УДК 511

А. В. Бондаренко (Нац. ун-т им. Т. Шевченко, Киев)

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОГО КЛАССА ДИОФАНТОВЫХ УРАВНЕНИЙ

We consider the problem of existence of solutions of an equation $\frac{X}{Y}+\frac{Y}{Z}+\frac{Z}{X}=m$ in terms of natural numbers for different $m \in N$. We prove that the equation possesses solutions in terms of natural numbers for $m=a^2+5$, $a \in Z$, and possesses no solutions for $m=4p^2$, $p \in N$, p is not divisible by three. We also prove that, for $n \geq 12$, an equation

$$\frac{b_1}{b_2}+\frac{b_2}{b_3}+\dots+\frac{b_{n-1}}{b_n}+\frac{b_n}{b_1}=m,$$

possesses solutions in terms of naturAl numbers if and only if $m \geq n$, $m \in N$.

Розглядається питання про існування розв'язків рівняння $\frac{X}{Y}+\frac{Y}{Z}+\frac{Z}{X}=m$ в натуральних числах при різних $m \in N$. Доведено, що при $m=a^2+5$, $a \in Z$, рівняння має розв'язки в натуральних числах, а при $m=4p^2$, $p \in N$, p не ділиться на 3, не має розв'язків. Також доведено, що при $n \geq 12$ рівняння

$$\frac{b_1}{b_2}+\frac{b_2}{b_3}+\dots+\frac{b_{n-1}}{b_n}+\frac{b_n}{b_1}=m$$

має розв'язки в натуральних числах тоді і тільки тоді, коли $m \geq n$, $m \in N$.

В работе [1] поставлен вопрос: имеет ли уравнение $\frac{X}{Y}+\frac{Y}{Z}+\frac{Z}{X}=4$ решение в натуральных числах?

В настоящей работе исследуется уравнение вида $\frac{X}{Y}+\frac{Y}{Z}+\frac{Z}{X}=m$ при различных $m \in N$.

Заметим, что автору неизвестны все значения параметра $m \in N$, для которых уравнение $\frac{X}{Y}+\frac{Y}{Z}+\frac{Z}{X}=m$ имеет решение в натуральных числах.

Для дальнейшего изложения нам понадобятся леммы 1 – 7; некоторые, в силу их очевидности, приводим без доказательства.

Лемма 1. *Уравнение* $\frac{X}{Y}+\frac{Y}{Z}+\frac{Z}{X}=m$, *где* m — *параметр, имеет решение в натуральных числах тогда и только тогда, когда уравнение* $X^3+Y^3+Z^3=mXYZ$ *имеет такое решение.*

Лемма 2. *Пусть*

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\frac{a_3}{a_1}=m_1, \qquad \frac{a_4}{a_5}+\frac{a_5}{a_6}+\frac{a_6}{a_4}=m_2,$$

$$\frac{a_7}{a_8}+\frac{a_8}{a_9}+\frac{a_9}{a_7}=m_3, \qquad \frac{a_{10}}{a_{11}}+\frac{a_{11}}{a_{12}}+\frac{a_{12}}{a_{10}}=m_4.$$

Тогда найдутся такие $b_1, b_2, \dots, b_n \in N$, $n \geq 12$, *что*

$$\frac{b_1}{b_2}+\frac{b_2}{b_3}+\dots+\frac{b_{n-1}}{b_n}+\frac{b_n}{b_1}=m_1+m_2+m_3+m_4+n-12.$$

Лемма 3. *Пусть* $X^3 + Y^3 + Z^3 = mXYZ$ *для некоторых* $X, Y, Z \in N$. *Тогда это уравнение имеет решение* (X, Y, Z) *такое, что* $(X, Y) = 1$, $(Y, Z) = 1$, $(X, Z) = 1$, $X, Y, Z \in N$.

Лемма 4. *Пусть уравнение* $X^3 + Y^3 + Z^3 = mXYZ$, $m \,\vdots\, 4$, *имеет решение в натуральных числах. Тогда, согласно лемме* 3, *существует такое решение, что* $(X, Y) = 1$, $(Y, Z) = 1$, $(X, Z) = 1$ *и при этом только одно из* X, Y, Z *делится на* 2. *Так как уравнение симметрично, не ограничивая общности утверждений, можно полагать, что* $Z \,\vdots\, 2$. *Тогда если* $\frac{X+Y}{Z} = \frac{S}{D}$, *где* S, $D \in N$, $(S, D) = 1$, *то* $S \,\vdots\, 4$.

