УДК 517.9 : 519.46

І. І. Юрик (Укр. ун-т харч. технологій, Київ)

НЕЛІНІЙНЕ РІВНЯННЯ ДАЛАМБЕРА У ПСЕВДОЕВКЛІДОВОМУ ПРОСТОРІ $R_{2,n}$ І ЙОГО РОЗВ'ЯЗКИ

We investigate a nonlinear d'Alambert equation in pseudo-Euclidean space $R_{2,n}$. We construct new exact solutions containing arbitrary functions.

Досліджено нелінійне рівняння Даламбера у псевдоевклідовому просторі $R_{2,n}$. Побудовано нові точні розв'язки, що містять довільні функції.

1. Нелінійне рівняння Даламбера у псевдоевклідовому просторі $R_{2,n}$ має вигляд

$$\Box u + F(u) = 0, \tag{1}$$

де $\Box u = u_{11} + u_{22} - u_{33} - \ldots - u_{n+2,n+2}$; $u_{\mu\nu} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_\mu}\,\partial x_\nu$; $u = u(x)$; $x = (x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_{n+2})$; $\mu, \nu = 1, 2, \ldots, n+2$; $F(u)$ — гладка функція. Рівняння (1) інваріантне відносно алгебри Пуанкаре $AP(2, n)$ з базисними елементами

$$P_\alpha = \partial_\alpha, \quad J_{\alpha\beta} = g^{\alpha\nu} x_\nu \partial_\beta - g^{\beta\nu} x_\nu \partial_\alpha, \tag{2}$$

де $\partial_\alpha = \dfrac{\partial}{\partial x_\alpha}$; $g_{11} = g_{22} = -g_{33} = \ldots = -g_{n+2,n+2}$; $\alpha, \beta, \nu = 1, 2, \ldots, n+2$. Побудові точних розв'язків рівняння (1) при різних обмеженнях на функцію $F(u)$ присвячено роботи [1 – 5]. В даній роботі побудовано нові широкі класи точних розв'язків рівняння (1), що містять довільні функції. Для їх знаходження використано метод, запропонований в [6, 7]. Коротко суть цього методу можна сформулювати так. Розглянемо симетрійний анзац для рівняння (1) і припустимо, що він має вигляд

$$u = f(x)\varphi(\omega_1, \ldots, \omega_k) + g(x), \tag{3}$$

де $\omega_1 = \omega_1(x_1, \ldots, x_{n+2}), \ldots, \omega_k = \omega_k(x_1, \ldots, x_{n+2})$ — нові незалежні змінні. Анзац (3) виділяє деяку підмножину S розв'язків рівняння (1). Побудуємо новий анзац

$$u = f(x)\varphi(\omega_1, \ldots, \omega_k, \omega_{k+1}, \ldots, \omega_l) + g(x), \tag{4}$$

який є узагальненням анзацу (3). Тут $\omega_{k+1}, \ldots, \omega_l$ — нові змінні, які необхідно визначити. Будемо визначати їх з умови, що редуковане рівняння, яке відповідає анзацу (3), співпадає з редукованим рівнянням, яке відповідає анзацу (4). Анзац (4) виділяє підмножину розв'язків S_1, яка містить підмножину S. Якщо відомі розв'язки підмножини S, то можна побудувати і розв'язки підмножини S_1. Ці розв'язки будуються в такий спосіб. Нехай $u = u(x, C_1, \ldots, C_t)$ — багатопараметрична сім'я розв'язків вигляду (3) рівняння (2). Ми одержимо більш загальну сім'ю розв'язків рівняння (1), якщо сталі C_i в розв'язку $u = u(x,$ $C_1, \ldots, C_t)$ вважати довільними гладкими функціями від $\omega_{k+1}, \ldots, \omega_l$.

2. Виділимо деякі анзаци типу (3) і їх узагальнення типу (4) для рівняння (1).

