УДК 517.9

Т. В. Шовкопляс (Нац. ун-т ім. Т. Шевченка, Київ)

КРИТЕРІЙ РОЗВ'ЯЗНОСТІ ЛІНІЙНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ СИСТЕМИ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

We found necessary and sufficient conditions of the solvability of two-point boundary-value problem for systems of second order linear differential equations in the critical case where the corresponding homogeneous boundary-value problem possesses nontrivial solutions. We construct the general solution of the considered boundary-value problem.

Знайдено необхідні та достатні умови розв'язності двоточкової крайової задачі для систем лінійних диференціальних рівнянь другого порядку в критичному випадку, коли відповідна однорідна крайова задача має нетривіальні розв'язки. Побудовано загальний розв'язок розглядуваної крайової задачі.

Розглянемо неоднорідну крайову задачу

$$(P(t)x'(t))' - Q(t)x(t) = f(t), \qquad t \in [0, T], \tag{1}$$

$$lx = \alpha, \tag{2}$$

де $f(t) = \operatorname{col}(f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t))$ — n-вимірна вектор-функція: $f(t)\colon C[0, T] \to R^n$; $x(t) = \operatorname{col}(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ — n-вимірна вектор-функція така, що $x(t) \in C^1[0, T]$; $P(t)$ та $Q(t)$ — квадратні $(n \times n)$-вимірні матриці-функції і для $P(t)$ виконується умова $\det P(t) > 0$; l — лінійний векторний функціонал, визначений на просторі n-вимірних неперервних на $[0, T]$ вектор-функцій: $l = \operatorname{col}(l_1, l_2, \ldots, l_m)$, $l\colon C[0, T] \to R^m$, $0 < T < \infty$; α — m-вимірний вектор-стовпець констант, $\alpha \in R^m$.

Враховуючи умову на коефіцієнти системи (1), зробимо деякі перетворення, в результаті яких система (1) набере вигляду

$$x''(t) + A(t)W(x(t)) = P^{-1}(t)f(t), \qquad t \in [0, T], \tag{3}$$

де $A(t) = (-P^{-1}(t)Q(t), P^{-1}(t)P'(t))$ — $(n \times 2n)$-вимірна матриця, $W(x(t)) = (x^T(t)\, x'^T(t))^T$ — $(2n \times 1)$-вимірна матриця Вронського вектора $x(t)$ відповідної однорідної $(P^{-1}(t)f(t) = 0)$ системи.

Зазначимо, що рівняння (1) та (3) еквівалентні, тому міркування, проведені для рівняння (3), будуть справедливими і для рівняння (1).

Нехай $X(t)$ — $(n \times 2n)$-вимірна нормальна фундаментальна матриця однорідної системи (3) [1, с. 115], яка є розв'язком задачі Коші

$$X''(t) + A(t)W(X(t)) = 0, \qquad t \in [0, T],$$

$$W(X(0)) = E,$$

де $W(X(t))$, $t \in [0, T]$, — $(2n \times 2n)$-вимірна матриця Вронського фундаментальної матриці $X(t)$, яка для системи лінійних диференціальних рівнянь другого порядку має вигляд

$$W(X(t)) = \begin{bmatrix} X(t) \\ X'(t) \end{bmatrix}, \qquad t \in [0, T].$$

Застосовуючи метод Лагранжа до рівняння (3), знаходимо його частинний розв'язок

$$\bar{x}(t) = X(t)\int_0^t W(X(s))^{-1}\varphi(s)\,ds, \qquad t\in[0,T], \tag{4}$$

де $\varphi(s) = \begin{bmatrix} 0 \\ [P^{-1}(s)f(s)] \end{bmatrix}$ — $2n$-вимірний вектор, перші n компонент якого є компонентами нульового n-вимірного вектора, а решта утворені добутком $(n\times\times n)$-вимірної матриці $P^{-1}(s)$ на n-вимірний вектор $f(s)$.

Таким чином, загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (1) є сумою загального розв'язку відповідного однорідного рівняння та частинного розв'язку неоднорідного рівняння:

$$x(t) = X(t)c + \bar{x}(t), \tag{5}$$

де $X(t)$ — $(n\times 2n)$-вимірна фундаментальна матриця відповідного однорідного рівняння, $\bar{x}(t)$ — частинний розв'язок вигляду (4), $c = \operatorname{col}(c_1, c_2, \ldots, c_{2n})\in\in R^{2n}$ — довільний сталий вектор.