Лемма 5. *Пусть уравнение* $X^3 + Y^3 + Z^3 = mXYZ$, $m \,\vdots\, 4$, *имеет решение в натуральных числах. Тогда для некоторых* S, $D \in N$, $(S, D) = 1$ *и* $t \in N$ *выполняется равенство* $(S^3 + mS^2D - 2D^3)^2 - (2S^3 + 2D^3)^2 = t^2$.

Докажем сначала, что при условиях леммы 5 для некоторого $n \in Q$, $n > 0$, выполняется равенство

$$X = \frac{Y}{2(n^3+1)}\left(n^3 + mn^2 - 2 \pm \sqrt{(n^3 + mn^2 - 2)^2 - (2n^3 + 2)^2}\right);$$

X, Y – нечетные, причем рассматривается либо $+$ либо $-$.

Если уравнение $X^3 + Y^3 + Z^3 = mXYZ$, $m \,\vdots\, 4$, имеет решение в натуральных числах, то, согласно лемме 4, существует такое решение, что X, Y — нечетные, Z — четное. Перепишем уравнение в виде $X^3 + Y^3 + Z^3 - mXYZ = (m-3)XYZ$. Воспользовавшись известным тождеством, получим $(X+Y+Z)(X^2 + Y^2 + Z^2 - XY - XZ - YZ) = (m-3)XYZ$. Положим $X + Y = nZ$, $n \in Q$. Это можно сделать, так как $X, Y, Z \in N$. При этом получим

$$(n+1)\left(X^2 + Y^2 - XY + \frac{(X+Y)^2}{n^2} - \frac{(X+Y)^2}{n}\right) = (m-3)XY,$$

или с помощью элементарных преобразований

$$X = \frac{Y}{2(n^3+1)}\left(n^3 + mn^2 - 2 \pm \sqrt{(n^3 + mn^2 - 2)^2 - (2n^3 + 2)^2}\right),$$

X, Y – нечетные.

Теперь видно, что $(n^3 + mn^2 - 2)^2 - (2n^3 + 2)^2 = t_1^2$, где $t_1 \in Q$, в противном случае X — иррациональное.

Пусть $n = \frac{S}{D}$, $t_1 = \frac{P}{q}$; $D, P, q \in N$, $(S, D) = 1$, $(P, q) = 1$. При этом

$$\left(\frac{S^3}{D^3} + \frac{mS^2}{D^2} - 2\right)^2 - \left(2\frac{S^3}{D^3} + 2\right)^2 = \left(\frac{P}{q}\right)^2$$

и

$$(S^3 + mS^2D - 2D^3)^2 - (2S^3 + 2D^3)^2 = \frac{P^2D^6}{q^2}.$$

Так как левая часть равенства принадлежит N, то правая часть также принадлежит N. При этом $\frac{P^2D^6}{q^2}$ есть полный квадрат рационального числа, поэтому $\dfrac{P^2D^6}{q^2} \in N$. И для некоторого $t \in N$ $(S^3 + mS^2D - 2D^3)^2 - (2S^3 + 2D^3)^2 = t^2$, так как X, Y – нечетные, Z — четное, то, согласно лемме 4, $S \vdots 4$. Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Пусть* $(S^3 + mS^2D - 2D^3,\ 2S^3 + 2D^3) = q$, $S, D \in N$, $S \vdots 4$. *Тогда* $2(m^3 - 27) \vdots q \vdots 2$.

Доказательство леммы тривиально, поэтому мы его не приводим.

Лемма 7. *Пусть* $S \vdots 4$, $2(m^3 - 27) \vdots q \vdots 2$, $\alpha, \beta, q \in N$, $(\alpha, \beta) = 1$ *и* $m \vdots 4$, $S, D \in N$, $(S, D) = 1$. *Тогда система*

$$S^3 + mS^2D - 2D^3 = q(\alpha^2 + \beta^2),$$

$$2S^3 + 2D^3 = 2q\alpha\beta$$

не имеет решения.

Доказательство. Поскольку $S \vdots 2$, то из условия $(S, D) = 1$ следует, что D — нечетное и $S^3 + D^3$ — нечетное, но $S^3 + D^3 = q\alpha\beta$, поэтому q — также нечетное, что противоречит условию леммы 7. Лемма 7 доказана.

