УДК 519.41/47

Н. С. Черников (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

О КОНЕЧНЫХ РАЗРЕШИМЫХ ГРУППАХ, РАЗЛОЖИМЫХ В ПРОИЗВЕДЕНИЕ ДВУХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ПОДГРУПП *

A number of results are obtained concerning various properties of a finite solvable group $G = AB$ with nilpotent subgroups-factors A and B.

Встановлено ряд результатів щодо різних властивостей скінченної розв'язної групи $G = AB$ із нільпотентними підгрупами – множниками A і B.

Согласно известной теореме Кегеля – Виландта [1, 2], произвольная конечная группа, представимая в виде произведения двух нильпотентных подгрупп, разрешима. Свойства и строение конечных разрешимых групп, представимых в виде такого произведения, исследовались во многих работах (см., например, [3 – 8]). Настоящая работа также относится к этой проблематике, и ее основными результатами являются теоремы 1 – 4. Их доказательствам предпослан ряд предложений, многие из которых представляют самостоятельный интерес.

Ниже $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел, $p, q \in \mathbb{P}$. $\prod$ — знак произведения. Пусть G — группа и $X \subseteq G$, $X \neq \varnothing$. Запись $X \leq G$ означает, что X является подгруппой G. Далее, $\langle X^G \rangle = \langle X^g \mid g \in G \rangle$, $X_G = \bigcap_{g \in G} X^g$ и для $n \in \mathbb{N}$ $X^n = \langle x^n \mid x \in X \rangle$. Для произвольных p и $\sigma \subseteq \mathbb{P}$ G_p и G_σ всегда обозначают силовские соответственно p- и σ-подгруппы группы G. Если G конечна, то $\Phi(G)$ и $F(G)$ — ее подгруппы Фраттини и Фиттинга, $F_0(G) = 1$ и для $i \in \mathbb{N}$ $F_i(G) = F(G/F_{i-1}(G))$. Если G конечна и разрешима, то $l_{\mathfrak{N}}(G)$ и $l_p(G)$ — соответственно ее нильпотентная и p-длина. В случае, когда $G \neq 1$, $l_{\mathfrak{N}}(G)$ совпадает с минимумом длин субнормальных рядов с нильпотентными факторами группы G, и в случае, когда $G = 1$, $l_{\mathfrak{N}}(G) = 0$. Для произвольной подгруппы $X \trianglelefteq G$ $l_{\mathfrak{N}}(X)$, как известно, совпадает с наименьшим i, при котором $X \subseteq F_i(G)$. Напомним, что $l_p(G)$ совпадает с минимумом числа отличных от единицы p-факторов, взятым по всем нормальным рядам с p- и p'-факторами группы G.

Другие встречающиеся в работе обозначения стандартны.

Напомним, что числом Ферма называется простое число вида $2^k + 1$.

Теорема 1. *Пусть $G = AB$ — конечная разрешимая группа, A и B — ее нильпотентные подгруппы, $K/\Phi(G) = Z(G/\Phi(G))$ и φ — гомоморфизм G на G/K; H — некоторая холлова подгруппа группы A, s — ступень разрешимости H^φ и для произвольного p p^{e_p} — p-экспонента H^φ. Пусть в случае, когда p — число Ферма и B_2^φ неабелева, $t_p = 2e_p$, в противном случае $t_p = e_p$; t — наибольшее из чисел t_p и $m = \min(s, t)$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) $H \subseteq F_{2m}(G)$ *и* $HF_{2m-1}(G) \trianglelefteq G$, *если* $m \neq 0$;

2) $l_{\mathfrak{N}}(G) \leq 2m + 1$, *если* $H = A$.

(Если $m = 0$, то $H \subseteq K \subseteq F(G)$).

Из теоремы 1 непосредственно вытекают, например, следующие предложения.

---

*Выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00462).

***Следствие* 1.** *Пусть в теореме* 1 m^* *определяется для* B *так же, как* m *для* H, *и* $H = A$; $n = \min(m, m^*)$. *Тогда* $l_{\mathfrak{N}}(G) \le 2n + 1$ *и в случае, когда* $m = m^*$, $l_{\mathfrak{N}}(G) \le \max(2n, 1)$.

***Следствие* 2** ([7]; см. еще [9], теорема 2.5.9). *Пусть* $G = AB$ — *конечная разрешимая группа,* A *абелева и* B *нильпотентна. Тогда* $AF(G) \trianglelefteq G$ *и* $l_{\mathfrak{N}}(G) \le 3$.

Ниже S_4 — симметрическая группа 4-й степени.

Теорема 2. *Пусть* $G = AB$ — *конечная разрешимая группа,* A *и* B — *ее нильпотентные подгруппы,* $K/\Phi(G) = Z(G/\Phi(G))$ *и* φ — *гомоморфизм* G *на* G/K; $U \trianglelefteq A$ — p-*подгруппа. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если* U^{φ} *абелева, то* $U \subseteq F_6(G)$;

2) *если* U^{φ} *абелева, то* $U \subseteq F_4(G)$ *в каждом из случаев*: а) $p \ne 2$; б) $3 \nmid |B^{\varphi}|$; в) G^{φ} *не имеет секции, изоморфной* S_4;

3) $U \subseteq F_2(G)$ *в каждом из случаев*: а) $U^{\varphi} \subseteq Z(A^{\varphi})$; б) $p \ne 2, 3$ *и* U^{φ} *нильпотентна ступени* $\le p - 3$ (*или, хотя бы,* $[A_p^{\varphi}, \underbrace{U^{\varphi}, \ldots, U^{\varphi}}_{p-2 \text{ раза}}] = 1$); в) $p \ne 2$, U^{φ} *нильпотентна ступени* $\le p - 2$ (*или, хотя бы,* $[A_p^{\varphi}, \underbrace{U^{\varphi}, \ldots, U^{\varphi}}_{p-1 \text{ раз}}] = 1$) *и при этом или* p *не является числом Ферма, или* B_2^{φ} *абелева;*

4) *если* $p = 2$ *и* U^{φ} *абелева, то* $U^2 \subseteq F_2(G)$;

5) *если* $p = 3$ *и* $(U')^{\varphi}$ *абелева (или, хотя бы,* $[A_p^{\varphi}, U^{\varphi}, U^{\varphi}, (U')^{\varphi}] = 1$), *то* $U' \subseteq F_2(G)$.

