УДК 512.546

И. В. Протасов (Нац. ун-т им. Т. Шевченко, Киев)

НЕРАЗЛОЖИМЫЕ ЛЕВОТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ГРУППЫ

The fact is proved that an irresolvable left topological group is of the first category. The pseudocharacter of the irresolvable left topological group G is countable provided that G is Abelian or its cardinality is nonmeasurable. Some other cardinal invariants of the irresolvable left topological group is also computed.

Доведено, що нерозкладна лівотопологічна група має першу категорію. Псевдохарактер нерозкладної лівотопологічної групи G зліченний за умови, що G абелева або її потужність невимірна. Обчислено також деякі інші кардинальні інваріанти нерозкладної лівотопологічної групи.

Топологическое пространство без изолированных точек называется *неразложимым,* если его нельзя представить в виде объединения двух непересекающихся плотных подмножеств. Топологическая группа называется *неразложимой,* если она неразложима как топологическое пространство. Начало исследованиям неразложимых топологических групп положено Комфортом и ван Миллом в работе [1]. Обзор дальнейших результатов в этом направлении содержится в [2]. Отметим лишь следующие три принципиальные теоремы. Неразложимая топологическая абелева группа содержит счетную открытую подгруппу периода 2 [3]. Существуют модели системы аксиом ZFC, в которых любая топологическая абелева группа разложима [4]. При некоторых дополнительных к ZFC теоретико-множественных предположениях неразложимые топологические группы существуют [1]. Эти результаты свидетельствуют о том, что неразложимость является крайне жестким ограничением для топологических групп.

Топология на группе, относительно которой непрерывны все левые сдвиги, называется *левоинвариантной.* Группа, снабженная левоинвариантной топологией, называется *левотопологической.* В отличие от топологических групп, неразложимые (и даже максимальные) левоинвариантные топологии можно определить на любой группе [5]. Топологическое пространство без изолированных точек называется *максимальным,* если в любой более сильной топологии оно имеет изолированные точки. *Дисперсионный характер* (т. е. минимальная мощность непустых открытых подмножеств) неразложимой левотопологической группы также может быть произвольным [5]. В связи с этим возникает вопрос: следуют ли из неразложимости левотопологической группы какие-либо дополнительные топологические свойства группы? Первое такое свойство было обнаружено в работе [6] при одном дополнительном ограничении на мощность группы. Неразложимая левотопологическая группа неизмеримой мощности имеет *первую категорию,* т. е. представима в виде объединения счетного семейства нигде не плотных множеств. Это же утверждение верно для неразложимых левотопологических абелевых групп произвольной мощности [4].

В данной работе доказано (теорема 1), что любая неразложимая левотопологическая группа имеет первую категорию. Если неразложимая левотопологическая группа абелева либо ее мощность неизмерима, то ее псевдохарактер счетен (следствие из теоремы 3, теорема 2). Вопрос о счетности псевдохарактера произвольной неразложимой левотопологической группы открыт. Получена оценка индекса ограниченности неразложимой левотопологической группы (теорема 4). Доказано (теорема 5), что существуют максимальные (и, следовательно, неразложимые) левотопологические группы произвольной мощности со счетным числом Суслина, в то время как число Суслина неразложимой топологической группы равно мощности группы (следствие 3 из теоремы 4). Наконец, доказано (теорема 6), что плотность неразложимой левотопологической группы равна мощности группы.

Все рассматриваемые топологии на группах предполагаются хаусдорфовыми. Мы пользуемся следующим равносильным определением неразложимости [7]: топологическое пространство X неразложимо, если существует ультрафильтр на X, имеющий базу из открытых подмножеств.

Теорема 1. *Пространство неразложимой левотопологической группы G имеет первую категорию.*

Доказательство. Группу G можно считать несчетной. Зафиксируем сходящийся к единице e группы G ультрафильтр p, имеющий базу из открытых подмножеств. Предположим вначале, что дисперсионный характер ультрафильтра p равен мощности γ группы G, т.е. $|A| = \gamma$ для всех $A \in p$. Представим группу G в виде объединения $G = \bigcup \{ G_\alpha : \alpha < \gamma \}$ трансфинитной цепочки ее собственных подгрупп так, чтобы выполнялись следующие условия:

1) $G_0 = \{ e \}$;

2) $G_\alpha \subset G_\beta$, если $\alpha < \beta$;

3) $G_\beta = \bigcup \{ G_\alpha : \alpha < \beta \}$, если β — предельный ординал;

4) $| G_\alpha | < \gamma$ для всех $\alpha < \gamma$.

