УДК 517.5

А. С. Федоренко (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

НАИЛУЧШИЕ m-ЧЛЕННЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ КЛАССОВ (ψ, β)-ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

An estimate exact in order is obtained for the best trigonometric approximation of classes $L^{\psi}_{\beta,p}$ of functions of one variable in the space L_q in the case where $1 < p \le 2 \le q < \infty$.

Одержано точну за порядком оцінку найкращого тригонометричного наближення классів $L^{\psi}_{\beta,p}$ функцій однієї змінної в просторі L_q у випадку $1 < p \le 2 \le q < \infty$.

Пусть L_q — пространство 2π-периодических функций $f(x)$ с конечной нормой

$$\|f(x)\|_q = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^q \, dx \right)^{1/q}, \quad 1 \le q < \infty.$$

В настоящей работе исследуется поведение величин

$$e_m(f; L_q) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{\Theta_m} \inf_{P(\Theta_m; x)} \|f - P(\Theta_m; x)\|_q, \tag{1}$$

где $P(\Theta_m; x)$ — полиномы вида $\sum_{k=1}^{m} a_k e^{in_k x}$, а Θ_m — набор из m целых чисел $n_1, \ldots, n_m$, a_k— произвольные коэффициенты. Величины (1) называют наилучшими m-членными тригонометрическими приближениями. Если F — некоторый функциональный класс, то полагаем

$$e_m(F; L_q) = \sup_{f \in F} e_m(f; L_q). \tag{2}$$

Отметим, что величина (1) в более общем виде была введена С. Б. Стечкиным [1] при исследовании сходимости ортогональных рядов. Первые оценки наилучших тригонометрических приближений для некоторых конкретных функций одной переменной были получены Р. С. Исмагиловым [2]. Затем тематика получила развитие в работах [3 – 5], где приведена подробная библиография.

В настоящей работе в качестве классов F будем использовать классы периодических функций одной переменной $L^{\psi}_{\beta,p}$, которые были введены А. И. Степанцом [6]. Для удобства напомним их определение (см., например, [7, с. 25]).

Пусть $f(x)$ — 2π-периодическая суммируемая функция и

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \tag{3}$$

— ее ряд Фурье, $c_k = \dfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt$. Будем предполагать, что для $f(x)$ выполнено условие $\int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = 0$. Пусть, далее, $\psi(\cdot)$ — произвольная функция натурального аргумента, β — произвольное фиксированное действительное число. Если ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{i\pi\beta}{2} \operatorname{sgn} k}}{\psi(|k|)} c_k e^{ikx}$$

является рядом Фурье некоторой суммируемой функции, то назовем ее, следуя А. И. Степанцу, (ψ, β)-производной функции $f(\cdot)$ и обозначим $f_\beta^\psi(\cdot)$, т. е.

$$f_\beta^\psi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{i\pi\beta}{2}\operatorname{sgn} k}}{\psi(|k|)} c_k e^{ikt}.$$

Множество функций $f(\cdot)$, удовлетворяющих такому условию, обозначают $L_{\beta,p}^\psi$. Будем писать $f \in L_{\beta,p}^\psi$, если $f \in L_\beta^\psi$ и $f_\beta^\psi \in U_p \overset{\text{def}}{=} \{\varphi\colon \varphi \in L_p, \|\varphi\|_p \le \le 1\}$, $1 \le p \le \infty$.

Приведем еще некоторые обозначения и сформулируем утверждения, необходимые в дальнейшем.

Пусть $f(x) \in L_p$, $1 < p < \infty$, и (3) — ее ряд Фурье. Для $s \in N$ рассмотрим множество

$$\rho(s) = \{k\colon 2^{s-1} \le |k| < 2^s\}$$

и положим

$$\delta_s(f; x) = \sum_{k \in \rho(s)} c_k e^{ikx}.$$

Тогда $f(x)$ можно представить в виде

$$f(x) = \sum_{s \in N} \sum_{k \in \rho(s)} c_k(f) e^{ikx}.$$

Будем называть функции $\mu_1(n)$ и $\mu_2(n)$ функциями одного порядка и писать $\mu_1(n) \asymp \mu_2(n)$, если для каждого $n \in N$ $C_1\mu_1(n) \le \mu_2(n) \le C_2\mu_1(n)$. Если же $\mu_1(n) \le C_2\mu_2(n)$ или $\mu_2(n) \le C_1\mu_1(n)$, то будем в некоторых случаях писать $\mu_1(n) << \mu_2(n)$ или $\mu_2(n) << \mu_1(n)$ соответственно.