Из теоремы 2 непосредственно вытекает, например, следующее предложение.

***Следствие* 3.** *Пусть* $G = AB$ — *конечная разрешимая группа,* A *и* B — *ее нильпотентные подгруппы,* $K/\Phi(G) = Z(G/\Phi(G))$ *и* φ — *гомоморфизм* G *на* G/K; $N \trianglelefteq A$ *и* s — *ступень разрешимости* N^{φ}. *Тогда* $N \subseteq F_{6s}(G)$.

Напомним, что числом Мерсенна называется простое число вида $2^k - 1$.

Теорема 3. *Пусть* $G = AB$ — *конечная разрешимая группа,* A *и* B — *ее нильпотентные подгруппы,* $K/\Phi(G) = Z(G/\Phi(G))$ *и* φ — *гомоморфизм* G *на* G/K; p^e — p-*экспонента группы* A^{φ} *для некоторого* p *и* $e \ne 0$. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) p-*экспоненты групп* $\langle A_p^G \rangle F_4(G)/F_4(G)$ *и* $AF_4(G)/F_4(G)$ *не превышают числа* p^{e-1};

2) p-*экспоненты групп* $\langle A_p^G \rangle F_2(G)/F_2(G)$ *и* $AF_2(G)/F_2(G)$ *не превышают числа* p^{e-1} *в каждом из случаев*: а) p *нечетно и не является числом Ферма;* б) p *нечетно и* B_2^{φ} *абелева;* в) $p = 2$ *и для любого числа Мерсенна* q B_q^{φ} *абелева.*

Теорема 4. *Пусть* $G = AB$ — *конечная разрешимая группа,* A *и* B — *ее нильпотентные подгруппы,* $K/\Phi(G) = Z(G/\Phi(G))$ *и* φ — *гомоморфизм* G *на* G/K; p^e *и* $p^{e^*} \le p^e$ — p-*экспоненты групп* A^{φ} *и* B^{φ}. *Пусть* $e \ne 0$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *p-экспонента группы $G/F_4(G)$ не превышает числа* p^{e-1};

2) *p-экспонента группы $G/F_2(G)$ не превышает числа p^{e-1} в каждом из случаев*: а) *p нечетно и не является числом Ферма;* б) *p нечетно, $e > e^*$ и подгруппа B_2^{φ} абелева;* в) *p нечетно, $e = e^*$ и подгруппы A_2^{φ}, B_2^{φ} абелевы;* г) *$p = 2$, $e > e^*$ и для любого числа q Мерсенна B_q^{φ} абелева;* д) *$p = 2$, $e = e^*$ и для любого числа q Мерсенна A_q^{φ} и B_q^{φ} абелевы.*

Лемма 1. *Пусть $G = AB$ — группа, $A, B \le G$; $N_\iota \trianglelefteq G$ и $A \cap B \subseteq N_\iota = (A \cap N_\iota)(B \cap N_\iota)$, $\iota \in I$; $S \le B$ и $ASN_\iota \le G$, $\iota \in I$. Тогда*

$$\bigcap_{\iota\in I} ASN_\iota = A\left(\bigcap_{\iota\in I} S(B\cap N_\iota)\right) = A\left(\bigcap_{\iota\in I} SN_\iota\right).$$

Доказательство. Очевидно, $A\left(\bigcap_{\iota\in I} SN_\iota\right) \subseteq \bigcap_{\iota\in I} ASN_\iota$. Далее, используя лемму Дедекинда (см., например, [10], лемма 1.7) и учитывая, что $A \cap B \subseteq B \cap N_\iota$, $\iota \in I$, последовательно получаем

$$ASN_\iota \cap B = A(A\cap N_\iota)(B\cap N_\iota)S \cap B = A(B\cap N_\iota)S\cap B = (A\cap B)(B\cap N_\iota)S = (B\cap N_\iota)S,$$

$$\bigcap_{\iota\in I} ASN_\iota = AB\cap\left(\bigcap_{\iota\in I} ASN_\iota\right) = A\left(B\cap\left(\bigcap_{\iota\in I} ASN_\iota\right)\right) = A\left(\bigcap_{\iota\in I}(B\cap SN_\iota)\right) = A\left(\bigcap_{\iota\in I} S(B\cap N_\iota)\right) \subseteq A\left(\bigcap_{\iota\in I} SN_\iota\right).$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $G = A\cdot B$ — группа, $A, B \le G$; $A \cap B = 1$ и B периодическая; N_ι, $\iota \in I$, — такие же, как в лемме 1, и $\bigcap_{\iota\in I} N_\iota = 1$; S — силовская σ-подгруппа группы B для некоторого множества σ простых чисел, и $ASN_\iota \le G$, $\iota \in I$. Тогда $AS \le G$.*

Доказательство. Можно считать, что $S \ne 1$. Пусть $T = \bigcap_{\iota\in I} S(B\cap N_\iota)$, $g \in T$ и $|g| \in \mathbb{P}$. В силу леммы 1 $AT \le G$. Далее, найдется $\alpha \in I$, при котором $\langle g\rangle \cap (T\cap N_\alpha) = 1$. Так как $S \le T \le S(B\cap N_\alpha)$, то в силу леммы Дедекинда $T = S(T\cap N_\alpha)$. Следовательно, $T/T\cap N_\alpha \simeq S/S\cap N_\alpha$ и, значит, $T/T\cap N_\alpha$ — σ-группа. Поэтому $|g| \in \sigma$. Таким образом, T — σ-группа. Следовательно, $T = S$ и $AT = AS$.

Лемма 3. *Пусть $G = AB$ — группа, A и B — ее периодические подгруппы и $A \cap B = 1$; N_ι, $\iota \in I$, — такие же, как в лемме 1, и $\bigcap_{\iota\in I} N_\iota = 1$; P и S — силовские подгруппы по некоторым множествам π и σ простых чисел соответственно групп A и B, и $ASN_\iota, BPN_\iota \le G$, $\iota \in I$. Тогда $PS = SP \le G$.*

Доказательство. Действительно, в силу леммы 2 $AS \cap BP \le G$ и согласно лемме Дедекинда $AS \cap BP = (AS\cap B)P = (A\cap B)SP = SP = PS$.