Теорема 1. *Пусть* $m = a^2 + 5$, $a \in Z$, *тогда уравнение* $\dfrac{X}{Y} + \dfrac{Y}{Z} + \dfrac{Z}{X} = m$ *имеет решение в натуральных числах.*

Доказательство. Согласно лемме 1, достаточно доказать, что уравнение $X^3 + Y^3 + Z^3 = (a^2 + 5)XYZ$ для любого $a \in Z$ имеет решение в натуральных числах. Положим $X = 2$, $X = a^2 - a + 1$, $Z = a^2 + a + 1$. Легко убедиться, что (X, Y, Z) является решением уравнения. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Если* $n \geq 12$, *то уравнение* $\dfrac{b_1}{b_2} + \dfrac{b_2}{b_3} + \dots + \dfrac{b_{n-1}}{b_n} + \dfrac{b_n}{b_1} = m$ *имеет решение в натуральных числах, если* $m \geq n$, *и не имеет их — в противном случае,* $m, n \in N$.

Доказательство. Если $n > m$, то, согласно теореме о средних,

$$\frac{\dfrac{b_1}{b_2} + \dfrac{b_2}{b_3} + \dots + \dfrac{b_{n-1}}{b_n} + \dfrac{b_n}{b_1}}{n} \geq \sqrt[m]{\frac{b_1}{b_2}\frac{b_2}{b_3} \dots \frac{b_{n-1}}{b_n}\frac{b_n}{b_1}},$$

или

$$\frac{b_1}{b_2} + \frac{b_2}{b_3} + \dots + \frac{b_{n-1}}{b_n} + \frac{b_n}{b_1} \geq n,$$

но $n > m$, поэтому уравнение не имеет решения.

Пусть $m \geq n$, тогда, согласно теореме 1 и лемме 2, уравнение

$$\frac{b_1}{b_2} + \frac{b_2}{b_3} + \dots + \frac{b_{n-1}}{b_n} + \frac{b_n}{b_1} = p_1^2 + 5 + p_2^2 + 5 + p_3^2 + 5 + p_4^2 + 5 + n - 12$$

для любых $p_1, p_2, p_3, p_4 \in Z$ имеет решение в натуральных числах. Лагранж [2] доказал, что любое $m \in Z$, $m \geq 0$, можно представить в виде $m = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2$, где $p_1, p_2, p_3, p_4 \in Z$. Таким образом, если $m \geq n + 8$, то уравнение $\dfrac{b_1}{b_2} + \dfrac{b_2}{b_3} + \dots + \dfrac{b_{n-1}}{b_n} + \dfrac{b_n}{b_1} = m$ имеет, по крайней мере, одно решение в натуральных числах. Для любого $n \geq 12$ и $n + 8 > m \geq n$ легко найти соответствующие решения уравнений. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Если* $m = 4p^2$, $p \in N$, p *не делится на* 3, *то уравнение* $\dfrac{X}{Y} + \dfrac{Y}{Z} + \dfrac{Z}{X} = m$ *не имеет решений в натуральных числах.*

Для доказательства теоремы достаточно показать, что при $S \vdots 4$, $2(m^3 - 27) \vdots q \vdots 2$, $\alpha, \beta, q \in N$, $(\alpha, \beta) = 1$ и $m \vdots 4$, $S, D \in N$, $(S, D) = 1$ система

$$S^3 + mS^2D - 2D^3 = q(\alpha^2 + \beta^2),$$
$$2S^3 + 2D^3 = q(\alpha^2 - \beta^2)$$

не имеет решения.

Согласно лемме 1, если уравнение $\dfrac{X}{Y} + \dfrac{Y}{Z} + \dfrac{Z}{X} = m$ имеет решение в натуральных числах, $m \vdots 4$, то и уравнение $X^3 + Y^3 + Z^3 = mXYZ$ имеет такое решение. Тогда, согласно лемме 5, для некоторых $S, D, t \in N$, $(S, D) = 1$, $S \vdots 4$, выполняется равенство $(S^3 + mS^2D - 2D^3)^2 - (2S^3 + 2D^3)^2 = t^2$. Заметим, что $S^3 + mS^2D - 2D^3 \geq 0$, в противном случае $(2S^3 + 2D^3)^2 > (S^3 + mS^2D - 2D^3)^2$, так как $2D^3 - S^3 - mS^2D < 2S^3 + 2D^3$. Из теории неопределенных уравнений [2] известно, что если $X^2 - Y^2 = Z^2$, $X, Y, Z \in N$, то $X = q(\alpha^2 + \beta^2)$, $Y = q(\alpha^2 - \beta^2)$ или $2q\alpha\beta$, $\alpha, \beta \in N$, $(\alpha, \beta) = 1$, $q = (X, Y)$. Таким образом,

$$S^3 + mS^2D - 2D^3 = q(\alpha^2 + \beta^2),$$
$$2S^3 + 2D^3 = q(\alpha^2 - \beta^2) \quad \text{или} \quad 2q\alpha\beta,$$

q, согласно лемме 6, такое, что $2(m^3 - 27) \vdots q \vdots 2$.

