; \phi_i = \sum_{k=1}^{m_i} \alpha_k \cdot \chi_{A_k}, i = 1, 2, \ldots \right\}.$$

Известно [5, с. 161], что каждому элементу $\phi_i \in L^1(\Omega)$ можно поставить в соответствие линейный $*$-слабо непрерывный на $L^\infty(\Omega)$ функционал $G[\phi_i](\cdot)$ по следующему правилу:

$$G[\phi_i](f) = \langle f, \phi_i \rangle_{L^1} = \int_\Omega f(x) \phi_i(x) \, dx.$$

Положим

$$f_i = \sum_{k=1}^{m_i} \operatorname{sign}(\alpha_k) \cdot \chi_{A_k}.$$

Тогда

$$\langle f_i, \phi_i \rangle_{L^1} = \int_\Omega f_i(x) \phi_i(x) \, dx = \int_\Omega |\phi_i(x)| \, dx = \|\phi_i\|_{L^1(\Omega)}.$$

Пусть F — множество всех линейных комбинаций $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ с рациональными коэффициентами. Покажем, что F $*$-слабо плотно в $L^\infty(\Omega)$. Предположим противное. В соответствии с теоремой Хана–Банаха для произвольного элемента $f_0 \in L^\infty(\Omega)$, не принадлежащего $*$-слабому замыканию множества F, найдется $*$-слабо непрерывный линейный функционал $G[\phi_0] \in L^1(\Omega)$ такой, что $\int_\Omega f_0(x) \phi_0(x) \, dx = 1$ и $\int_\Omega f(x) \phi_0(x) \, dx = 0$ для всех $f \in F$. Так как множество E плотно в $L^1(\Omega)$, то можно указать последовательность $\{\phi_{i_k}\}$ такую, что $\phi_{i_k} \to \phi_0$ сильно в $L^1(\Omega)$. Тогда

$$\|\phi_i\|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega f_{i_k}(x)\phi_{i_k}(x)\,dx =$$

$$= \int_\Omega f_{i_k}(x)\big(\phi_{i_k}(x) - \phi_0(x)\big)dx \le \left\|\phi_{i_k} - \phi_0\right\|_{L^1(\Omega)}.$$

Следовательно, $\|\phi_{i_k}\|_{L^1} \to 0$ при $k \to \infty$. Значит, $\phi_0 = 0$, что приводит к противоречию ($\phi_0 \ne 0$). Тем самым доказано, что множество F $*$-слабо плотно в $L^\infty(\Omega)$. Поскольку имеет место цепочка очевидных включений $F \subset D(\Lambda_j^*) \subset L^\infty(\Omega)$, то области определения $D(\Lambda_j^*)$ рассматриваемых операторов также $*$-слабо плотны в $L^\infty(\Omega)$.

Рассмотрим множество $\mathcal{D}^* = \bigcap_{j=1}^n D(\Lambda_j^*)$ с нормой графика

$$\|y^*\|_* = \operatorname*{vraisup}_{x\in\Omega}\left|y^*(x)\right| + \sum_{j=1}^n \operatorname*{vraisup}_{x\in\Omega}\left|\frac{\partial y^*(x)}{\partial x_j}\right|.$$

Ясно, что $\mathcal{D}^* = W_\infty^1(\Omega)$, где класс $W_\infty^1(\Omega)$ определен в примере 1.

Поскольку операторы Λ_j^* замкнуты в $*$-слабой топологии на $L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$, то согласно теореме 2 и замечанию 1 ограниченное множество

$$\mathcal{K}^* = \left\{ y^* \in \mathcal{D}^* \,\middle|\, \|y^*\|_{L^\infty(\Omega)} \le l_0,\ \left\|\frac{\partial y^*}{\partial x_j}\right\|_{L^\infty(\Omega)} \le l_j,\ j = \overline{1,n} \right\}$$

будет $\mathcal{D}$-слабо компактным в пространстве $(\mathcal{D}^*, \|\cdot\|_*)$.