Здесь и далее через $C_1, C_2, \ldots$ будем обозначать константы, которые могут зависеть лишь от параметров, определяющих класс, и от метрики, в которой измеряется погрешность приближения.

В дальнейшем нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1 [4]. *Для любого тригонометрического полинома*

$$T(\Theta_m; x) = \sum_{k=1}^{m} c_k e^{in_k x}$$

и для любого $n \le m$ существует тригонометрический полином $T(\Theta_n, x)$, содержащий не более n гармоник и такой, что

$$\|T(\Theta_m, x) - T(\Theta_n, x)\|_q \le C_3\left(\frac{m}{n}\right)^{1/2} \|T(\Theta_m, x)\|_2, \quad 2 < q < \infty,$$

причем имеет место вложение $\Theta_n \subset \Theta_m$.

Далее, через $D_{p,q,\varepsilon}$ будем обозначать множество положительных невозрастающих функций $\psi(\cdot)$, которые при $1 < p \le q < \infty$ удовлетворяют следующим условиям:

1) существует $\varepsilon > 0$ такое, что последовательность $\psi(k)\, k^{1/p-\varepsilon}$ не убывает;
2) последовательность $\psi(k)\, k^{1/p-1/q}$ не возрастает.
3) существует абсолютная постоянная C такая, что

$$\frac{\psi(k)}{\psi(2k)} \le C, \quad k \in N. \tag{4}$$

Теорема. *Пусть* $1 < p \le 2 \le q < \infty$, $\psi \in D_{p,q,\varepsilon}$, $\beta \in R$. *Тогда справедливо соотношение*

$$e_m(L^{\psi}_{\beta,p}; L_q) \asymp \psi(m^{q/2})\, m^{(q/2)(1/p-1/q)}.$$

Доказательство. Сначала установим оценку сверху. Представим ряд функций Фурье функции $f(x) \in L^{\psi}_{\beta,p}$ в терминах $\delta_s(f;x)$ и по заданному m подберем $l \in N$ таким, чтобы выполнялось неравенство $2^l < m \le 2^{l+1}$. Рассмотрим приближающий полином вида

$$P(\Theta_{2^l}; x) = \sum_{s=0}^{l-1} \delta_s(f;x) + \sum_{l \le j < \gamma l} P(\Theta_{k_j}; x),$$

где полиномы $P(\Theta_{k_j}; x)$ построены таким образом, чтобы для $j \in [l; \gamma l)$ выполнялось неравенство

$$\left\| \delta_j(f;x) - P(\Theta_{k_j}; x) \right\|_q \le \left(\frac{2^j}{k_j} \right)^{1/2} \left\| \delta_j(f;x) \right\|_2, \quad 2 \le q < \infty.$$

Это возможно сделать в силу леммы 1. Поскольку „номера" Θ_{k_j} содержатся во множестве номеров гармоник, входящих в „блок" $\delta_j(f;x)$, то применима теорема Литтлвуда – Пэли (см. [8], гл. XV), в силу которой при любых $\gamma > 1$ и k_j таких, что $\sum_{l \le j < \gamma l} k_j << 2^l$, имеем

$$\left\| f(x) - P(\Theta_{2^l}; x) \right\|_q = \left\| \sum_{s \in N} \delta_s(f;x) - \sum_{s=0}^{l-1} \delta_s(f;x) - \sum_{l \le j < \gamma l} P(\Theta_{k_j}; x) \right\|_q <<$$

$$<< \left\| \left(\sum_{l \le j < \gamma l} \left| \delta_j(f;x) - P(\Theta_{k_j}; x) \right|^2 \right)^{1/2} \right\|_q + \left\| \sum_{\gamma l \le j < \infty} \delta_j(f;x) \right\|_q =$$

$$= I_1 + I_2. \tag{5}$$

Оценка для I_2 известна. Она следует из теоремы 5.4 [7, с. 215]

$$I_2 << \psi(2^{\gamma l})\, 2^{\gamma l(1/p-1/q)}. \tag{6}$$

Оценим I_1. В [9] было показано, что для $f \in L^{\psi}_{\beta,p}$, $\psi \in D_{p,q,\varepsilon}$, справедлива оценка

$$\left\| \delta_s(f;x) \right\|_p << \psi(2^s) \left\| \delta_s(f^{\psi}_{\beta}; x) \right\|_p. \tag{7}$$