Согласно лемме 7, система

$$S^3 + mS^2D - 2D^3 = q(\alpha^2 + \beta^2),$$
$$2S^3 + 2D^3 = 2q\alpha\beta$$

не имеет решения. Таким образом, если система

$$S^3 + mS^2D - 2D^3 = q(\alpha^2 + \beta^2),$$
$$2S^3 + 2D^3 = q(\alpha^2 - \beta^2)$$

также не имеет решения, то для данного $m \in N$, $m \vdots 4$, уравнение $\dfrac{X}{Y} + \dfrac{Y}{Z} + \dfrac{Z}{X} = m$ не имеет решений в натуральных числах.

Покажем теперь, что если система

$$S^3 + mS^2D - 2D^3 = q(\alpha^2 + \beta^2), \tag{1}$$
$$2S^3 + 2D^3 = q(\alpha^2 - \beta^2) \tag{2}$$

имеет решения, $m, S, D, q, \alpha, \beta \in N$, $(\alpha, \beta) = 1$, $2(m^3 - 27) \vdots q \vdots 2$, $(S, D) = 1$, $m = 4p^2$, $p \in N, p$ не делится на 3, то $\dfrac{q}{2} = 1 \pmod{12}$ или $11 \pmod{12}$, D не делится на 9, каноническое разложение D на простые множители не имеет простых чисел вида $3g + 2$, $g \in N$.

Из удвоенного равенства (1) вычтем равенство (2). В результате получим $2S^3 + 2mS^2D - 4D^3 - 2S^3 - 2D^3 = q(\alpha^2 + 3\beta^2)$, откуда следует $D\,((2pS)^2 - 3D^2) = \dfrac{q}{2}(\alpha^2 + 3\beta^2)$, $\left(D, \dfrac{q}{2}\right) = 1$ (см. лемму 6). Поэтому $(2pS)^2 - 3D^2 \vdots \dfrac{q}{2}$, $\alpha^2 + 3\beta^2 \vdots D$, D — нечетное.

Если $D \vdots 9$, то $\alpha^2 + 3\beta^2 \vdots D$, $\alpha \vdots 3$ и $\beta \vdots 3$, но $(\alpha, \beta) = 1$ и, следовательно, D не делится на 9.

Известно [3], что если $(\alpha, \beta) = 1$, то нечетными простыми делителями числа $\alpha^2 + 3\beta^2$ кроме 3 могут быть числа вида $1 \pmod 3$. Известно [3], что если $X^2 - 3Y^2 \vdots \frac{q}{2}$, то все простые нечетные делители $\frac{q}{2}$ имеют вид 1, $11 \pmod{12}$, или являются делителями числа $(X^2, 3Y^2)$, но $(D, \frac{q}{2}) = 1$, p не делится на 3, а если $S \vdots 3$, то $\frac{q}{2}$ не делится на 3, так как $(S, \frac{q}{2}) = 1$ (см. лемму 6). Таким образом, $(\frac{q}{2}, (2pS)^2, 3D^2)) = 1$ и все простые делители $\frac{q}{2}$ имеют вид $1, 11 \pmod{12}$. Осталось заметить, что $1 \pmod{12} \times 11 \pmod{12} = 11 \pmod{12}$, $(1, 11 \pmod{12}))^2 = 1 \pmod{12}$, поэтому $\frac{q}{2} = 1 \pmod{12}$ или $11 \pmod{12}$.

Покажем теперь, что если система (1), (2) имеет решения, $m, S, D, q, \alpha, \beta \in N$, $(\alpha, \beta) = 1$, $2(m^3 - 27) \vdots q \vdots 2$, $(S, D) = 1$, $m = 4p^2$, $p \in N$, p не делится на 3, то S не делится на 3, $\frac{q}{2} = 3 \pmod 4$.