1°. Анзац $u = \varphi(x_1, x_3, \omega)$, де $\omega = \omega(x_2, x_4, \ldots, x_{n+2})$ — довільний розв'язок системи

$$\Box\omega = \frac{\partial^2\omega}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2\omega}{\partial x_4^2} - \ldots - \frac{\partial^2\omega}{\partial x_{n+2}^2} = 0,$$
$$(\nabla\omega)^2 = \left(\frac{\partial\omega}{\partial x_2}\right)^2 - \left(\frac{\partial\omega}{\partial x_4}\right)^2 - \ldots - \left(\frac{\partial\omega}{\partial x_{n+2}}\right)^2 = 0, \tag{5}$$

є узагальненням симетрійного анзацу $u = \varphi(x_1, x_3)$ і редукує рівняння (1) до рівняння

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2} + F(\varphi) = 0. \tag{6}$$

В [8, 9] побудовано широкий клас точних розв'язків системи (5) для $n \geq 3$, які називаються розв'язками Смірнова – Соболєва. Якщо $n = 2$, то довільний розв'язок системи (5) має вигляд $f(x_2 \pm x_4)$, де f — двічі диференційовна функція. Зазначимо, що для $n \geq 4$ система (5) повністю проінтегрована в [10].

2°. Анзац $u = \varphi(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, де $\omega_1 = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - \ldots - x_k^2$, $\omega_2 = x_1 - x_k$, $\omega_3 = (x_1 - x_k)/(x_2 - x_{k-1})$, $k \geq 4$, є узагальненням симетрійного анзацу $u = \varphi(\omega_1, \omega_2)$ і редукує рівняння (1) до рівняння

$$4\omega_1\varphi_{11} + 4\omega_2\varphi_{12} + 2k\varphi_1 + F(\varphi) = 0,$$

де

$$\varphi_{\mu\nu} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega_\mu\partial\omega_\nu}, \quad \mu, \nu = 1, 2.$$

3°. Анзац $u = \varphi(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$, де $\omega_1 = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - \ldots - x_k^2$, $\omega_2 = x_1 - x_k$, $\omega_3 = x_2 - x_{k-1}$, $\omega_4 = (x_1 - x_k)/(x_2 - x_{k-1})$, $k \geq 4$, є узагальненням симетрійного анзацу $u = \varphi(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ і редукує рівняння (1) до рівняння

$$4\omega_1\varphi_{11} + 4\omega_2\varphi_{12} + 4\omega_3\varphi_{13} + 2k\varphi_1 + F(\varphi) = 0.$$

4°. Анзац $u = \varphi(x_k, \ldots, x_{n+2}, \omega)$, $4 \leq k \leq n+2$; $n \geq 4$, де ω — довільний розв'язок системи

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2\omega}{\partial x_3^2} - \ldots - \frac{\partial^2\omega}{\partial x_{k-1}^2} = 0,$$
$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial x_2}\right)^2 - \left(\frac{\partial\omega}{\partial x_3}\right)^2 - \ldots - \left(\frac{\partial\omega}{\partial x_{k-1}}\right)^2 = 0, \tag{7}$$

є узагальненням симетрійного анзацу $u = \varphi(x_k, \ldots, x_{n+2})$ і редукує рівняння (1) до рівняння

$$-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_k^2} - \ldots - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_{n+2}^2} + F(\varphi) = 0.$$

Зауважимо, що у випадку $k = 4$ система (7) є системою типу (5).

5°. Анзац $u = \varphi(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_l, \omega)$, де $\omega_1 = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - \ldots - x_k^2$, $\omega_2 = x_{k+1}, \ldots, \omega_l = x_{k+l-1}$, $k \geq 3$, $k + l - 1 \leq n + 2$, ω — довільний розв'язок системи

$$\Box\omega = \frac{\partial^2\omega}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2\omega}{\partial x_3^2} - \ldots - \frac{\partial^2\omega}{\partial x_k^2} = 0,$$

$$(\nabla\omega)^2 = \left(\frac{\partial\omega}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial x_2}\right)^2 - \left(\frac{\partial\omega}{\partial x_3}\right)^2 - \ldots - \left(\frac{\partial\omega}{\partial x_k}\right)^2 = 0,$$

$$\nabla\omega_1 \cdot \nabla\omega = x_1 \frac{\partial\omega}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial\omega}{\partial x_2} + \ldots + x_k \frac{\partial\omega}{\partial x_k} = 0,$$

є узагальненням симетрійного анзацу $u = \varphi(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_l)$ і редукує рівняння (1) до рівняння

$$4\omega_1 \frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega_1^2} + 2k\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega_2^2} - \ldots - \frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega_l^2} + F(\varphi) = 0.$$