Применяя последовательно неравенство Минковского, лемму 1, неравенство разных метрик [10, с. 159] и оценку (7), получаем

$$I_1 = \left\| \left(\sum_{l \le j < \gamma l} \left| \delta_j(f;x) - P(\Theta_{k_j}; x) \right|^2 \right)^{1/2} \right\|_q <<$$

$$\ll \left(\sum_{l \le j < \gamma l} \left\| \delta_j(f;x) - P(\Theta_{k_j};x) \right\|_q^2 \right)^{1/2} \ll \left(\sum_{l \le j < \gamma l} \frac{2^j}{k_j} \left\| \delta_j(f;x) \right\|_2^2 \right)^{1/2} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{l \le j < \gamma l} \frac{2^{2j/p}}{k_j} \left\| \delta_j(f;x) \right\|_p^2 \right)^{1/2} \ll \left(\sum_{l \le j < \gamma l} \frac{2^{2j/p}}{k_j} \psi^2(2^j) \right)^{1/2}. \tag{8}$$

Далее положим $\gamma = q/2$ и

$$k_j = \left[\frac{2^{j/p}\psi(2^j)}{2^{\gamma l/p}\psi(2^{\gamma l})} 2^l \right] + 1, \quad j = l, \ldots \gamma l.$$

Подсчитаем количество гармоник, входящих в $P(\Theta_{k_j};x)$. Принимая во внимание, что последовательность $\psi(k)\,k^{1/p-\varepsilon}$ не убывает, имеем

$$\sum_{l \le j < \gamma l} k_j = \sum_{l \le j < \gamma l} \left(\left[\frac{2^{j/p}\psi(2^j)}{2^{\gamma l/p}\psi(2^{\gamma l})} 2^l \right] + 1 \right) \le \frac{2^l}{2^{\gamma l/p}\psi(2^{\gamma l})} \sum_{l \le j < \gamma l} 2^{j/p}\psi(2^j) + \gamma l =$$

$$= \frac{2^l}{2^{\gamma l/p}\psi(2^{\gamma l})} \sum_{l \le j < \gamma l} 2^{j/p}\psi(2^j) 2^{j\varepsilon} 2^{-j\varepsilon} + \gamma l \ll \frac{2^l}{2^{\gamma l/p}\psi(2^{\gamma l})} \psi(2^{\gamma l}) 2^{\gamma l(1/p-\varepsilon)} \times$$

$$\times \sum_{l \le j < \gamma l} 2^{j\varepsilon} + \gamma l \ll \frac{2^l}{2^{\gamma l/p}\psi(2^{\gamma l})} \psi(2^{\gamma l}) 2^{\gamma l(1/p-\varepsilon)} 2^{\gamma l\varepsilon} + \gamma l \ll 2^l.$$

Таким образом, количество гармоник не превышает по порядку 2^l. Подставляя в (8) вместо k_j его значение, находим

$$I_1 \ll \left(\sum_{l \le j < \gamma l} \frac{2^{2j/p}}{2^{j/p}\psi(2^j) 2^l} 2^{\gamma l/p} \psi(2^{\gamma l}) \psi^2(2^j) \right)^{1/2} \ll$$

$$\ll \left(\frac{2^{\gamma l/p}\psi(2^{\gamma l})}{2^{l/2}} \sum_{l \le j < \gamma l} 2^{j/p}\psi(2^j) \right)^{1/2} \ll \frac{2^{\gamma l/p}\psi(2^{\gamma l})}{2^{(l/2)(q/q)}} \ll$$

$$\ll \psi(2^{\gamma l})\, 2^{\gamma l(1/p-1/q)}. \tag{9}$$

Сопоставляя (5), (6) и (9), а также учитывая, что $\gamma = q/2$, получаем оценку сверху.

Докажем оценку снизу. Будем пользоваться соотношением из [11, с. 25]

$$e_m(f;L_q) = \inf_{\Theta_m} \sup_{\substack{P \in L^{\perp}(\Theta_m) \\ \|P\|_{q'} \le 1}} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x) P(x)\, dx \right|, \tag{10}$$

где $L^{\perp}(\Theta_m)$ — множество функций, ортогональных пространству тригонометрических полиномов с „номерами" гармоник из множества Θ_m, а $1/q' + 1/q = 1$.