Лемма 4 ([11], лемма 4). *Пусть N_ι, $\iota \in I$, — такие нормальные делители группы $G = AB$, факторизуемой двумя подгруппами A и B, что при каждом $\iota \in I$ подгруппы AN_ι/N_ι и BN_ι/N_ι фактор-группы G/N_ι периодические и $\pi(AN_\iota/N_\iota) \cap \pi(BN_\iota/N_\iota) = \varnothing$. Тогда для $N = \bigcap_{\iota\in I} N_\iota$*

$$A \cap B \subseteq N = (N \cap A)(N \cap B).$$

Лемма 5. *Пусть* $G = AB$ — *группа,* $A, B \leq G$; $N_\iota \trianglelefteq G$, $\iota \in I$, *и* $N_\iota = (N_\iota \cap A)(N_\iota \cap B)$, $\iota \in I$. *Пусть* $N = \prod_{\iota \in I} N_\iota$ *и* $A^* = \prod_{\iota \in I}(N_\iota \cap A)$, $B^* = \prod_{\iota \in I}(N_\iota \cap B)$. *Тогда* $N = A^* B^*$.

Доказательство. Действительно, для произвольных $\iota_1, \iota_2, \ldots, \iota_m \in I$

$$N_{\iota_1} N_{\iota_2} \ldots N_{\iota_m} = (N_{\iota_1} \cap A)(N_{\iota_1} \cap B) N_{\iota_2} \ldots N_{\iota_m} = (N_{\iota_1} \cap A) N_{\iota_2} \ldots N_{\iota_m} (N_{\iota_1} \cap B) =$$
$$= (N_{\iota_1} \cap A)(N_{\iota_2} \cap A) \ldots N_{\iota_m} (N_{\iota_2} \cap B)(N_{\iota_1} \cap B) =$$
$$= (N_{\iota_1} \cap A)(N_{\iota_2} \cap A) \ldots N_{\iota_m} (N_{\iota_1} \cap B)(N_{\iota_2} \cap B) = \ldots$$
$$\ldots = (N_{\iota_1} \cap A)(N_{\iota_2} \cap A) \ldots (N_{\iota_m} \cap A)(N_{\iota_1} \cap B)(N_{\iota_2} \cap B) \ldots (N_{\iota_m} \cap B) \subseteq A^* B^*$$

и, значит, $N = A^* B^*$.

Лемма 6. *Пусть* G — *конечная разрешимая ненильпотентная группа;* $N \trianglelefteq G$, $N \subseteq F(G)$ и $F(G/N) = F(G)/N$; $K \trianglelefteq G$ *и* $K \nsubseteq F(G)$. *Тогда*

$$l_{\mathfrak{N}}(K) = l_{\mathfrak{N}}(KN/N). \tag{1}$$

Доказательство. Действительно, нетрудно видеть, что

$$F_i(G/N) = F_i(G)/N, \; F_i(K) = K \cap F_i(G),$$
$$F_i(KN/N) = KN/N \cap F_i(G/N), \; i \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Используя (2) и лемму Дедекинда, получаем

$$F_i(KN/N) = (KN \cap F_i(G))/N = (K \cap F_i(G))N/N = F_i(K)N/N, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Следовательно,

$$F_{i+1}(KN/N)/F_i(KN/N) = (F_{i+1}(K)N/N)/(F_i(K)N/N) \simeq$$
$$\simeq F_{i+1}(K)N/F_i(K)N \simeq F_{i+1}(K)/F_i(K)(F_{i+1}(K) \cap N) =$$
$$= F_{i+1}(K)/F_i(K), \quad i \in \mathbb{N}.$$

Тогда, поскольку, очевидно, $t = l_{\mathfrak{N}}(K) > 1$,

$$F_t(KN/N)/F_{t-1}(KN/N) \simeq F_t(K)/F_{t-1}(K) \neq 1.$$

Следовательно, имеет место (1).

Предложение 1. *Пусть* $G = AB \neq 1$ — *конечная разрешимая группа,* A *и* B — *ее нильпотентные подгруппы;* $M_i/\Phi(G)$, $i = 1, \ldots, n$, — *все минимальные нормальные делители группы* $G/\Phi(G)$ *и* $K/\Phi(G) = Z(G/\Phi(G))$; $D_i/\Phi(G)$ — *любая максимальная подгруппа группы* $G/\Phi(G)$, *для которой* $(M_i/\Phi(G)) \cap (D_i/\Phi(G)) = 1$, *и* $N_i/\Phi(G) = (D_i/\Phi(G))_{G/\Phi(G)}$, φ_i — *гомоморфизм* G *на* G/N_i, $i = 1, \ldots, n$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *Для каждого* i $G^{\varphi_i} = M_i^{\varphi_i} \leftthreetimes D_i^{\varphi_i}$, $D_i^{\varphi_i}$ — *максимальная подгруппа группы* G^{φ_i}, $\Phi(G^{\varphi_i}) = 1$; $M_i^{\varphi_i}$ *является единственным минимальным нормальным делителем группы* G^{φ_i} *и совпадает со своим централизатором* C_i *в ней, и* $M_i^{\varphi_i} = F(G^{\varphi_i})$.

2. *Если* $M_i/\Phi(G) \nsubseteq K/F(G)$, то $Z(G^{\varphi_i}) = 1$, $A^{\varphi_i} \neq 1$, $B^{\varphi_i} \neq 1$, $\pi(A^{\varphi_i}) \cap \pi(B^{\varphi_i}) = \varnothing$ *и* $M_i^{\varphi_i} \subseteq A^{\varphi_i}$ *либо* $M_i^{\varphi_i} \subseteq B^{\varphi_i}$; *та из подгрупп* A^{φ_i}, B^{φ_i}, *которая содержит* $M_i^{\varphi_i}$, *примарна. Если* $M_i/\Phi(G) \subseteq K/\Phi(G)$, *то* $|G^{\varphi_i}| \in \mathbb{P}$.

3. $\Phi(G) = \bigcap_{i=1}^{n} N_i$. *Если* $G \neq K$, *то* K *совпадает с пересечением подгрупп* N_i *по всем* i, *при которых* $M_i/\Phi(G) \nsubseteq K/\Phi(G)$.

4. $A \cap B \subseteq K = (K \cap A)(K \cap B) = KA \cap KB$.

5. *При любом* p
$$[\langle A_p^G\rangle, \langle B_p^G\rangle] \subseteq \Phi(G)_p. \tag{3}$$

6. *При любом* p *для произвольной* $L \trianglelefteq G$, $L \supseteq \Phi(G)_p$ p*-экспонента группы* G/L *равна наибольшей из* p*-экспонент подгрупп* AL/L *и* BL/L.