Разложим подгруппу $G_{\alpha+1}$ на правые смежные классы по подгруппе G_α и выберем по одному представителю из каждого смежного класса. Представителем смежного класса G_α возьмем единицу e. Обозначим через X_α множество выбранных представителей.

Возьмем произвольный элемент $g \in G$, $g \neq e$. Выберем наименьшую подгруппу G_α, которая содержит элемент g. Из условия 3 следует, что $\alpha = \alpha_1 + + 1$ для некоторого ординала $\alpha_1 < \gamma$. Тогда $g \in G_{\alpha_1+1} \setminus G_{\alpha_1}$ и $g = g_1 x_{\alpha_1}$, $g_1 \in G_{\alpha_1}$, $x_{\alpha_1} \in X_{\alpha_1} \setminus \{ e \}$. Если $g_1 \neq e$, подберем индекс α_2, элементы $g_2 \in \in G_{\alpha_2}$, $x_{\alpha_2} \in X_{\alpha_2} \setminus \{ e \}$ так, чтобы $g_1 = g_2 x_{\alpha_2}$. Поскольку во вполне упорядоченном множестве нет бесконечных убывающих цепей, через конечное число $n(g)$ шагов получим представление элемента g в виде

$$g = x_{\alpha_{n(g)}} x_{\alpha_{n(g)-1}} \ldots x_{\alpha_2} x_{\alpha_1},$$

где $\alpha_{n(g)} < \alpha_{n(g)-1} < \ldots < \alpha_2 < \alpha_1$, $x_{\alpha_i} \in X_{\alpha_i} \setminus \{ e \}$.

Заметим, что такое представление однозначно, и положим

$$\nu_1(g) = \alpha_1, \quad \nu_2(g) = \alpha_2, \ldots, \ \nu_{n(g)}(g) = \alpha_{n(g)},$$

$$\nu_m(g) = 0 \quad \text{для всех } m \in \mathbb{N}, \ m > n(g).$$

Индукцией по натуральному аргументу k докажем следующее вспомогательное утверждение:

для каждого ординала $\alpha < \gamma$ найдется подмножество $P \in p$ такое, что $\nu_k(g) > \alpha$ для всех $g \in P$.

Так как дисперсионный характер ультрафильтра p равен γ, то для $k = 1$ утверждение вытекает из условия 4.

Предположим, что утверждение уже доказано для числа k, но неверно для числа $k+1$. Тогда найдутся индекс $\alpha < \gamma$ и открытое подмножество $Q \in p$ такие, что $\nu_{k+1}(g) \le \alpha$, $\nu_k(g) > \alpha$ для всех $g \in Q$. Зафиксируем произвольный элемент $a \in Q$ и выберем элемент $b \in Q$ так, чтобы $\nu_k(b) > \nu_1(a)$ и $ab \in Q$. Так как $a \in Q$, то $a = a_1 a_2$, где $\nu_1(a_1) \le \alpha < \nu_k(a_2)$. Поскольку $b \in Q$ и $\nu_k(b) > \nu_1(a)$, то $b = b_1 b_2$, где $\nu_1(b_1) \le \alpha$, $\nu_k(b_2) > \nu_1(a_2)$. Так как $ab \in Q$, то $ab = c_1 c_2$, где $\nu_1(c_1) \le \alpha$, $\nu_k(c_2) > \alpha$. Из этих соотношений следует $a_1 a_2 b_1 b_2 = c_1 b_2$. Значит, $a_1 a_2 b_1 = c_1$, $a_2 = a_1^{-1} c_1 b_1^{-1}$. Поскольку

$\nu_1(a_1) \leq \alpha$, $\nu_1(c_1) \leq \alpha$, $\nu_1(b_1) \leq \alpha$, то $\nu_1(a_2) \leq \alpha$, т. е. $a_2 \in G_{\alpha+1}$. Получено противоречие с тем, что $\nu_k(a_2) > \alpha$.