Подберем l так, чтобы было $2m < 2^l \le 3m$, и рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{1}{m^{1-1/p}} \psi(2^l) f_1(x), \tag{11}$$

где $f_1(x)=\sum_{k=2^l}^{2^{l+1}} e^{ikx}$. Покажем, что $\left\|f_\beta^\psi(x)\right\|_p \le C_3$. В [9] было показано, что

$$\left\|(f_1)_\beta^\psi(x)\right\|_p \ll \frac{1}{\psi(2^l)}\left\|f_1(x)\right\|_p, \quad 1<p<\infty. \tag{12}$$

Далее воспользуемся известным фактом (см., например, [7, с. 214])

$$\left\|\sum_{k=2^l}^{2^{l+1}} e^{ikx}\right\|_p \asymp 2^{l(1-1/p)}. \tag{13}$$

Сопоставляя (11) – (13), имеем

$$\left\|f_\beta^\psi(x)\right\|_p \ll \frac{1}{m^{1-1/p}}\psi(2^l)\frac{1}{\psi(2^l)}2^{l(1-1/p)} \le C_3.$$

Из доказанного следует, что функция $f^*(x) = C_3^{-1}f(x)$ принадлежит классу $L_{\beta,p}^\psi$.

Теперь рассмотрим полином

$$P_1(x) = \sum_{j=2^l}^{2^{l+1}} e^{ijx} - \sum_{k_j\in\Theta_m}{}' e^{ik_jx},$$

где штрих означает, что вторая сумма содержит только те $k_j \in \Theta_m$, „номера" гармоник которых имеются в первой сумме.

Оценим $\|P_1(x)\|_{q'}$. Учитывая, что $q' \le 2$, имеем

$$\|P_1(x)\|_{q'} \ll 2^{l/2} + m^{1/2} \ll m^{1/2}. \tag{14}$$

В качестве полинома, содержащегося в правой части неравенства (10), рассмотрим полином $P(x) = \dfrac{1}{m^{1/2}}P_1(x)$, а в качестве функции — функцию $f^*(x)$.

Принимая во внимание оценки (12), (13) и (14), получаем

$$e_m(L_{\beta,p}^\psi; L_q) \gg \frac{1}{2^{l(1-1/p)}}\psi(2^l)\frac{1}{m^{1/2}}2^l.$$

Полагая $l = q/2\log_2 m$, из последней оценки имеем

$$e_m(L_{\beta,p}^\psi; L_q) \gg \psi(m^{q/2})\, m^{q/2}\, m^{-q/2}\, m^{q/(2p)}\, m^{-1/2} = \psi(m^{q/2})\, m^{(q/2)(1/p-1/q)}.$$

Оценка снизу, а вместе с ней и теорема доказаны.

В заключение отметим два обстоятельства.

***Замечание* 1.** В работе [12] показано, что

$$e_m(L_{\beta,p}^\psi; L_q) \asymp \psi(m)\, m^{1/p-1/2}, \quad 1<p\le 2\le q<\infty,$$

если ψ принадлежит множеству положительных невозрастающих функций, для которых выполняется (4), и существует $\varepsilon>0$ такое, что последовательность $\psi(k)\,k^{1/p+\varepsilon}$ не возрастает.

Очевидно, что полученная теорема дополняет этот результат.

***Замечание* 2.** Как известно, при $\psi(k) = k^{-r}$, $r>0$, $k \in N$, классы $L_{\beta,p}^\psi$

совпадают с классами $W^r_{\beta,p}$ и соответствующий приведенному в теореме результат для классов $W^r_{\beta,p}$ был получен ранее Э. С. Белинским [4].

1. *Стечкин С. Б.* Об абсолютной сходимости ортогональных рядов // Докл. АН СССР. – 1995. – **102**, № 1. – С. 37 – 40.
2. *Исмагилов Р. С.* Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами // Успехи мат. наук. – 1974. – **29**, вып. 3. – С. 161 – 178.
3. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – М.: Наука, 1986. – **178**. – 112 с.
4. *Белинский Э. С.* Приближение „плавающей" системой экспонент на классах гладких периодических функций // Мат. сб. – 1987. – **132**, № 1. – С. 20 – 27.
5. *Романюк А. С.* Наилучшие тригонометрические и билинейные приближения функций многих переменных из классов $B^r_{p,\theta}$ // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 11. – С. 1535 – 1547.
6. *Степанец А. И.* Классы периодических функций и приближение их элементов суммами Фурье. – Киев, 1983. – 57 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики, 83.10).
7. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 286 с.
8. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2-х т. – М.: Мир, 1965. – Т.2. – 537 с.
9. *Романюк А. С.* Неравенства для L_p-норм (ψ, β)-производных и поперечники по Колмогорову классов функций многих переменных $L^\psi_{\beta,p}$ // Исслед. по теории аппроксимации функций. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1987. – С. 92 – 105.
10. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1989. – 480 с.
11. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 424 с.
12. *Федоренко А. С.* Наилучшие m-членные тригонометрические приближения функций классов $L^\psi_{\beta,p}$ // Ряди Фур'є: теорія і застосування. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1998. – С. 356 – 364.

Получено 20.01.99