6°. Анзац $u = \varphi(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, де $\omega_1 = x_1$, $\omega_2 = x_2^2 - x_3^2 - \ldots - x_k^2$, ω_3 — довільний розв'язок системи

$$\frac{\partial^2\omega_3}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2\omega_3}{\partial x_3^2} - \ldots - \frac{\partial^2\omega_3}{\partial x_k^2} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial\omega_3}{\partial x_2}\right)^2 - \left(\frac{\partial\omega_3}{\partial x_3}\right)^2 - \ldots - \left(\frac{\partial\omega_3}{\partial x_k}\right)^2 = 0, \tag{8}$$

є узагальненням симетрійного анзацу $u = \varphi(\omega_1, \omega_2)$ і редукує рівняння (1) до рівняння

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega_1^2} + 4\omega_2 \frac{\partial^2}{\partial\omega_2^2} + 2(k-1)\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_2} + F(\varphi) = 0.$$

7°. Анзац $u = \varphi(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_l, \omega)$, де $\omega_1 = x_1$, $\omega_2 = x_2^2 - x_3^2 - \ldots - x_k^2$, $\omega_3 = x_{k+1}, \ldots, \omega_l = x_{k+l-2}$, $k \geq 4$, $k + l - 2 \leq n + 2$, $\omega = \omega(x_2, x_3, \ldots, x_k)$ — довільний розв'язок системи

$$\Box\omega = 0, \quad (\nabla\omega)^2 = 0, \quad \nabla\omega_2 \cdot \nabla\omega = 0, \tag{9}$$

є узагальненням симетрійного анзацу $u = \varphi(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_l)$ і редукує рівняння (1) до рівняння

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega_1^2} + 4\omega_2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega_2^2} + 2(k-2)\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega_3^2} - \ldots - \frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega_l^2} + F(\varphi) = 0.$$

Якщо $k = 4$, то довільним розв'язком системи (9) буде довільна гладка функція $f(x)$, де

$$t = \frac{x_2 x_3 \pm x_4\sqrt{x_3^2 + x_4^2 - x_2^2}}{x_3^2 + x_4^2}.$$

Наведені анзаци $1° - 7°$ можна ефективно використати для побудови широких класів точних розв'язків рівняння (1) при різних обмеженнях на функцію $F(u)$.

3. Побудуємо деякі класи точних розв'язків рівняння Ліувілля

$$\Box u + \lambda \exp u = 0. \tag{10}$$

Рівняння (10) інваріантне відносно розширеної алгебри Пуанкаре $A\tilde{P}(2, n)$, базис якої утворюють оператори (2) і оператор

$$D = -x_1\partial_1 - x_2\partial_2 - \ldots - x_{n+2}\partial_{n+2} + 2\partial_u.$$

Будемо використовувати такі позначення [3]:

$$A_1 = -J_{14} + J_{23}, \quad A_2 = \frac{1}{2}(J_{12} + J_{34} - J_{13} - J_{24}), \quad D_1 = J_{14} + J_{24},$$

$$A_3 = \frac{1}{2}(J_{12} + J_{34} + J_{13} + J_{24}), \quad T = J_{12} - J_{24} + J_{13} - J_{34}, \tag{11}$$

$$N_1 = P_1 + P_4, \quad N_2 = P_2 + P_3, \quad Y_1 = P_1 - P_4, \quad Y_2 = P_2 - P_3.$$

Нехай $y_1 = x_1 + x_4$, $y_2 = x_1 - x_4$, $y_3 = x_2 + x_3$, $y_4 = x_2 - x_3$.

Оператори (11) належать алгебрі $A\tilde{P}(2, 2)$, яка є підалгеброю алгебри $A\tilde{P}(2, n)$. Класифікацію підалгебр алгебри $A\tilde{P}(2, 2)$ за рангами проведено в [3]. Використаємо деякі підалгебри рангу 3 алгебри $A\tilde{P}(2, 2)$ для побудови точних розв'язків рівняння (10).