Положим $Y_m = \{g \in G : g \neq e,\ n(g) = m\}$. Тогда $G \setminus \{e\} = \bigcup \{Y_m : m \in \in \mathbb{N}\}$ и достаточно убедиться в том, что подмножество Y_m нигде не плотно в G для всех $m \in \mathbb{N}$.

Зафиксируем произвольное число m и элемент $y \in Y_m$. Согласно доказанному выше найдется такое открытое подмножество $V \in p$, что $\nu_{m+1}(g) > \nu_1(g)$ для всех $g \in V$. Так как $\nu_{m+1}(g) = \nu_{m+1}(yg)$, то $n(yg) > m$ для всех $g \in V$. Значит, $yV \cap Y_m = \varnothing$. Таким образом, в любой открытой окрестности $\mathcal{U}$ элемента y найдется непустое открытое подмножество $yV \cap \mathcal{U}$, которое не пересекается с Y_m.

Наконец, откажемся от принятого в начале доказательства ограничения на дисперсионный характер ультрафильтра p. Среди элементов ультрафильтра p выберем подмножество A наименьшей мощности γ. Подгруппа H, порожденная подмножеством A, открыта и ее мощность равна γ. Согласно доказанному выше H представима в виде объединения $H = \bigcup \{H_m : m \in \mathbb{N}\}$ счетного числа нигде не плотных подмножеств. Разложим группу G на левые смежные классы по подгруппе $H : G = \{gH : g \in X\}$. Положим $X_m = \bigcup \{gH_m : g \in X\}$. Тогда $G = \bigcup \{X_m : m \in \mathbb{N}\}$ — искомое разбиение группы G на нигде не плотные подмножества.

Топологическое пространство без изолированных точек называется *субмаксимальным,* если любое его плотное подмножество открыто. В субмаксимальном пространстве любое нигде не плотное подмножество замкнуто.

Следствие. *Субмаксимальная левотопологическая группа σ-дискретна, т. е. представима в виде объединения счетного семейства замкнутых дискретных подмножеств.*

***Замечание* 1.** Несколько модифицируя доказательство теоремы 1 и применяя теорему ван Дауэна – Ильянеса [8], можно доказать, что пространство $\aleph_0$-неразложимой левотопологической группы имеет первую категорию. Топологическое пространство без изолированных точек называется χ_0-*неразложимым,* если его нельзя представить в виде объединения счетного семейства попарно непересекающихся плотных множеств.

Далее нам понадобятся некоторые сведения о чех-стоуновой компактификации βG дискретной группы G. Элементами пространства βG являются все возможные ультрафильтры на группе G. Для подмножества $A \subset G$ положим $\overline{A} = \{p \in \beta G : A \in p\}$. Семейство подмножеств $\{\overline{A} : A \subset G\}$ образует открытую базу топологии βG. Для произвольного фильтра φ на группе G обозначим $\overline{\varphi} = \bigcap \{\overline{A} : A \in \varphi\}$. Тогда $\overline{\varphi}$ — замкнутое подпространство βG и каждое замкнутое подпространство βG представимо в таком виде при подходящем выборе фильтра φ. Отождествим группу G с подпространством главных ультрафильтров в βG, а подпространство свободных ультрафильтров $\beta G \setminus G$ обозначим G^*.

Продолжим операцию умножения с группы G на βG. Произведение ультрафильтров $p, q \in \beta G$ определим так:

$$A \in pq \Leftrightarrow \{g \in G : g^{-1}A \in q\} \in p.$$

Умножение на βG ассоциативно и G^* — замкнутая подполугруппа полугруппы βG. Для каждого ультрафильтра $q \in \beta G$ правый сдвиг $x \to xq$ является непрерывным отображением пространства βG. Таким образом, βG — компактная правотопологическая полугруппа.

Поскольку топология любой левотопологической группы G однозначно определяется фильтром τ окрестностей единицы, далее левотопологическую группу обозначаем парой (G, τ). Подмножество $\overline{\tau}$ является подполугруппой в чех-стоуновой компактификации βG дискретной группы G. Положим $\tau^* = \overline{\tau} \cap G^*$.