***Пример* 3**. Пусть Ω — открытое подмножество R^n с границей Γ из класса C^∞. Рассмотрим вопрос о существовании решений в следующей задаче оптимального управления:

$$\inf_{u\in U_\partial} I(u) = \inf_{u\in U_\partial}\left[\int_\Omega \big(y(u) - z_\partial\big)^2 dx + \upsilon\|Du\|_{L^\infty(\Omega)}\right], \tag{6}$$

$$A(u)y(u) = f \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{7}$$

$$y(u) = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{8}$$

где:

1) $f,\ z_\partial \in L^2(\Omega),\ \upsilon > 0$;

2) $A(u)$ — эллиптический дифференциальный оператор второго порядка

$$A(u)y = -\sum_{i,j=1}^n \partial_{x_1}\Big(a_{ij}(x)u(x)\partial_{x_j}y\Big) + a_0(x)y,$$

$$a_{ij},\ a_0 \in L^\infty(\Omega) \quad \text{для} \quad j = 1, 2, \ldots, n, \quad \inf_{x\in\Omega} a_0(x) \ge \alpha > 0;$$

3) U_∂ — множество допустимых управлений, заданное по правилу

$$U_\partial = \left\{u \in W_\infty^1(\Omega) \,\middle|\, \xi_0(x) \le u(x) \le \xi_1(x) \text{ п.в. в } \Omega\right\}.$$

Здесь $\xi_0, \xi_1 \in L^\infty(\Omega)$ и $0 < \beta \le \xi_0(x) \le \xi_1(x)$ п. в. в Ω.

Хорошо известно, что при каждом значении $u \in U_\partial$ задача Дирихле (7), (8) имеет единственное решение $y(u)$ в классе $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Допустимое управление $u^0 \in U_\partial$ называют оптимальным, если на нем функционал качества I достигает своего наименьшего возможного значения, т. е. $I(u^0) = \inf_{u \in U_\partial} I(u)$.

Пусть $\{u_n\}_{n \in N}$ — минимизирующая последовательность и обозначим через $y_n = y(u_n)$ соответствующие решения. Тогда из (6) находим

$$\|y_n\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \text{const}, \quad \|Du_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \text{const}, \quad \|u_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \text{const}, \quad u_n \in U_\partial.$$

Следовательно, в силу теоремы 2 найдутся элементы $u^0 \in U_\partial$ и $y^0 \in H_0^1(\Omega)$ такие, что при переходе в случае необходимости к подпоследовательностям будут выполняться условия

$$y_n \to y^0 \quad \text{слабо в} \quad H_0^1(\Omega), \; u_n \to u^0 \quad *\text{-слабо в} \quad W_\infty^1(\Omega). \tag{9}$$

Однако функционал качества секвенциально полунепрерывен снизу в $*$-слабой топологии на $W_\infty^1(\Omega)$ и слабой топологии на $L^2(\Omega)$. Следовательно,

$$\inf_{u \in U_\partial} I(u) = \liminf I(u_n) \geq I(u^0).$$

Осталось показать, что предельная пара (u^0, y^0) удовлетворяет соотношению (7). С этой целью заметим, что условие (9) и включение $u^0 \in U_\partial$ гарантируют следующие утверждения:

$$u_n \to u^0 \quad \text{п. в. в } \Omega, \qquad \int_\Omega \left|u_n - u^0\right| dx \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Отсюда находим: $u_n \to u^0$ сильно в $L^\infty(\Omega)$, $u_n \to u^0$ сильно в $L^2(\Omega)$ при $n \to \infty$.

Учитывая это обстоятельство, предельный переход в смысле распределений в выражении $\sum_{i,j=1}^n \partial_{x_1}(a_{ij} u_n \partial_{x_1} y_n) + a_0 y_n$ становится возможным и его результатом будет $A(u^0) y^0$ Таким образом, пара (u^0, y^0) является решением задачи оптимального управления (6)–(8).

2. О слабой компактности ограниченных множеств в локально выпуклых пространствах. Рассмотрим теперь случай, когда X, $\{Z_j\}_{j=\overline{1,k}}$ — локально выпуклые пространства. Пусть $\left\{\Lambda_j : \left(D(\Lambda_j) \subset Z_j\right) \to X\right\}_{j=\overline{1,k}}$ — линейные отображения, для которых области их определения $D(\Lambda_j)$ плотны в Z_j при всех $j = 1, 2, \ldots, k$. Обозначим через $\left\{\Lambda_j^* : \left(D(\Lambda_j^*) \subset X^*\right) \to Z_j^*\right\}_{j=\overline{1,k}}$ семейство сопряженных отображений. Пусть $\mathcal{B}_0^* = \left\{U_{0,\alpha}^*\right\}$ — база окрестностей нуля в X^*, $\mathcal{B}_j^* = \left\{U_{j,\alpha}^*\right\}$ — база окрестностей нуля в Z_j^*. Положим $\mathcal{D}^* = \bigcap_{j=1}^k D\left(\Lambda_j^*\right)$. Тогда $\mathcal{D}^*$ превращается в локально выпуклое пространство с базисом системы окрестностей нуля $\mathcal{U}$ в виде

$$\mathcal{U} \ni U \Leftrightarrow U = \left\{ y^* \in \mathcal{D}^* \,\middle|\, y^* \in U_0^*, \Lambda_j^* y^* \in U_j^*, \; j = 1, 2, \ldots, k \right\}.$$