7. *При любом* $\sigma \supseteq \pi(A) \cap \pi(B)$ $\Phi(G)\sigma$ *есть пересечение некоторых* $R \trianglelefteq G$, *для каждой из которых хотя бы одна из групп* AR/R, BR/R *примарна и в случае, когда* $|G{:}R| \notin \mathbb{P}$, $\pi(AR/R) \cap \pi(BR/R) = \varnothing$.

Доказательство. 1. Понятно, что $G^{\varphi_i} = M_i^{\varphi_i} \leftthreetimes D_i^{\varphi_i}$, $D_i^{\varphi_i}$ — максимальная подгруппа группы G^{φ_i} и $D_i^{\varphi_i}$ не содержит отличных от единицы инвариантных в G^{φ_i} подгрупп. Так как, очевидно, $C_i \cap D_i^{\varphi_i} \trianglelefteq G^{\varphi_i}$, то $C_i \cap D_i^{\varphi_i} = 1$. Поскольку G^{φ_i} разрешима, то $M_i^{\varphi_i} \subseteq C_i$. Следовательно, в силу леммы С. Н. Черникова (см., например, [10], лемма 1.8)
$$C_i = M_i^{\varphi_i}(C_i \cap D_i^{\varphi_i}) = M_i^{\varphi_i}.$$
Поэтому $M_i^{\varphi_i}$ — единственный минимальный нормальный делитель группы G^{φ_i}.

Пусть $\Phi(G^{\varphi_i}) \neq 1$. Тогда ввиду единственности $M_i^{\varphi_i}$ $\Phi(G^{\varphi_i}) \supseteq M_i^{\varphi_i}$. Но в таком случае $\Phi(G^{\varphi_i}) \nsubseteq D_i^{\varphi_i}$. Противоречие. Итак, $\Phi(G^{\varphi_i}) = 1$. Так как $[F(G^{\varphi_i}), M_i^{\varphi_i}] \trianglelefteq G^{\varphi_i}$ и $[F(G^{\varphi_i}), M_i^{\varphi_i}] \neq M_i^{\varphi_i}$, то ввиду минимальности $M_i^{\varphi_i}$ $F(G^{\varphi_i}) \subseteq C_i$ и, значит, $F(G^{\varphi_i}) = M_i^{\varphi_i}$.

2. Пусть $M_i/\Phi(G) \nsubseteq K/F(G)$. Тогда $M_i^{\varphi_i} \neq G^{\varphi_i}$. Поскольку $M_i^{\varphi_i}$ — минимальный нормальный делитель группы $G^{\varphi_i} = A^{\varphi_i} B^{\varphi_i}$ и $M_i^{\varphi_i} = C_i$ (см. утверждение 1), а подгруппы A^{φ_i} и B^{φ_i} нильпотентны, то в силу леммы Ф. Гросса ([4]; см. еще [9], лемма 2.5.2) $M_i^{\varphi_i} \subseteq A^{\varphi_i}$ или $M_i^{\varphi_i} \subseteq B^{\varphi_i}$, и та из подгрупп A^{φ_i}, B^{φ_i}, которая содержит $M_i^{\varphi_i}$, является p-группой, а другая — p'-группой. Поскольку $M_i^{\varphi_i} = C_i \neq G^{\varphi_i}$, то $Z(G^{\varphi_i}) \subsetneqq M_i^{\varphi_i}$ и, значит, $Z(G^{\varphi_i}) = 1$. Поэтому G^{φ_i} ненильпотентна и, следовательно, $A^{\varphi_i} \neq 1$, $B^{\varphi_i} \neq 1$. Доказательство последнего заключения утверждения 2 очевидно.

3. Так как $\bigcap_{i=1}^{n} N_i/\Phi(G)$ не содержит минимальных нормальных делителей группы $G/\Phi(G)$, то $\bigcap_{i=1}^{n} N_i = \Phi(G)$. Пусть в случае, когда хотя бы для одного i $M_i/\Phi(G) \nsubseteq K/\Phi(G)$, L — пересечение подгрупп N_i по всем таким i; в случае, когда $M_i/\Phi(G) \subseteq K/\Phi(G)$, $i = 1, \ldots, n$, $L = G$. Так как при каждом таком i $Z(G/N_i) = 1$ (см. утверждение 2), то, очевидно, $K/\Phi(G) \subseteq L/\Phi(G)$.

Покажем, что $K/\Phi(G) = L/\Phi(G)$. Это так, если $L/\Phi(G) = 1$. Пусть $L/\Phi(G) \neq 1$ и D — пересечение подгрупп D_i по всем i, при которых $M_i/\Phi(G) \subseteq L/\Phi(G)$. Поскольку, очевидно, для каждого такого i $G/\Phi(G) =$

$= (M_i/\Phi(G)) \times (D_i/\Phi(G))$, то $D/\Phi(G) \trianglelefteq G/\Phi(G)$ и $[G/\Phi(G), L/\Phi(G)] \subseteq \subseteq D/\Phi(G)$. Но $D/\Phi(G) \bigcap L/\Phi(G)$ не содержит минимальных нормальных делителей группы $G/\Phi(G)$ и, значит, $D/\Phi(G) \bigcap L/\Phi(G) = 1$. Следовательно, $[G/\Phi(G), L/\Phi(G)] = 1$, т. е. $L/\Phi(G) \subseteq K/\Phi(G)$. Таким образом, $L/\Phi(G) = K/\Phi(G)$. В силу этого справедливо утверждение 3.

Справедливость утверждения 4 вытекает из утверждений 2 и 3, леммы 4 и леммы 1.30 [10].

5. Согласно утверждению 2 при произвольном i в случае, когда G^{φ_i} неабелева, $A_p^{\varphi_i} = 1$ или $B_p^{\varphi_i} = 1$. Следовательно, $[\langle A_p^G \rangle^{\varphi_i}, \langle B_p^G \rangle^{\varphi_i}] = 1$, $i = 1, \ldots, n$, и, значит, $[\langle A_p^G \rangle, \langle B_p^G \rangle] \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} N_i = \Phi(G)$ (см. утверждение 3). Но ввиду леммы 2.5.1 [9] $[\langle A_p^G \rangle, \langle B_p^G \rangle] \subseteq O_p(G)$. Следовательно, выполняется (3).