Пусть (G, τ) — левотопологическая группа несчетной мощности γ. Представим группу G в виде объединения $G = \bigcup \{ G_\alpha : \alpha < \gamma\}$ возрастающей трансфинитной цепочки подгрупп мощности $< \gamma$. Положим $G_\gamma = G$. Для произвольного элемента $g \in G$ обозначим $\nu(g) = \min\{\alpha < \gamma : g \in G_\alpha\}$. Для ультрафильтра $p \in \tau^*$ обозначим через $\nu(p)$ ультрафильтр на множестве γ с базой из подмножеств $\{\nu(P) : P \in p\}$. Естественно, мы отождествили кардинал γ с множеством ординалов меньшей мощности. Положим $\overline{\nu}(p) = \min\{\alpha \le \gamma : G_\alpha \in p\}$, $\overline{\nu}(\tau^*) = \{\overline{\nu}(p) : p \in \tau^*\}$.

Лемма 1. *Если множество $\overline{\nu}(\tau^*)$ бесконечно, то группа (G, τ) $\aleph_0$-разложима.*

Доказательство. Выберем возрастающую последовательность ординалов $\overline{\nu}_1 < \overline{\nu}_2 < \ldots < \overline{\nu}_n < \ldots$ из $\overline{\nu}(\tau^*)$. Пусть $\overline{\nu} = \min\{\alpha : \overline{\nu}_n < \alpha,\ n \in \mathbb{N}\}$. Разобьем множество $\mathbb{N}$ на счетное число бесконечных подмножеств $\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим

$$\Gamma_n = \{ (\overline{\nu}_k, \overline{\nu}_{k+1}] : k \in W_n\}, \quad A_n = \{g \in G : \nu(g) \in \Gamma_n\},$$

где $(\overline{\nu}_k, \overline{\nu}_{k+1}] = \{\alpha : \overline{\nu}_k < \alpha \le \overline{\nu}_{k+1}\}$. Очевидно, что $G_{\overline{\nu}} = \bigcup\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ и подмножества семейства $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ попарно не пересекаются. Покажем, что подмножество A_n плотно в подгруппе $G_{\overline{\nu}}$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Возьмем произвольный элемент $g \in G_{\overline{\nu}}$ и произвольную окрестность единицы $\mathcal{U} \in \tau$. Выберем номер $k \in W_n$ так, чтобы $\nu(g) < \overline{\nu}_k$. По определению подмножества $\overline{\nu}(\tau^*)$ найдется такой ультрафильтр $p \in \tau^*$, что $(\overline{\nu}_k, \overline{\nu}_{k+1}] \in \nu(P)$ для некоторого $P \in p$. Возьмем произвольный элемент $x \in P \cap \mathcal{U}$. Тогда $\nu(gx) = \nu(x)$. Так как $k < \nu(x) \le k+1$, то $gx \in A_n$ и $g\mathcal{U} \cap A_n \ne \varnothing$.

Поскольку группа (G, τ) содержит $\aleph_0$-разложимую подгруппу $G_{\overline{\nu}}$, то (G, τ) χ_0-разложима.

Лемма 2. *Пусть $\overline{\nu} \in \overline{\nu}(\tau^*)$ и $\overline{\nu}$ — предельный ординал. Если существуют такие ультрафильтры $p, q \in \tau^*$, что $\overline{\nu}(p) = \overline{\nu}(q)$ и $\nu(p) \ne \nu(q)$, то группа (G, τ) разложима.*

Доказательство. Разобьем множество $\overline{\nu}$ на два подмножества Γ_1, Γ_2 так, чтобы $\Gamma_1 \in \nu(p)$, $\Gamma_2 \in \nu(q)$. Положим $A_1 = \{g \in G : \nu(g) \in \Gamma_1\}$, $A_2 = \{g \in G : \nu(g) \in \Gamma_2\}$. Ясно, то $G_{\overline{\nu}} = A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2 = \varnothing$. Покажем, что подмножества A_1, A_2 плотны в подгруппе $G_{\overline{\nu}}$. Выберем произвольный элемент $g \in G_{\overline{\nu}}$ и окрестность единицы $\mathcal{U} \in \tau$. Так как $\overline{\nu}$ — предельный ординал, то $\nu(g) < \overline{\nu}$, $(\nu(g), \overline{\nu}) \in \nu(p)$. Пусть подмножество $P \in p$ такое, что $\nu(P) \subset \Gamma_1 \cup (\nu(g), \overline{\nu})$. Выберем произвольный элемент $x \in P \cap \mathcal{U}$. Тогда $\nu(gx) = \nu(x)$. Так как $\nu(x) \in \Gamma_1$, то $gx \in A_1$ и $g\mathcal{U} \cap A_1 \ne \varnothing$. Аналогично доказывается, что подмножество A_2 плотно в $G_{\overline{\nu}}$.