Обозначим рассматриваемое пространство через Y^* и рассмотрим в нем множество

$$\mathcal{K}^* = \left\{ y^* \in Y^* \,\middle|\, y^* \in l_0 U_0^0, \Lambda_j^* y^* \in l_j U_j^0, \; j = 1, 2, \ldots, k \right\}. \tag{10}$$

Здесь $l_0, l_1, \dots, l_k$— положительные вещественные числа, U_0^0 — поляра выпуклой уравновешенной окрестности нуля в X, а U_j^0 — поляра выпуклой уравновешенной окрестности нуля в пространстве Z_j. Введем на Y^* $\sigma(Y^*; \mathcal{D})$-слабую топологию, где $\mathcal{D} = X \times \prod_{j=1}^{k} D(\Lambda_j)$.

Тогда для множества $\mathcal{K}^*$ будет иметь место следующий результат.

Теорема 3. *Пусть* X, $\{Z_j\}_{j=\overline{1,k}}$ — *отделимые локально выпуклые топологические пространства,* X^*, $\{Z_j^*\}_{j=\overline{1,k}}$ — *их топологически сопряженные,* $\{\Lambda_j : (D(\Lambda_j) \subset Z_j) \to X\}_{j=\overline{1,k}}$ — *плотно определенные линейные операторы,* $\{\Lambda_j^* : (D(\Lambda_j^*) \subset X^*) \to Z_j^*\}_{j=\overline{1,k}}$ — *двойственные к ним отображения. Тогда множество* $\mathcal{K}^*$, *определенное соотношениями* (10), *компактно в* $\sigma(Y^*, \mathcal{D})$-*слабой топологии пространства* Y^*.

Доказательство. Пусть $\{y_\alpha^*\}_{\alpha \in A}$ — произвольная направленность из $\mathcal{K}^*$ Тогда $y_\alpha^* / l_0 \in U_0^0$ при всех $\alpha \in A$. Однако, согласно теореме Банаха–Алаоглу, поляра выпуклой уравновешенной окрестности нуля компактна в $\sigma(X^*, X)$-слабой топологии пространства X^*. Следовательно, существует поднаправленность $\{x_\beta^*\}_{\beta \in B_0}$ такая, что $x_\beta^* \to y^*$ в X_σ^*, а значит, $y^* \in l_0 U_0^0$. Полагая $j = 1$, рассмотрим направленность $\{\Lambda_1^* x_\beta^*\}_{\beta \in B_0}$. Поскольку $l_1^{-1} \Lambda_1^* x_\beta^* \in U_1^0$ при всех $\beta \in B_0$ то найдется поднаправленность $\{\Lambda_1^* z_\gamma^*\}_{\gamma \in B_1}$ такая, что $\Lambda_1^* z_\gamma^* \to \nu_1^*$ в $Z_{1\sigma}^*$ и $\nu_1^* \in U_1^0$. В силу замкнутости оператора $\Lambda_1^* : (D(\Lambda_1^*) \subset X^*) \to Z_1^*$ в произведении пространств $X_\sigma^* \times Z_{1\sigma}^*$ (это следует из свойств множеств определения $D(\Lambda_j^*)$ [2, с. 198] имеем $\nu_1^* = l_1^{-1} \Lambda_1^* y^*$. Повторяя указанную процедуру при $j = 2, 3, \dots, k$, можно указать поднаправленность $\{d_\mu^*\}_{\mu \in B_k}$ исходной направленности $\{y_\alpha^*\}_{\alpha \in A} \subset \mathcal{K}^*$ такую, что

$$d_\mu^* \to y^* \in l_0 U_0^0 \quad \text{в} \quad X_\sigma^*,$$

$$\Lambda_j^* d_\mu^* \to \Lambda_j^* y^* \in l_j U_j^0 \quad \text{в} \quad Z_{j\sigma}^*, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Теорема доказана.

1. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 1. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1977. – 357 с.
2. *Шеффер Х.* Топологические векторные пространства. – М.: Мир, 1971. – 359 с.
3. *Соболев С. Л.* Избранные вопросы теории функциональных пространств и обобщенных функций. – М.: Наука, 1989. – 254 с.
4. *Рудин У.* Функциональный анализ. – М.: Мир, 1975. – 443 с.
5. *Иосида К.* Функциональный анализ. – М.: Мир, 1967. – 624 с.

Получено 09.12.96,
после доработки — 30.09.99