1. Підалгебра $\langle A_1 + \alpha D_1, D + \beta D_1 \rangle$, $\alpha \geq 0$, $\alpha \neq 1$. Основними інваріантами підалгебри є функції

$$u + \ln\omega_1, \quad \omega = \ln\omega_1^{\beta+1}\omega_2^{-(1+\alpha)},$$

де $\omega_1 = y_1 y_2 + y_3 y_4$, $\omega_2 = y_2 y_4^{(1-\alpha)/(1+\alpha)}$. Анзац $u = \varphi(\omega) - \ln\omega_1$ редукує рівняння (10) до рівняння

$$4(\beta^2 - 1)\ddot{\varphi} + 4(\beta + 1)\dot{\varphi} + \lambda\exp\varphi - 4 = 0.$$

Редуковане рівняння при $\beta = 1$ має розв'язок

$$\varphi = \ln\frac{4Ce^{\omega/2}}{1 + \lambda Ce^{\omega/2}}.$$

Отже, розв'язком рівняння (10) є функція

$$u = \ln\frac{4C\omega_2^{-(1+\alpha)/2}}{1 + \lambda C\omega_1\omega_2^{-(1+\alpha)/2}}.$$

Звідси на підставі п. 3° отримуємо сім'ю точних розв'язків рівняння Ліувілля

$$u = \ln\frac{4h(t)}{x_2 - x_3 + \lambda h(t)(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2)},$$

де $h(t)$ — довільна двічі диференційовна функція від $t = (x_1 - x_4)/(x_2 - x_3)$.

2. Підалгебра $\langle A_3 + N_1, T, D + \alpha A_1 + (1 + 3\alpha)D_1 \rangle$, $\alpha \neq -1/2$. Основними інваріантами підалгебри є функції

$$u + \frac{1}{2\alpha + 1}\ln\omega_1, \quad \omega = \frac{\omega_2^{2\alpha+1}}{\omega_1^{2(\alpha+1)}},$$

де $\omega_1 = y_4$, $\omega_2 = 4y_2^2 + 4y_2(y_1 y_2 + y_3 y_4)$. Анзац $u = \varphi(\omega) - \dfrac{1}{2\alpha + 1}\ln\omega_1$ редукує рівняння (10) до рівняння

$$16(2\alpha + 1)e^{-\omega/(2\alpha+1)}(2\alpha\ddot{\varphi} + \dot{\varphi}) + \lambda\exp\varphi = 0.$$

Якщо $\alpha = 0$, то отримуємо рівняння

$$16e^{-\omega}\dot{\varphi} + \lambda \exp\varphi = 0.$$

Розв'язком даного рівняння є функція

$$u = \ln \frac{16\omega_1}{\lambda\omega_2 + C\omega_1^2}.$$

Звідси на підставі п. 3° отримуємо сім'ю точних розв'язків рівняння Ліувілля

$$u = \ln \frac{4(x_2 - x_3)}{\lambda[(x_1 - x_4)^2 + (x_2 - x_3)(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2)] + h(t)(x_2 - x_3)^2},$$

де $h(t)$ — довільна двічі диференційовна функція від $t = (x_1 - x_4)/(x_2 - x_3)$.

3. Підалгебра $\langle A_1 + D_1 + N_1, T, D + D_1 + \beta N_1 \rangle$. Основними інваріантами підалгебри є функції

$$u + \ln\omega_1, \qquad \omega = \omega_2 - \ln\omega_1^{\beta+1},$$

де $\omega_1 = y_2$, $\omega_2 = \dfrac{y_1 y_2 + y_3 y_4}{y_2} + \ln y_4$. Анзац $u = \varphi(\omega) - \ln\omega_1$ редукує рівняння Ліувілля до рівняння

$$-4\beta\ddot{\varphi} + 4\dot{\varphi} + \lambda\exp\varphi = 0.$$

Якщо $\beta = 0$, то редуковане рівняння має розв'язок

$$\varphi = -\ln\left(\frac{\lambda}{4}\omega + C\right).$$

Отже, розв'язком рівняння (10) є функція

$$u = -\ln\left\{\frac{\lambda}{4}\left[x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 + (x_1 - x_4)\ln\frac{x_2 - x_3}{x_1 - x_4}\right] + C(x_1 - x_4)\right\}.$$

Звідси на підставі п. 3° отримуємо сім'ю точних розв'язків рівняння Ліувілля

$$u = -\ln\left\{\frac{\lambda}{4}(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2) + (x_1 - x_4)h(t)\right\},$$

де $h(t)$ — довільна двічі диференційовна функція від $t = (x_1 - x_4)/(x_2 - x_3)$.