Поскольку группа (G, τ) содержит разложимую подгруппу $G_{\overline{\nu}}$, то (G, τ) разложима.

Напомним, что *псевдохарактер топологического пространства X в точке $x \in X$* — это наименьшая из мощностей семейств открытых подмножеств, пересечение которых равно $\{x\}$. Минимум псевдохарактеров по всем точкам $x \in X$ называется *псевдохарактером пространства* X. Псевдохарактер левотопологической группы совпадает с псевдохарактером в единице.

Теорема 2. *Если мощность неразложимой левотопологической группы* (G, τ) *неизмерима, то ее псевдохарактер счетен.*

Доказательство. Согласно лемме 1 множество $\overline{\nu}(\tau^*)$ конечно. Пусть $\overline{\nu}(\tau^*) = \{\overline{\nu}_1, \ldots, \overline{\nu}_n\}$, $\overline{\nu}_1 < \ldots < \overline{\nu}_n$. Не умаляя общности, можно считать, что $\overline{\nu}_n = \gamma$. Действительно, пусть p — ультрафильтр из τ^* с базой из открытых подмножеств. Выберем подмножество $P \in p$ наименьшей мощности и рассмотрим подгруппу G', порожденную подмножеством P. Тогда указанные условия выполняются для открытой подгруппы G'.

Согласно лемме 2 существует такой ультрафильтр μ на γ, что $\nu(p) = \mu$ для всех ультрафильтров $p \in \tau^*$, удовлетворяющих условию $\overline{\nu}(p) = \gamma$. Отсюда следует, что для любого $M \in \mu$ подмножество $G_{\overline{\nu}_{n-1}} \bigcup \{g \in G : \nu_g \in M\}$ открыто в (G, τ). Так как ультрафильтр μ свободен, а мощность группы G неизмерима, то μ не является счетно полным. Выберем семейство подмножеств $\{M_k \in \mu : k \in \mathbb{N}\}$ так, чтобы $\bigcap \{M_k : k \in \mathbb{N}\} = \varnothing$. Тогда подгруппа $G_{\overline{\nu}_{n-1}}$ является пересечением счетного набора открытых подмножеств $G_{\overline{\nu}_{n-1}} \bigcup$ $\bigcup \{g \in G : \nu(g) \in M_k\}$, $k \in \mathbb{N}$. Заметим, что мощность подгруппы $G_{\overline{\nu}_{n-1}}$ меньше γ, и повторим эти рассуждения для $G = G_{\overline{\nu}_{n-1}}$. Поскольку убывающая цепочка кардиналов конечна, через конечное число шагов получим дискретную подгруппу. Это означает, что единица группы G представлена в виде пересечения счетного набора открытых подмножеств.

Теорема 3. *Пусть* (G, τ) — $\aleph_0$*-неразложимая левотопологическая группа. Если группа* G *вложима в прямое произведение счетных групп, то* (G, τ) *имеет счетный псевдохарактер.*

Доказательство. Поскольку левоинвариантная топология подгруппы продолжается на группу, не умаляя общности, можно считать, что G есть прямое произведение $G = \otimes \{G_\alpha : \alpha < \gamma\}$ счетных групп G_α с единицами e_α. Каждый отличный от единицы элемент группы G однозначно записывается в виде

$$g = g_{\alpha_1} g_{\alpha_2} \ldots g_{\alpha_n}, \quad \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n,$$

где $g_{\alpha_i} \in G_{\alpha_i} \setminus \{e_{\alpha_i}\}$, $i = 1, \ldots, n$. Положим $\operatorname{supp} g = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, $\nu_1(g) = \alpha_1, \ldots, \nu_n(g) = \alpha_n$.