Вычтем из равенства (1) равенство (2) и положим $m = 4p^2$. В результате получим $4p^2S^2D - 4D^3 - S^3 = 2q\beta^2$, или $4p^4S^2D - 4D^3p^2 - S^3p^2 = \frac{q}{2}(2p\beta)^2$. Сложив (1) и (2), будем иметь $3S^3 + 4p^2S^2D = 2q\alpha^2 = \frac{q}{2}(2\alpha)^2$, $(S, \frac{q}{2}) = 1$ (см. лемму 6), поэтому $2\alpha \vdots S$. Пусть $\frac{2\alpha}{S} = \alpha_1$, $\alpha_1 \in N$, тогда

$$3S + 4p^2D = \frac{q}{2}\alpha_1^2. \tag{3}$$

Умножив обе части равенства (3) на D^2, получим $3SD^2 + 4p^2D^3 = \frac{q}{2}(\alpha_1 D)^2$. Учитывая, что $4p^4S^2D - 4D^3p^2 - S^3p^2 = \frac{q}{2}(2p\beta)^2$, сложим два последних равенства. В результате будем иметь

$$S(3D^2 + 4p^4SD - S^2p^2) = \frac{q}{2}((2p\beta)^2 + (\alpha_1 D)^2).$$

Известно [3], что если $X^2 + Y^2 \vdots p$, $p = 3 \pmod 4$, то $X \vdots p$, $Y \vdots p$, $\left(S, \frac{q}{2}\right) = 1$, поэтому если $S \vdots 3$, то $2p\beta \vdots 3$ и $\alpha_1 D \vdots 3$, но p не делится на 3, поэтому $\beta \vdots 3$, а из того, что $(\alpha, \beta) = 1$, $2\alpha \vdots \alpha_1$, следует, что α_1 не делится на 3, D не делится на 3, потому что $(S, D) = 1$, однако $\alpha_1 D \vdots 3$ — противоречие. Поэтому S не делится на 3.

Пусть $S = 2^f t$, $f, t \in N$, t — нечетное. $(S, 3D^2 + 4p^4SD - S^2p^2) = 1$, в противном случае $(S, D) \neq 1$, $(2pB)^2 + (\alpha_1 D)^2 \vdots S$. Известно, что если $X^2 + Y^2 \vdots S$, то в каноническом разложении S на простые множители нет простых множителей вида $3 \pmod 4$ в нечетных степенях, поэтому $t = 1 \pmod 4$.

Таким образом, $t(3D^2 + 4p^4SD - S^2p^2) = \frac{q}{2}\frac{(2pB)^2 + (\alpha_1 D)^2}{2^f}$, левая часть равенства нечетная, поэтому и правая нечетная. При этом $\frac{(2pB)^2 + (\alpha_1 D)^2}{2^f} =$

$= 1 \pmod 4$, $t = 1 \pmod 4$, D – нечетное, так как $S \vdots 4$, $3D^2 + 4p^4 SD - S^2 p^2 = 3 \pmod 4$ и $\frac{q}{2} = 3 \pmod 4$.

Следовательно, $\frac{q}{2} = 11 \pmod{12}$ и $\frac{q}{2} = 3 \pmod 4$, поэтому $\frac{q}{2} = 2 \pmod 3$. Если $D = 1 \pmod 3$, то (см. (3)) $4p^2 = 1 \pmod 3$, $3S + 4p^2 D = 1 \pmod 3$, $\frac{q}{2}\alpha_1^2 = 1 \pmod 3$, $\alpha_1^2 = 2 \pmod 3$, но полный квадрат не может иметь вид $2 \pmod 3$. Если $D \vdots 3$, то $\frac{D}{3} = 1 \pmod 3$. Далее (см. (3)), $\frac{q}{2} = 2 \pmod 3$, $\alpha_1 \vdots 3$, $S + 4p^2 \frac{D}{3} \vdots 3$, $4p^2 \frac{D}{3} = 1 \pmod 3$ и $S = 2 \pmod 3$, $\alpha \vdots 3$ (см. (3)) и $\beta^2 = 2 \pmod 3$ — противоречие.

Поэтому уравнение не имеет решения. Теорему 3 доказано.

1. *Серпинский В. К.* 250 задач по элементарной теории чисел. – М.: Просвещение, 1968. – 160 с.
2. *Михелович Ш. Х.* Теория чисел. – М.: Высш. шк., 1962. – 260 с.
3. *Бухштаб А. А.* Теория чисел. – М.: Просвещение, 1966. – 384 с.

Получено 13.03.98,
после доработки – 28.05.98