Розглянемо крайову задачу (1), (2). Загальний розв'язок (5) неоднорідної диференціальної системи рівнянь буде розв'язком крайової задачі (1), (2) тоді і тільки тоді, коли векторна константа $c\in R^{2n}$ буде задовольняти алгебраїчну систему

$$lX(\cdot)c = \alpha - l\bar{x}(\cdot), \tag{6}$$

де

$$l\bar{x}(\cdot) = lX(\cdot)\int_0^{(\cdot)} W(X(s))^{-1}[\varphi(s)]\,ds.$$

Позначимо через $D = lX(\cdot)$ матрицю розмірності $(m\times 2n)$. Тоді з (6) отримаємо алгебраїчну відносно невідомого вектора $c\in R^{2n}$ систему рівнянь з $(m\times 2n)$-вимірною матрицею D:

$$Dc = \alpha - l\bar{x}(\cdot), \qquad c\in R^{2n}. \tag{7}$$

Знайдемо умову на вектор $c\in R^{2n}$, при якій система (7), а отже, і крайова задача (1), (2) розв'язні.

Нехай $\operatorname{rank} D = n_1 \le \min\{2n, m\}$. Згідно з теоремою 3.9 [2], алгебраїчна система (7) розв'язна тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$P_{D_d^*}[\alpha - l\bar{x}(\cdot)] = 0, \qquad d = m - n_1. \tag{8}$$

В такому разі загальний розв'язок алгебраїчної системи (7) має вигляд

$$c = P_{D_r}c_r + D^+[\alpha - l\bar{x}(\cdot)], \qquad r = 2n - n_1, \quad \forall\, c_r\in R^r.$$

Підставляючи знайдений сталий вектор $c\in R^{2n}$ в (5), знаходимо загальний розв'язок крайової задачі (1), (2):

$$x(t, c_r) = X(t)P_{D_r}c_r + X(t)D^+\alpha - X(t)D^+l\bar{x}(\cdot) + \bar{x}(t) \qquad \forall\, c_r\in R^r, \tag{9}$$

де $(2n\times r)$-вимірна матриця P_{D_r} та $(d\times m)$-вимірна матриця $P_{D_d^*}$ отримані з матриць-ортопроекторів P_D розмірності $(2n\times 2n)$ та P_{D^*} розмірності $(m\times\times m)$, що проектують простори R^{2n} і R^m на нуль-простори $N(D)$ та $N(D^*)$ матриць D та D^* відповідно:

$$P_D : R^{2n} \to N(D), \quad N(D) = P_D R^{2n};$$

$$P_{D^*} : R^m \to N(D^*), \quad N(D^*) = P_{D^*} R^m.$$

В результаті таких міркувань одержуємо, що розмірність нуль-простору $N(D)$ дорівнює дефекту матриці D [3, 4]: $\dim N(D) = 2n - \operatorname{rank} D = 2n - n_1 = r$, $\operatorname{rank} D = n_1$. Враховуючи, що $\operatorname{rank} D = \operatorname{rank} D^*$ для розмірності нуль-простору $N(D^*)$, отримуємо $\dim N(D^*) = m - \operatorname{rank} D = m - n_1 = d$. Тому $\operatorname{rank} P_D = r$, а $\operatorname{rank} P_{D^*} = d$, внаслідок чого матриця P_D складається з r лінійно незалежних стовпців, а матриця P_{D^*} — з d лінійно незалежних рядків; тому матриці P_{D^*} розмірності $(m \times m)$ та P_D розмірності $(2n \times 2n)$ можна замінити відповідно $(d \times m)$-вимірною матрицею $P_{D_d^*}$ та $(2n \times r)$-вимірною матрицею P_{D_r}.

Наведені вище міркування приводять до такої теореми.

Теорема 1. *Якщо* $\operatorname{rank} D = n_1 < \min\{2n, m\}$, *то однорідна* $(\alpha = 0,\ f = 0)$ *крайова задача* (1), (2) *має* r *і лише* r *лінійно незалежних розв'язків* $(r = 2n - n_1)$. *Неоднорідна крайова задача* (1), (2) *розв'язна тоді і тільки тоді, коли* $f(t) \in C[0, T]$ *і* $\alpha \in R^{2n}$ *задовольняють умову* (8), *і при цьому має* r-*параметричну сім'ю розв'язків* (9).

З теореми 1, яка сформульована в загальному вигляді, випливають такі твердження для некритичних крайових задач.

***Наслідок* 1.** *Нехай* $\operatorname{rank} D = n_1 = m$ $(m \neq 2n)$. *Тоді* $\dim N(D^*) = m - \operatorname{rank} D = m - n_1 = d = 0$, *тому* $\operatorname{rank} P_{N(D^*)} = 0$, *і неоднорідна крайова задача* (1), (2) *завжди розв'язна і має* r-*параметричний* $(r = 2n - m)$ *розв'язок вигляду* (9).