Обозначим $\mathfrak{D}_n = \{g \in G : |\operatorname{supp} g| = n\}$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{D}_0 = \{e\}$. Достаточно убедиться в том, что для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется такое счетное подмножество $X_n \subset \mathfrak{D}_n$, что подмножество $\mathfrak{D}_n \setminus X_n$ не касается единицы, т. е. $(\mathfrak{D}_n \setminus X_n) \bigcap \mathcal{U} = \varnothing$ для некоторой окрестности единицы $\mathcal{U} \in \tau$.

Зафиксируем произвольный ультрафильтр $p \in \tau^*$ такой, что $\mathfrak{D}_n \in p$ для некоторого $n \geq 1$. Рассмотрим ультрафильтры $\nu_1(p), \ldots, \nu_n(p)$ на γ с базами $\{\nu_1(P) : P \in p\}, \ldots, \{\nu_n(P) : P \in p\}$. Обозначим через $\overline{\nu}_1, \ldots, \overline{\nu}_n$ пределы этих ультрафильтров в отрезке ординалов $[0, \gamma]$. Положим $\overline{\nu}_0 = 0$. Покажем, что все ультрафильтры $\nu_1(p), \ldots, \nu_n(p)$ являются главными. Допустим противное и выберем наименьший номер k такой, что ультрафильтр $\nu_k(p)$ свободен. Далее, выберем наибольший номер m такой, что $\overline{\nu}_k = \ldots = \overline{\nu}_m$. Обозначим $d = m - k + 1$ и рассмотрим подмножества

$$A_i = \{g \in G : |\operatorname{supp} g| \bigcap [\overline{\nu}_{k-1}, \overline{\nu}_k) = \mathrm{id}\}, \quad i = 0, 1, \ldots .$$

Учитывая выбор чисел k, m, нетрудно убедиться в том, что подмножество A_i содержится в замыкании $\mathrm{cl}\, A_{i+1}$ подмножества A_{i+1} для всех $i = 0, 1, \ldots$. Разобьем множество $\mathbb{N} \cup \{0\}$ на счетное число бесконечных подмножеств $\mathbb{N} \cup \{0\} = \bigcup \{ W_j : j = 0, 1, \ldots \}$.

Положим

$$A = \bigcup \{ A_i : j = 0, 1, \ldots \}, \quad B_j = \bigcup \{ A_i : i \in W_j \}.$$

Тогда $B_0, B_1, \ldots$ — попарно непересекающиеся плотные подмножества в $\mathrm{cl}\, A$. Значит, $\mathrm{cl}\, A$ — $\aleph_0$-неразложимое подпространство левотопологической группы (G, τ). Поскольку пространство левотопологической группы однородно, то (G, τ) — $\aleph_0$-разложима, что противоречит условию теоремы.

Таким образом, мы доказали следующее утверждение: для каждого ультрафильтра $p \in \tau^*$ с условием $\mathfrak{D}_n \in p$ найдутся такие подмножество $P \in p$ и конечное подмножество $s(p) = \{ \overline{\nabla}_1, \ldots, \overline{\nabla}_n \}$, что $pr_\alpha g = e_\alpha$ для всех $\alpha \notin s(p)$ и всех $g \in P$. Предположим, что семейство подмножеств $H = \{ s(p) : p \in \tau^*, \mathfrak{D}_n \in p \}$ несчетно. Согласно лемме о пересечениях найдется счетное подсемейство $H' \subset H$, дизъюнктное по модулю пересечения. Пусть $h = |\bigcap H'|$, $d = n - h$. Тогда для любых натурального числа k и окрестности единицы $\mathcal{U} \in \tau$ найдется такой элемент $x \in \mathcal{U}$, что $kd \le |\mathrm{supp}\, x| \le h + kd$. Разобьем $\mathbb{N} \cup \{0\}$ на счетное число бесконечных подмножеств $\{ W_i : i = 0, 1, \ldots \}$ и положим

$$B_i = \bigcup \{ [2^j, 2^{j+1}), j \in W_i \}, \quad A_i = \{ g \in G : |\mathrm{supp}\, g| \in B_i \}.$$

Ясно, что $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \ne j$. Покажем, что каждое подмножество A_i плотно в (G, τ). Возьмем произвольный элемент $g \in G$ и окрестность единицы $\mathcal{U} \in \tau$. Выберем $x_i \in \mathcal{U}$, $j \in W_i$, такие, что

$$2^j + |\mathrm{supp}\, g| < |\mathrm{supp}\, x| < 2^{j+1} - |\mathrm{supp}\, g|.$$

Тогда $|\mathrm{supp}\, g| \in [2^j, 2^{j+1})$, следовательно, $gx \in A_i$ и $g\mathcal{U} \cap A_i \ne \varnothing$. Таким образом, мы получили противоречие с $\aleph_0$-неразложимостью группы (G, τ).