4. Симетрійний анзац $u = \varphi(x_1, x_3)$ редукує рівняння (10) до рівняння

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3} + \lambda\exp\varphi = 0. \tag{12}$$

Загальний розв'язок рівняння (12)

$$\varphi(x_1, x_3) = \ln\left\{-\frac{8}{\lambda}\frac{\dot{h}_1(x_1 + x_3)\dot{h}_2(x_1 - x_3)}{[h_1(x_1 + x_3) + h_2(x_1 - x_3)]^2}\right\},$$

де h_1, h_2 — довільні диференційовні функції, $\dot{h}_1$, $\dot{h}_2$ — похідні по відповідному аргументу, $\lambda h_1 h_2 < 0$, побудував у 1853 р. Ліувілль. Отже, рівняння Ліувілля (10), згідно з п. 1°, має сім'ю точних розв'язків

$$u(x_1, x_3) = \ln\left\{-\frac{8}{\lambda}\frac{\dot{f}(x_1 + x_3, \omega)\dot{g}(x_1 - x_3, \omega)}{[f(x_1 + x_3, \omega) + g(x_1 - x_3, \omega)]^2}\right\},$$

де $f(x_1 + x_3, \omega)$, $g(x_1 - x_3, \omega)$ — довільні диференційовні функції від двох аргументів $x_1 + x_3, \omega$ і $x_1 - x_3, \omega$ відповідно, $\dot{f}$, $\dot{g}$ — похідні по першому аргументу, ω — довільний розв'язок системи (5).

5. Симетрійний анзац $u=\varphi(x_{n+2})$ редукує рівняння (10) до рівняння

$$-\frac{d^2\varphi}{dx_{n+2}^2}+\lambda\exp\varphi = 0. \tag{13}$$

Інтегруючи рівняння (13) і використовуючи п. 4°, отримуємо такі сім'ї точних розв'язків рівняння Ліувілля:

$$u = \ln\left\{\left(\frac{h_1(\omega)}{2\lambda}\sec^2\left[\frac{\sqrt{-h_1(\omega)}}{2}(x_{n+2}+h_2(\omega))\right]\right)\right\}, \quad h_1(\omega)<0, \quad \lambda<0,$$

$$u = \ln\left\{-\frac{2h_1(\omega)h_2(\omega)\exp\sqrt{h_1(\omega)}\,x_{n+2}}{\lambda[1-h_2(\omega)\exp\sqrt{h_1(\omega)}\,x_{n+2}]^2}\right\}, \quad h_1(\omega)>0, \quad \lambda h_2(\omega)>0,$$

$$u = -\ln\left\{\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\,x_{n+2}+h(\omega)\right\},$$

де $h_1(\omega)$, $h_2(\omega)$, $h(\omega)$ — довільні двічі диференційовні функції, ω — довільний розв'язок системи (7) при $k=n+2$.

4. Побудуємо деякі класи точних розв'язків нелінійного рівняння Даламбера

$$\Box u+\lambda u^k = 0, \quad k\neq 1. \tag{14}$$

Рівняння (14) інваріантне відносно розширеної алгебри Пуанкаре $A\tilde{P}(2,n)$, базис якої утворюють оператори (2) і оператор

$$D = -x_1\partial_1-x_2\partial_2-\ldots-x_{n+2}\partial_{n+2}+\frac{2u}{k-1}\,\partial_u.$$

Використаємо деякі підалгебри рангу 3 алгебри $A\tilde{P}(2,2)$ для побудови розв'язків рівняння (14). Для операторів алгебри $A\tilde{P}(2,2)$ збережемо позначення (11).