6. Так как согласно утверждению 5 $[A_pL/L, B_pL/L] = 1$, то, очевидно, $(A_pL/L)(B_pL/L)$ — силовская p-подгруппа группы G/L $(= (AL/L)(BL/L))$, и ее p-экспонента равна максимальной из p-экспонент подгрупп A_pL/L, B_pL/L. Поэтому в силу теоремы Силова справедливо утверждение 6.

Утверждение 7 непосредственно вытекает из утверждения 2 и следствия 1 [11].

Предложение 2. *Пусть $G = AB$ — конечная разрешимая группа, A и B — ее нильпотентные подгруппы; $K/\Phi(G) = Z(G/\Phi(G))$ и φ — гомоморфизм G на G/K; σ — некоторое множество простых чисел и U — σ-подгруппа группы A. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *В случае, когда $\sigma = \{p\}$,*

$$\langle U^G \rangle^{\varphi} = \left(\langle U^G \rangle^{\varphi} \cap A_p^{\varphi}\right)\left(\langle U^G \rangle^{\varphi} \cap B_{p'}^{\varphi}\right) \quad и \quad \langle U^G \rangle^{\varphi} \cap \langle B_p^G \rangle^{\varphi} = 1. \tag{4}$$

В этом случае p'-факторы произвольного субнормального ряда группы $\langle U^G \rangle^{\varphi}$ нильпотентны и изоморфны секциям группы $B_{p'}^{\varphi}$.

2. *Выполняется соотношение*

$$\langle U^G \rangle^{\varphi} = \left(\langle U^G \rangle^{\varphi} \cap A_{\sigma}^{\varphi}\right)\left(\langle U^G \rangle^{\varphi} \cap B^{\varphi}\right). \tag{5}$$

3. *Если $U \not\subseteq K$, то*

$$l_{\mathfrak{N}}(\langle U^G \rangle) = l_{\mathfrak{N}}(\langle U^G \rangle^{\varphi}) \leq 2\max\left(l_p(\langle U_p^G \rangle^{\varphi}) \mid p \in \sigma\right). \tag{6}$$

4. *Если $A_{\sigma} \not\subseteq F(G)$, то при минимальном t, для которого $A_{\sigma} \subseteq F_t(G)$,*

$$\langle A_{\sigma}^G \rangle F_{t-1}(G) = A_{\sigma} F_{t-1}(G) \trianglelefteq G.$$

Замечания. **1.** В силу утверждения 1 $A_p^{\varphi} \cap \langle U_p^G \rangle^{\varphi}$ — силовская p-подгруппа группы $\langle U_p^G \rangle^{\varphi}$. **2.** В случае, когда $U \subseteq K$, $l_{\mathfrak{N}}(\langle U^G \rangle) \leq 1$. **3.** Понятно, что при условии утверждения 4 $t = l_{\mathfrak{N}}(\langle A_{\sigma}^G \rangle)$.

Доказательство. 1. Пусть $\sigma = \{p\}$. В силу утверждений 2 и 3 предложения 1 пересечение всех $N \trianglelefteq G^{\varphi}$, для которых $\pi(A^{\varphi}N/N) \cap \pi(B^{\varphi}N/N) = \varnothing$, равно единице. Так как $U^{\varphi}N/N = 1$ или $B_p^{\varphi}N/N = 1$, то $\langle U^G \rangle^{\varphi}N/N \cap \langle B_p^G \rangle N/N = 1$. Поэтому выполняется второе из соотношений (4). Далее, вследствие леммы Виландта – Хупперта (см., например, [10], лемма 1.37) $(A_p^{\varphi}N/N)(B^{\varphi}N/N)$, $(A_p^{\varphi}N/N)(B_{p'}^{\varphi}N/N) \leq G^{\varphi}/N$ и, значит, в силу лемм 2 и 3.

$A_p^{\varphi}B^{\varphi}$, $A_p^{\varphi}B_{p'}^{\varphi} \le G^{\varphi}$. Поскольку $G^{\varphi} = A^{\varphi}(A_p^{\varphi}B^{\varphi})$ и $A_p^{\varphi} \trianglelefteq A^{\varphi}$, то вследствие леммы Чунихина (см., например, [10], лемма 1.36) $\langle A_p^G\rangle^{\varphi} = \langle A_p^{A_pB}\rangle^{\varphi}$. Так как $[B_p^{\varphi}, B_{p'}^{\varphi}] = 1$ и в силу утверждения 5 предложения 1 $[A_p^{\varphi}, B_p^{\varphi}] = 1$, то, очевидно, $A_p^{\varphi}B_{p'}^{\varphi} \trianglelefteq A_p^{\varphi}B^{\varphi}$. Следовательно, $\langle A_p^{A_pB}\rangle^{\varphi} \subseteq A_p^{\varphi}B_{p'}^{\varphi}$. Поэтому в силу леммы С. Н. Черникова $\langle A_p^G\rangle^{\varphi} = A_p^{\varphi}(\langle A_p^G\rangle^{\varphi} \cap B_{p'}^{\varphi})$. Таким образом, справедливы первое из соотношений (4), а также последнее заключение настоящего предложения (например, в силу леммы 2.13 [10]).

2. Можно считать, что $\sigma \neq \varnothing$. Так как $\langle U^G\rangle^{\varphi} = \prod_{p\in\sigma}\langle U_p^G\rangle^{\varphi}$ и согласно утверждению 1 настоящего предложения $\langle U_p^G\rangle^{\varphi} = (\langle U_p^G\rangle^{\varphi} \cap A_p^{\varphi})(\langle U_p^G\rangle^{\varphi} \cap \cap B^{\varphi})$, вследствие леммы 5 выполняется (5).

3. Пусть $U \not\subseteq K$. Если $U \subseteq F(G)$, то (6) выполняется. Пусть $U \not\subseteq F(G)$. Так как в силу теоремы Гашюца (см., например, [12], гл. III, предложения 3.5 и 3.7) $F(G/K) = F(G)/K$, то в силу леммы 6 $l_{\mathfrak{N}}(\langle U^G\rangle) = l_{\mathfrak{N}}(\langle U^G\rangle^{\varphi})$. Далее, ввиду утверждения 1 у произвольного субнормального ряда с p- и p'-факторами группы $\langle U_p^G\rangle^{\varphi}$ каждый фактор нильпотентен. Отсюда вытекает, что $l_{\mathfrak{N}}(\langle U_p^G\rangle^{\varphi}) \le 2\,l_p(\langle U_p^G\rangle^{\varphi})$. Но, очевидно, $l_{\mathfrak{N}}(\langle U^G\rangle^{\varphi}) = \max(l_{\mathfrak{N}}(\langle U_p^G\rangle^{\varphi}) \mid p \in \sigma)$. Следовательно, $l_{\mathfrak{N}}(\langle U^G\rangle^{\varphi}) \le 2\max(l_p(\langle U_p^G\rangle^{\varphi}) \mid p \in \sigma)$.