Итак, множество $H = \{ s(p) : p \in \tau^*, \mathfrak{D}_n \in p \}$ счетно. Положим $X_n = \{ g \in G : \mathrm{pr}_\alpha g \in e_\alpha$ для всех $\alpha \notin H \}$. Тогда $\mathfrak{D}_n \setminus X_n \notin p$ для любого ультрафильтра $p \in \tau^*$ с условием $\mathfrak{D}_n \in p$, что и требовалось доказать.

Следствие. *Абелева $\aleph_0$-неразложимая левотопологическая группа имеет счетный псевдохарактер.*

Вопрос 1. Счетен ли псевдохарактер любой неразложимой левотопологической группы? Счетность псевдохарактера субмаксимальной левотопологической группы вытекает непосредственно из следствия теоремы 1.

Индексом ограниченности левотопологической группы (G, τ) назовем наименьший кардинал $b(G, \tau)$ такой, что для любой окрестности единицы $\mathcal{U} \in \tau$ найдется подмножество $K \subset G$, удовлетворяющее условиям $G = K\mathcal{U}$, $|K| < b(G, \tau)$.

Теорема 4. *Пусть (G, τ) — неразложимая левотопологическая группа мощности κ. Тогда $b(G, \tau) > cf(\kappa)$, $cf(\kappa)$ — конфинальность кардинала κ.*

Доказательство. Согласно теореме 3 из [9] группу G можно разбить на два подмножества $G = A_1 \cup A_2$ так, чтобы $KA_1 \ne G$, $KA_2 \ne G$ для всех подмножеств $K \subset G$, $|K| < cf(\kappa)$. Так как группа (G, τ) неразложима, то одно из подмножеств разбиения, например A_1, имеет непустую внутренность. Выберем

$\mathcal{U} \in \tau$, $g \in G$ так, чтобы $g\mathcal{U} \subset A_1$. Допустим, что $F\mathcal{U} = G$ для некоторого подмножества $F \subset G$. Тогда $(Fg^{-1})g\mathcal{U} = G$, следовательно, $(Fg^{-1})A_1 = G$. Значит, $|Fg^{-1}| \geq cf(\kappa)$.

***Следствие* 1.** *Пусть* (G, τ) *— неразложимая левотопологическая группа регулярной мощности* κ. *Тогда* $b(G, \tau) = \kappa^+$, *где* κ^+ *— кардинал-последователь кардинала* κ.

Вопрос 2. Верно ли следствие 1 для неразложимых левотопологических групп сингулярной мощности?

***Следствие* 2.** *Пусть* κ *— кардинал,* (G, τ) *— неразложимая топологическая группа. Если* $b(G, \tau) \leq \kappa^+$, *то* $|G| \leq \kappa$.

Доказательство. Допустим противное и выберем произвольную подгруппу H из G мощности κ^+. Из [10] следует, что $b(H) \leq \kappa^+$. Поскольку κ^+ — регулярный кардинал, согласно следствию 1, $b(H) = \kappa^{++}$. Противоречие.

Число Суслина $c(X)$ топологического пространства X — это минимум мощностей семейств попарно непересекающихся открытых подмножеств из X.

***Следствие* 3.** *Число Суслина неразложимой топологической группы* (G, τ) *равно* $|G|$.

Доказательство. Допустим, что $c(G, \tau) = \kappa$. Из [10] следует, что $b(G, \tau) = \kappa^+$. Согласно следствию 2 $|G| \leq \kappa$. Обратное неравенство очевидно.

Следующая теорема показывает, в частности, что следствие 3 не верно для неразложимых левотопологических групп.