***Наслідок* 2.** *Нехай* $\operatorname{rank} D = n_1 = 2n$. *Тоді однорідна* $(\alpha = 0,\ f = 0)$ *крайова задача* (1), (2) *має лише тривіальний розв'язок* $(r = 2n - n_1 = 0)$. *Неоднорідна крайова задача* (1), (2) *розв'язна тоді і тільки тоді, коли виконується умова* (8) $(d = m - 2n)$, *і при цьому має єдиний розв'язок*

$$x(t) = X(t) D^{-1} \alpha - X(t) D^{+} l \bar{x}(\cdot) + \bar{x}(t).$$

***Наслідок* 3.** *Нехай* $\operatorname{rank} D = n_1 = m = 2n$. *Тоді* $\det D \neq 0$ *та однорідна* $(\alpha = 0,\ f = 0)$ *крайова задача* (1), (2) *має лише тривіальний розв'язок. Неоднорідна крайова задача* (1), (2) *завжди розв'язна і при цьому має єдиний розв'язок*

$$x(t) = X(t) D^{-1} \alpha - X(t) D^{-1} l \bar{x}(\cdot) + \bar{x}(t).$$

Як приклад розглянемо випадок двоточкової крайової задачі, коли векторний функціонал l визначається таким чином:

$$lx := Mx(0) + Nx(T) = \alpha, \tag{10}$$

де M та N — сталі $(2n \times n)$-вимірні матриці, $\alpha = \operatorname{col}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in R^n$ — n-вимірний вектор.

Розглянемо крайову задачу (1), (10). Згідно з теоремою 1, матриця D квадратна, розмірності $(2n \times 2n)$ і визначається таким чином:

$$D = MX(0) + NX(T).$$

Якщо $\operatorname{rank} D = n_1 < 2n$, то, згідно з теоремою 1, крайова задача (1), (10) розв'язна тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$P_{D_d^*}[\alpha - (M\overline{x}(0) + N\overline{x}(T))] = 0, \quad d = 2n - n_1 = r, \tag{11}$$

а загальний розв'язок крайової задачі (1), (10) має вигляд

$$x(t, c_r) = X(t)P_{D_r}c_r + X(t)D^{+}\alpha -$$

$$- X(t)D^{+}(M\overline{x}(0) + N\overline{x}(T)) + \overline{x}(t) \qquad \forall\, c_r \in R^{2n}, \tag{12}$$

де P_{D_r} — $(n \times r)$-вимірна матриця, визначена так само, як в теоремі 1.

Міркування, проведені у випадку двоточкової крайової задачі, приводять до твердження, яке є частинним випадком теореми 1.

Теорема 2. *Якщо* $\operatorname{rank} D = n_1 < 2n$, *то однорідна* $(\alpha = 0,\ f = 0)$ *крайова задача* (1), (10) *має* r *і лише* r *лінійно незалежних розв'язків* $(r = 2n - n_1)$. *Неоднорідна крайова задача* (1), (2) *розв'язна тоді і тільки тоді, коли* $f(t) \in C[0, T]$ *і* $\alpha \in R^{2n}$ *задовольняють умову* (11), *і при цьому має* r*-параметричну сім'ю розв'язків* (12).

У випадку некритичних крайових задач з теореми 2 випливає такий наслідок.

Наслідок 4. *Якщо* $\operatorname{rank} D = n_1 = 2n$, $\det D \neq 0$, *то однорідна* $(\alpha = 0,\ f = 0)$ *крайова задача* (1), (2) *має лише тривіальний розв'язок. Неоднорідна крайова задача* (1), (2) *завжди розв'язна і при цьому має єдиний розв'язок*

$$x(t) = X(t)D^{-1}\alpha - X(t)D^{-1}(M\overline{x}(0) + N\overline{x}(T)) + \overline{x}(t).$$

1. *Ляшко И. И., Боярчук А. К., Гай Я. Г., Калайда А. Ф.* Математический анализ. Часть 3. Интегрирование дифференциальных уравнений. – Киев: Выща шк., 1987. – 342 с.
2. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. – 318 с.
3. *Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А.* Матрицы и вычисления. – М.: Наука, 1984. – 318 с.
4. *Каранджулов Л. И.* Импульсные краевые задачи для слабонелинейных систем с управлением // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 7. – С. 910–917.

Одержано 01.10.99