4. Пусть $A_{\sigma} \not\subseteq F(G)$. Тогда, очевидно, $t > 1$ и, значит, $K \subseteq F_{t-1}(G)$. Поэтому с учетом нильпотентности $F_t(G)/F_{t-1}(G)$ вследствие утверждения 1 при каждом $p \in \sigma$

$$\langle A_p^G\rangle F_{t-1}(G)/F_{t-1}(G) = (A_pF_{t-1}(G)/F_{t-1}(G)) \times O_{p'}(\langle A_p^G\rangle F_{t-1}(G)/F_{t-1}(G))$$

и, значит, $\langle A_p^G\rangle F_{t-1}(G) = A_pF_{t-1}(G) \trianglelefteq G$. Тогда

$$\langle A_{\sigma}^G\rangle F_{t-1}(G) = \prod_{p\in\sigma}\langle A_p^G\rangle F_{t-1}(G) = \prod_{p\in\sigma}A_pF_{t-1}(G) = A_{\sigma}F_{t-1}(G) \trianglelefteq G.$$

Предложение доказано.

***Следствие* 4.** *Пусть при условии предложения* 2 ψ — *произвольный гомоморфизм группы* G *с* $\mathrm{Ker}\,\psi \supseteq K$, N — *нильпотентный нормальный делитель группы* G^{ψ}. *Тогда* $A_{\sigma}^{\psi} \cap N \trianglelefteq G^{\psi}$.

Доказательство очевидным образом сводится к случаю, когда $\sigma = \{p\}$ и N — p-группа. Вследствие утверждения 1 предложения 2 для нормального замыкания H подгруппы A_p^{ψ} в G^{ψ}: $H = A_p^{\psi}(H \cap B_{p'}^{\psi})$. Поэтому A_p^{ψ} — силовская p-подгруппа группы H. Следовательно, поскольку $A_p^{\psi}(H \cap N)$ — p-группа, то $H \cap N \subseteq A_p^{\psi}$ и, значит, $A_p^{\psi} \cap N = H \cap N \trianglelefteq G^{\psi}$.

***Следствие* 5.** *Пусть при условии предложения* 2 ψ — *произвольный гомоморфизм группы* G *с* $\mathrm{Ker}\,\psi \supseteq K$. *Тогда* $A^{\psi} \cap F(G^{\psi}), B^{\psi} \cap F(G^{\psi}) \trianglelefteq G^{\psi}$.

Следствие 5 непосредственно вытекает из следствия 4.

***Следствие* 6.** *Пусть при условии предложения* 2 $K \subseteq N \subseteq L$, $N \trianglelefteq G$, $L \trianglelefteq \trianglelefteq G$ *и фактор-группа* L/N *нильпотентна. Тогда* $(A_{\sigma} \cap L)N \trianglelefteq G$.

Доказательство. Действительно, в силу следствия 4 $A_{\sigma}N \cap L \trianglelefteq G$, и вследствие леммы Дедекинда $A_{\sigma}N \cap L = (A_{\sigma} \cap L)N$.

Заметим, что в силу леммы Виландта – Хупперта в предложении 2 $A_\sigma^\varphi B_\sigma^\varphi$ — холлова σ-подгруппа группы G^φ.

***Следствие* 7.** *При условии предложения 2 для любых различных p и q $A_p^\varphi B_q^\varphi$, $A_q^\varphi B_p^\varphi \le G^\varphi$ и для $\sigma = \{p, q\}$ $A_\sigma^\varphi B_\sigma^\varphi = (A_p^\varphi B_q^\varphi) \times (A_q^\varphi B_p^\varphi)$.*

Доказательство. Действительно, вследствие утверждения 1 предложения 2 $\langle A_p^G \rangle^\varphi \cap A_\sigma^\varphi B_\sigma^\varphi = A_p^\varphi \left(\langle A_p^G \rangle^\varphi \cap B_q^\varphi\right)$, $\langle B_q^G \rangle^\varphi \cap A_\sigma^\varphi B_\sigma^\varphi = B_q^\varphi \left(\langle B_q^G \rangle^\varphi \cap A_p^\varphi\right)$. Поэтому $A_p^\varphi B_q^\varphi = \left(\langle A_p^G \rangle^\varphi \cap A_\sigma^\varphi B_\sigma^\varphi\right) B_q^\varphi \le A_\sigma^\varphi B_\sigma^\varphi$ и для любого $g \in A_\sigma^\varphi B_\sigma^\varphi$ $(A_p^\varphi)^g \subseteq A_p^\varphi B_q^\varphi$, $(B_q^\varphi)^g \subseteq B_q^\varphi A_p^\varphi = A_p^\varphi B_q^\varphi$. Следовательно, $A_p^\varphi B_q^\varphi \trianglelefteq A_\sigma^\varphi B_\sigma^\varphi$ и, аналогично, $A_q^\varphi B_p^\varphi \trianglelefteq A_\sigma^\varphi B_\sigma^\varphi$. В таком случае $A_\sigma^\varphi B_\sigma^\varphi = (A_p^\varphi B_q^\varphi)(A_q^\varphi B_p^\varphi)$. Далее, вследствие утверждения 4 предложения 1 $A^\varphi \cap B^\varphi = 1$. Возьмем произвольный $g \in A_p^\varphi B_q^\varphi \cap A_q^\varphi B_p^\varphi$. Тогда для некоторых $a_p \in A_p^\varphi$, $b_q \in B_q^\varphi$, $a_q \in A_q^\varphi$ и $b_p \in B_p^\varphi$ $g = a_p b_q = a_q b_p$. В таком случае $a_q^{-1} a_p = b_p b_q^{-1} \in A^\varphi \cap B^\varphi = 1$. Следовательно, $a_p = a_q \in A_p^\varphi \cap A_q^\varphi = 1$, $b_p = b_q \in B_p^\varphi \cap B_q^\varphi = 1$, и, значит, $g = 1$. Таким образом, $A_p^\varphi B_q^\varphi \cap A_q^\varphi B_p^\varphi = 1$.