Аналогічно п. 3, використовуючи підалгебри $\langle A_1+D_1+N_1, T, D+D_1+\beta N_1\rangle$, $\langle A_3+N_1, T, D+\alpha A_1+(1+3\alpha)D_1\rangle$ $(\alpha\neq-1/2)$, $\langle A_3+N_1, T, 2D-A_1-D_1\rangle$, $\langle D_1, T, D+\alpha(A_2+A_3)\rangle$ $(\alpha>0)$, $\langle A_1+\alpha D_1, T, D+\beta D_1\rangle$ $(\alpha\geq 0,\ \alpha\neq 1)$, $\langle A_1-D_1, A_3, T, D+\beta D_1\rangle$, отримуємо відповідно такі розв'язки:

$$u = \frac{24\beta}{\lambda[x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2+(x_1-x_4)(-\ln(x_1-x_4)^\beta+h(t))]^2},$$

$$u^{1-k} = \frac{\lambda(k-1)^2}{16(k-2)}(x_2-x_3)^{-1}\{[2(x_1-x_4)+(x_1+x_4)(x_2-x_3)]^2-$$
$$-(x_2-x_3)^2[(x_1+x_4)^2-4(x_2+x_3)]\}+(x_2-x_3)h(t),$$

$$u = \frac{16(x_2-x_3)}{[h(t)-\lambda\ln(x_2-x_3)][4(x_2-x_4)^2+4(x_2-x_3)(x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2)]},$$

$$u^2 = \frac{8h(t)}{\lambda[1-(x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2)h(t)]^2},$$

$$u^{1-k} = \frac{\lambda(k-1)^2}{4(k-2)}(x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2)+(x_2-x_3)h(t),$$

$$u^{1-k} = (x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2)\left\{\frac{\lambda(k-1)^2}{4(k-2)}+h(t)(x_2-x_3)^{k-2}\right\},$$

де $h(t)$ — довільна двічі диференційовна функція від $t=(x_1-x_4)/(x_2-x_3)$.

5. Наведені вище розв'язки нелінійних рівнянь Даламбера і Ліувілля легко узагальнюються на випадок довільного n. Розглянемо декілька прикладів.

Симетрійний анзац для рівняння Даламбера у випадку $n=3$ набирає вигляду

$$u = (x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2-x_5^2)^{1/(1-k)}\varphi(\omega),$$

де $\omega=\ln\{(x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2-x_5^2)^{(\beta-1)/2}(x_1-x_5)\}$.

Цей анзац редукує рівняння (14) до рівняння

$$(\beta-1)(\beta-3)\ddot{\varphi}+\left[-\frac{4(\beta-2)}{k-1}+3(\beta-1)\right]\dot{\varphi}-\frac{2(3k-5)}{(k-1)}\varphi+\lambda\varphi^k = 0.$$

Редуковане рівняння при $\beta=1$ і $\beta=3$ має відповідно такі розв'язки:

$$\varphi^{1-k} = \frac{\lambda(k-1)^2}{2(3k-5)}+C_1e^{-\omega(3k-5)/2},\qquad \varphi^{1-k} = \frac{\lambda(k-1)^2}{2(3k-5)}+C_1e^{-\omega}.$$

Отже, отримуємо такі розв'язки рівняння Даламбера:

$$\begin{gathered} u^{1-k} = \left\{\frac{\lambda(k-1)^2}{2(3k-5)}+C_1(x_1-x_5)^{-(3k-5)/2}\right\}(x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2-x_5^2), \\ u^{1-k} = \frac{\lambda(k-1)^2}{2(3k-5)}(x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2-x_5^2)+\frac{C_1}{x_1-x_5}. \end{gathered} \tag{15}$$

Подіявши на дані розв'язки груповим перетворенням $\exp(\mathrm{ad}\, C_2P_3)$, одержуємо розв'язки рівняння (14):

$$u^{1-k} = \left\{\frac{\lambda(k-1)^2}{2(3k-5)}+C_1(x_1-x_5)^{-(3k-5)/2}\right\}[x_1^2+x_2^2-(x_3+C_2)^2-x_4^2-x_5^2],$$

$$u^{1-k} = \frac{\lambda(k-1)^2}{2(3k-5)}[x_1^2+x_2^2-(x_3+C_2)^2-x_4^2-x_5^2]+\frac{C_1}{x_1-x_5}.$$

Звідси на підставі п. 3° отримуємо такі сім'ї точних розв'язків рівняння Даламбера:

$$u^{1-k} = \left\{\frac{\lambda(k-1)^2}{2(3k-5)}+h_1(t)(x_1-x_5)^{-(3k-5)/2}\right\}[x_1^2+x_2^2-(x_3+h_2(t))^2-x_4^2-x_5^2],$$

$$u^{1-k} = \frac{\lambda(k-1)^2}{2(3k-5)}[x_1^2+x_2^2-(x_3+h_2(t))^2-x_4^2-x_5^2]+\frac{h_1(t)}{x_1-x_5},$$

де $h_1(t)$, $h_2(t)$ — довільні двічі диференційовні функції від $(x_1-x_5)/(x_2-x_4)$.