Теорема 5. *Для любого бесконечного кардинала* κ *существует максимальная левотопологическая группа мощности* κ *со счетным числом Суслина.*

Доказательство. Пусть G — бесконечная аменабельная группа мощности κ, μ — конечно аддитивная регулярная мера, определенная на всех подмножествах из G и инвариантная относительно левых сдвигов. Назовем фильтр φ на G фильтром положительной меры, если $\mu(F) > 0$ для всех $F \in \varphi$. Согласно лемме Цорна любой фильтр положительной меры можно дополнить до ультрафильтра положительной меры. Значит, множество $\mathfrak{D}$ ультрафильтров положительной меры на G непусто. Из определения умножения ультрафильтров непосредственно следует, что $\mathfrak{D}$ — левый идеал полугруппы βG. Выберем произвольный минимальный левый идеал $L \subset \mathfrak{D}$. Поскольку L замкнут, то L содержит некоторый идемпотент p. Положим $\varphi_p = \{P \cup \{e\} : P \in p\}$, e — единица группы G. Тогда (G, φ_p) — максимальная левотопологическая группа [5]. Так как каждое открытое подмножество из (G, φ_p) имеет положительную меру, то число Суслина группы (G, φ_p) счетно.

Вопрос 3. Можно ли на любой бесконечной группе ввести максимальную левоинвариантную топологию со счетным числом Суслина?

Из доказательства теоремы 5 следует, что такую топологию можно определить на любой бесконечной аменабельной (и, в частности, абелевой) группе.

Вопрос 4. Пусть G — бесконечная группа, p — идемпотент из минимального идеала полугруппы βG. Счетно ли число Суслина группы (G, φ_p)?

Плотность топологического пространства — это минимальная из мощностей его плотных подмножеств.

Теорема 6. *Плотность* $d(G, \tau)$ *неразложимой левотопологической группы* (G, τ) *равна мощности группы* G.

Доказательство. Выберем ультрафильтр $p \in \tau^*$ с базой из открытых подмножеств. Пусть X — плотное подмножество из G, $|X| = d(G, \tau)$. Очевидно, что $X \in p$. Если дисперсионный характер $\Delta(p)$ равен $|G|$, то $|X| = |G|$

и $d(G, \tau) = |G|$. Предположим, что $\Delta(p) < |G|$. Зафиксируем подмножество $P \in p$, $|P| < |G|$ и рассмотрим подгруппу H, алгебраически порожденную подмножеством P. Тогда H — открытая подгруппа, $|H| = |P|$ и, следовательно, индекс H в G равен $|G|$. Разобьем группу G на левые смежные классы по подгруппе H. Так как каждый смежный класс открыт и их число равно $|G|$, то $d(G, \tau) = |G|$.

Вопрос 5. Верно ли, что плотность любого неразложимого однородного пространства равна его мощности?

1. *Comfort W. W., van Mill J.* Groups with only resolvable group topologies // Proc. Amer. Math. Soc. – 1994. – **120**, № 3. – P. 687 – 696.
2. *Протасов И. В.* Разложимость групп // Мат. студ. – 1998. – **9**, № 2. – С. 130 – 148.
3. *Протасов И. В.* Разбиения прямых произведений групп // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 10. – С. 1385 – 1395.
4. *Протасов И. В.* Неразложимые топологии на группах // Там же. – 1998. – **50**, № 12. – С. 1646 – 1655.
5. *Протасов И. В.* Максимальные топологии на группах // Сиб. мат. журн. – 1998. – **39**, № 6. – С. 1368 – 1381.
6. *Alas O. T., Protasov I. V., Tkačenko M. G., Tkachuk V. V., Wilson R. G., Yaschenko I. V.* Almost all submaximal groups are paracompact and σ-discrete // Fund. math. – 1998. – **156**. – P. 241 – 260.
7. *Елькин Е. Г.* Ультрафильтры и неразложимые пространства // Вестн. Моск. ун-та. – 1969. – № 5. – С. 51 – 56.
8. *Illanes A.* Finite and ω-resolvability // Proc. Amer. Math. Soc. – 1996. – **124**, № 4. – P. 1243 – 1246.
9. *Протасов И. В.* Разложимость τ-ограниченных групп // Мат. студ. – 1995. – Вып. 5. – С. 17 – 20.
10. *Гуран И. И.* О топологических группах, близких к финально компактным // Докл. АН СССР. – 1981. – **256**, № 6. – С. 1305 – 1307.

Получено 04.02.98