Следствие доказано.

***Следствие* 8.** *Пусть $p \ne q$, $G = AB$ — конечная $\{p, q\}$-группа, A и B — ее нильпотентные подгруппы, φ — такой же, как в предложении 2. Тогда $A_p^\varphi B_q^\varphi$, $A_q^\varphi B_p^\varphi \le G^\varphi$ и $G^\varphi = (A_p^\varphi B_q^\varphi) \times (A_q^\varphi B_p^\varphi)$.*

Следствие 8 вытекает из следствия 7 и теоремы Бернсайда о разрешимости конечной бипримарной группы.

***Доказательство теоремы* 1.** 1. Пусть $m \ne 0$. В силу утверждения 1 предложения 2 H_p^φ — силовская p-подгруппа группы $\langle H_p^G \rangle^\varphi$. Поэтому согласно соответствующим теоремам Ф. Холла – Хигмэна [13] и Брюхановой [14, 15] $l_p(\langle H_p^G \rangle^\varphi) \le \min(s, t_p)$ и, значит, $l_p(\langle H_p^G \rangle^\varphi) \le m$. Тогда в силу утверждения 3 предложения 2 $l_{\mathfrak{N}}(\langle H_p^G \rangle^\varphi) \le 2m$ и, значит, $H \subseteq F_{2m}(G)$. Если $H \nsubseteq F_{2m-1}(G)$, то $H \nsubseteq F(G)$ и в силу утверждения 4 предложения 2 $HF_{2m-1}(G) \trianglelefteq G$. Если же $H \subseteq F_{2m-1}(G)$, то $HF_{2m-1}(G) = F_{2m-1}(G) \trianglelefteq G$.

2. Пусть $H = A$. Если $m \ne 0$, то $G = F_{2m}(G)B$, а следовательно, $G / F_{2m}(G)$ нильпотентна и, значит, $l_{\mathfrak{N}}(G) \le 2m + 1$. Если $m = 0$, то $A \subseteq K$. Тогда фактор-группа G / K и, вместе с тем, фактор-группа $G / \Phi(G)$ нильпотентны. Поэтому в силу теоремы Гашюца G нильпотентна и, значит, $l_{\mathfrak{N}}(G) \le 1$ $(= 2m + 1)$.

***Доказательство теоремы* 2.** Действительно, $U^\varphi \trianglelefteq \langle U^G \rangle^\varphi \cap A_p^\varphi$ и в силу утверждения 1 предложения 2 $\langle U^G \rangle^\varphi \cap A_p^\varphi$ — силовская p-подгруппа группы $\langle U^G \rangle^\varphi$; в случае, когда $3 \nmid |B^\varphi|$, $3 \nmid |\langle U^G \rangle^\varphi : \langle U^G \rangle^\varphi \cap A_p^\varphi|$; в случае, когда B_2^φ абелева, 2-подгруппы группы $\langle U^G \rangle^\varphi$ абелевы. Поэтому вследствие соответствующих теорем Хартли [16]: а) если U^φ абелева, то $l_p(\langle U^G \rangle^\varphi) \le 3$; б) если U^φ абелева, то $l_p(\langle U^G \rangle^\varphi) \le 2$ в каждом случае из утверждения 2 настоящей теоремы; в) при условии утверждения 4 настоящей теоремы $l_p(\langle (U^2)^G \rangle^\varphi) \le 1$; и вследствие соответствующих теорем Ф. Холла – Хигмэна

[13]: г) $l_p(\langle U^G\rangle^\varphi) \le 1$ в каждом случае из утверждения 3; д) при условии утверждения 5 $l_p(\langle (U')^G\rangle^\varphi) \le 1$. Поэтому в силу утверждения 3 предложения 2 соответственно: а) $l_{\mathfrak{N}}(\langle U^G\rangle) \le 6$; б) $l_{\mathfrak{N}}(\langle U^G\rangle) \le 4$; в) $l_{\mathfrak{N}}(\langle (U^2)^G\rangle) \le 2$; г) $l_{\mathfrak{N}}(\langle U^G\rangle) \le 2$; д) $l_{\mathfrak{N}}(\langle (U')^2\rangle) \le 2$. Остается напомнить, что при произвольном $n \in \mathbb{N}$ множество элементов X группы G принадлежит $F_n(G)$ тогда и только тогда, когда $l_{\mathfrak{N}}(\langle X^G\rangle) \le n$.

***Доказательство теоремы* 3.** Действительно, в силу утверждения 1 предложения 2 A_p^φ является силовской p-подгруппой группы $\langle A_p^G\rangle^\varphi$, а поэтому p-экспонента последней равна p^e; при произвольном $q \ne p$ в случае, когда B_q^φ абелева, q-подгруппы группы $\langle A_p^G\rangle^\varphi$ абелевы. Поэтому вследствие соответствующих теорем Ф. Холла – Хигмэна [13] и Гросса [17] p-экспонента фактор-группы $\langle A_p^G\rangle^\varphi / O_{p',p,p',p}(\langle A_p^G\rangle^\varphi)$ не превышает числа p^{e-1}, и в каждом из случаев утверждения 2 p-экспонента фактор-группы $\langle A_p^G\rangle / O_{p',p}(\langle A_p^G\rangle^\varphi)$ не превышает этого числа. Далее, снова в силу утверждения 1 предложения 2 $O_{p',p,p',p}(\langle A_p^G\rangle^\varphi) \subseteq F_4(G^\varphi)$ и $O_{p',p}(\langle A_p^G\rangle^\varphi) \subseteq F_2(G^\varphi)$, и в силу теоремы Гашюца $F_4(G^\varphi) = (F_4(G))^\varphi$ и $F_2(G^\varphi) = (F_2(G))^\varphi$. Отсюда и вытекает справедливость настоящей теоремы.

***Доказательство теоремы* 4** с учетом теоремы 3 и утверждения 6 предложения 1 очевидно.

***Замечания.* 4.** Если в предложении 1 $G \ne K$, то в силу его утверждений 1 и 3 для некоторого непустого $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ $K = \bigcap_{i\in I} N_i$, причем при каждом $i \in I$ $\Phi(G/N_i) = Z(G/N_i) = 1$. Отсюда вытекает, что при условии предложения 1 $\Phi(G/K) = Z(G/K) = 1$.