Якщо на розв'язки (15) подіяти груповим перетворенням $\exp[\mathrm{ad}(C_2P_1+ C_3P_5)]$, то одержимо такі розв'язки рівняння (14):

$$u^{1-k} = \left\{\frac{\lambda(k-1)^2}{2(3k-5)}+C_1(x_1-x_5+C_2-C_3)^{-(3k-5)/2}\right\}\times$$

$$\times[(x_1+C_2)^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2-(x_5+C_3)^2],$$

$$u^{1-k} = \frac{\lambda(k-1)^2}{2(3k-5)}[(x_1+C_2)^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2-(x_5+C_3)^2]+\frac{C_1}{x_1-x_5+C_2-C_3}.$$

Отже, на підставі п. 7° отримуємо такі сім'ї точних розв'язків рівняння Даламбера:

$$u^{1-k} = \left\{ \frac{\lambda(k-1)^2}{2(3k-5)} + h_1(t)(x_1 - x_5 + h_2(t) - h_3(t))^{-(3k-5)/2} \right\} \times$$

$$\times \left[(x_1 + h_2(t))^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 - (x_5 + h_3(t))^2 \right],$$

$$u^{1-k} = \frac{\lambda(k-1)^2}{2(3k-5)} \left[(x_1 + h_2(t))^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 - (x_5 + h_3(t))^2 \right] \times$$

$$\times \frac{h_1(t)}{x_1 - x_5 + h_2(t) - h_3(t)},$$

де $h_1(t)$, $h_2(t)$, $h_3(t)$ — довільні двічі диференційовні функції від $t = \dfrac{x_2 x_3 \pm x_4\sqrt{x_3^2 + x_4^2 - x_2^2}}{x_3^2 + x_4^2}$.

1. *Фущич В. И., Штелень В. М., Серов Н. И.* Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики. – Киев: Наук. думка, 1989. – 335 с.
2. *Фущич В. И., Баранник Л. Ф., Баранник А. Ф.* Подгрупповой анализ групп Галилея, Пуанкаре и редукция нелинейных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1991. – 304 с.
3. *Фущич В. И., Баранник А. Ф., Москаленко Ю. Д.* О точных решениях нелинейных уравнений Даламбера и Лиувилля в псевдоевклидовом пространстве $R_{2,2}$ // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 8. – С. 1142–1148.
4. *Фущич В. И., Баранник А. Ф., Москаленко Ю. Д.* О точных решениях нелинейных уравнений Даламбера и Лиувилля в псевдоевклидовом пространстве $R_{2,2}$ // Там же. – № 9. – С. 1237–1243.
5. *Баранник А. Ф., Москаленко Ю. Д.* О редукции ультрагиперболического уравнения Даламбера в псевдоевклидовом пространстве $R_{2,2}$ // Докл. АН УССР. – 1990. – № 9. – С. 3–6.
6. *Barannyk A. F., Yuryk I. I.* On a new method for constructing exact solutions of the nonlinear differential equations of mathematical physics // J. Phys. A: Math. and Gen. – 1998. – **31**. – P. L4899–L4907.
7. *Баранник А. Ф., Юрик І. І.* Новий метод побудови розв'язків нелінійних хвильових рівнянь // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 5. – С. 583–593.
8. *Смирнов В. И., Соболев С. Л.* Новый метод решения плоской задачи упругих колебаний // Тр. Сейсмол. ин-та АН СССР. – 1932. – **20**. – 37 с.
9. *Смирнов В. И., Соболев С. Л.* О применении нового метода к изучению колебаний в пространстве при наличии осевой симметрии // Там же. – 1933. – **29**. – С. 43–51.
10. *Фущич В. И., Жданов Р. З., Ревенко И. В.* Общее решение нелинейного волнового уравнения и уравнения эйконала // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 11. – С. 1471–1486.

Одержано 22.04.99