5. Утверждения 1, 2 предложения 2 и следствия 4 – 8 останутся справедливыми, если в них K заменить произвольной группой $K^* \subseteq K$, $K^* \trianglelefteq G$, которая является пересечением некоторых $N \trianglelefteq G$ с тем свойством, что $\pi(AN/N) \cap \pi(BN/N) = \varnothing$. При этом доказательства утверждений 1, 2 и следствий 4, 6, 7 по существу не изменятся. Так как в силу следствия 1 [11] для $\pi = \pi(A) \cap \pi(B)$ силовская π-подгруппа группы $F(G)$ является пересечением таких N, то в отмеченных утверждениях и следствиях можно заменить K на K_π $(= K \cap F(G))_\pi$. (Если $\pi = \varnothing$, то $K_\pi = 1$.)

Пусть теперь для произвольной группы G $F(G)$ — ее локально нильпотентный радикал, $F_0(G) = 1$ и для $i \in \mathbb{N}$ $F_i(G) = F(G/F_{i-1}(G))$; в случае, когда G радикальна, $l_{\mathfrak{N}}(G)$ — длина ее ряда Гирша – Плоткина.

Прежде чем сформулировать следующую теорему, напомним, что при ее условии группа G радикальна в силу утверждения 1 теоремы 3 [11].

Теорема 5. *Пусть $G = AB$ — периодическая локально разрешимая группа, A и B — ее локально нильпотентные подгруппы, хотя бы одна из которых гиперабелева, φ — произвольный гомоморфизм группы G такой, что при $\pi = \pi(A) \cap \pi(B)$ $F(G)_\pi \subseteq \operatorname{Ker}\varphi$ (в частности, φ может быть гомоморфизмом группы G на одну из следующих фактор-групп: $G/F(G)_\pi$, $G/F(G)$); H — произвольная холлова подгруппа группы A; U, $N \trianglelefteq A$ и U — p-подгруппа. Тогда справедливы следующие утверждения:*

тельстве утверждения 1 предложения 2, убеждаемся в том, что при произвольном p подгруппа A_p^{φ} имеет p'-дополнение в своем нормальном замыкании в G^{φ} (принадлежащее $B_{p'}^{\varphi}$). Очевидно, это справедливо и при произвольном гомоморфизме φ группы G с $\operatorname{Ker}\varphi \supseteq (F(G))\pi$. Покажем, что для любых $T, R \trianglelefteq G^{\varphi}$ таких, что $T \subseteq R$ и R/T локально нильпотентна, в случае, когда $A_p^{\varphi} \subseteq R$, $A_p^{\varphi}T \trianglelefteq G$. Действительно, в этом случае, очевидно, нормальное замыкание $A_p^{\varphi}T/T$ в G^{φ}/T — p-группа. Так как $A_p^{\varphi}T/T$ дополняема в последнем с помощью p'-подгруппы, то она с ним совпадает. Поскольку H^{φ} — прямое произведение некоторых A_p^{φ}, то в силу доказанного $H^{\varphi}T \trianglelefteq G^{\varphi}$, если $H^{\varphi} \subseteq R$. Используя теперь в качестве T и R соответственно $F_{2s-1}(G^{\varphi})$, $F_{2s}(G^{\varphi})$ и $F_{2t-1}(G^{\varphi})$, $F_{2t}(G^{\varphi})$, убеждаемся в справедливости настоящего предложения.

1. *Wielandt H.* Über Produkte von nilpotenten Gruppen // Ill. J. Math. – 1958. – **2**, № 4B. – S. 611 – 618.
2. *Kegel O. H.* Produkte nilpotenten Gruppen // Arch. Math. – 1961. – **12**, № 2. – S. 90 – 93.
3. *Kegel O. H.* Zur Struktur mehrfach factorisierbarer endlicher Gruppen // Math. Z. – 1965. – **87**, № 1. – S. 42 – 48.
4. *Gross F.* Finite groups which are the product of two nilpotent subgroups // Bull. Austral. Math. Soc. – 1973. – **9**, № 2. – P. 267 – 274.
5. *Pennington E.* On products of finite nilpotent groups // Math. Z. – 1973. – **134**, № 1. – P. 81 – 83.
6. *Heineken H.* Products of finite nilpotent groups // Math. Ann. – 1990. – **287**, № 4. – P. 643 – 652.
7. *Franciosi S., de Giovanni F., Heineken H., Newell M. L.* On the Fitting length of a soluble product of nilpotent groups // Arch. Math. – 1991. – **57**, № 4. – P. 313 – 318.
8. *Heineken H.* The product of two finite nilpotent groups and its Fitting series // Ibid. – 1992. – **59**, № 3. – P. 209 – 214.
9. *Amberg B., Franciosi S., de Giovanni F.* Products of groups. – Oxford: Clarendon Press, 1992. – 220 p.
10. *Черников Н. С.* Группы разложимые в произведение перестановочных подгрупп. – Киев: Наук. думка, 1987. – 206 с.
11. *Черников Н. С.* Периодические локально разрешимые группы, факторизуемые двумя локально нильпотентными подгруппами // Вопросы алгебры (Гомель). – 1997. – **11**. – С. 90 – 115.
12. *Huppert B.* Endliche Gruppen. I. – Berlin etc.: Springer, 1967. – 793 S.
13. *Hall Ph., Higman G.* On the p-length of p-soluble groups and reduction theorems for Burnside's problem // Proc. London Math. Soc. – 1956. – **6**, № 21. – P. 1 – 42.
14. *Брюханова Е. Г.* 2-длина и 2-период конечной разрешимой группы // Алгебра и логика. – 1979. – **18**, № 1. – С. 9 – 31.
15. *Брюханова Е. Г.* Связь между 2-длиной и производной длиной силовской 2-подгруппы в конечной группе // Мат. заметки. – 1981. – **29**, № 2. – С. 161 – 170.
16. *Hartley B.* Some theorems of Hall–Higman type for small primes // Proc. London Math. Soc. – 1980. – **41**, № 2. – P. 340 – 362.
17. *Gross F.* The 2-length of a finite solvable group // Pacif. J. Math. – 1965. – **15**, № 4. – P. 1221 – 1237.

Получено 27.08.99