УДК 517.968

М. Азизов (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ИНФОРМАЦИОННАЯ СЛОЖНОСТЬ МНОГОМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА С ГАРМОНИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

For the class of multivariate Fredholm integral equations with kernels periodic and harmonic in each of variables and with free terms, we find the order of minimal radius of information exact in logarithmic scale.

Знайдено точний у логарифмічній шкалі порядок мінімального радіуса інформації для класу багатовимірних інтегральних рівнянь Фредгольма з періодичними гармонічними за кожною змінною ядрами та вільними членами.

1. Постановка задачи. Пусть V, E и K — линейные нормированные пространства. Пространство линейных непрерывных операторов из V в E будем обозначать через $\mathfrak{L}(V, E)$. Кроме того, $\mathfrak{L}(E) = \mathfrak{L}(E, E)$. Предположим, что V вложено в E с константой вложения 1 и $J_V \in \mathfrak{L}(V, E)$ — оператор вложения V в E. Предположим еще, что существует линейный непрерывный оператор T, ставящий в соответствие каждому элементу $k \in K$ оператор $T_k \in \mathfrak{L}(E)$. Зафиксируем некоторые подмножества $V_0 \subset V$ и $K_0 \subset K$ такие, что для любого $k \in K_0$ справедливо включение $(I - T_k)^{-1} \in \mathfrak{L}(E)$, где I — тождественный оператор, и обозначим через $X_0 = K_0 \times V_0$ класс операторных уравнений

$$u - T_k u = f, \quad k \in K_0, \quad f \in V_0. \tag{1}$$

Оператор $S: X_0 \to E$, определяемый соотношением

$$S(k, f) = (I - T_k)^{-1} f,$$

называется оператором решения для уравнений (1) из X_0.

Под способом задания информации (СЗИ) об уравнениях (1) из класса X_0 будем понимать совокупность $N = (N_1, N_2)$ двух произвольных наборов N_1 и N_2 линейных непрерывных функционалов:

$$N_1 k = \left(\lambda_1(k), \lambda_2(k), \ldots, \lambda_{n_1}(k)\right), \qquad \lambda_i \in K^*, \quad i = 1, 2, \ldots, n_1,$$

$$N_2 f = \left(\sigma_1(f), \sigma_2(f), \ldots, \sigma_{n_2}(f)\right), \qquad \sigma_j \in V^*, \quad j = 1, 2, \ldots, n_2,$$

где K^* и V^* — пространства, сопряженные к K и V соответственно. Кроме того, через $\operatorname{card}(N)$ будем обозначать общее количество линейных функционалов, определяющих СЗИ N, т. е. $\operatorname{card}(N) = n_1 + n_2$.

Под алгоритмом φ приближенного решения уравнений (1) понимаем произвольный оператор, ставящий в соответствие информационному вектору $N(k, f) = (N_1 k, N_2 f) \in R^{n_1 + n_2}$ в качестве приближенного решения уравнения (1) элемент $\varphi(N; k, f) \in E$. При фиксированном СЗИ N обозначим через $\Phi(N)$ множество всех алгоритмов φ, использущих в качестве информации значения компонент информационного вектора $N(k, f)$. Погрешность алгоритма $\varphi \in \Phi(N)$ на классе X_0 определяется как обычно:

$$e(X_0, \varphi) = \sup_{(k, f) \in X_0} \|S(k, f) - \varphi(N; k, f)\|_E.$$

Следуя Дж.Траубу и Х.Вожьняковскому [1], будем рассматривать задачу оптимизации СЗИ в смысле величины

$$r_n(X_0) = \inf_{N:\, \mathrm{card}(N) \le n} \inf_{\varphi \in \Phi(N)} e(X_0, \varphi),$$

называемой минимальным радиусом информации. Эта величина равна минимальной погрешности, которая достигается на классе X_0 при использовании не более чем n значений информационных функционалов.

В настоящей работе найден точный в логарифмической шкале порядок минимального радиуса информации для класса многомерных интегральных уравнений Фредгольма II рода с периодическими гармоническими по каждой переменной ядрами и свободными членами.

В дальнейшем нам потребуется связь между минимальным радиусом информации $r_n(X_0)$ и числом Гельфанда некоторого специального оператора. Эта связь установлена в [2] при следующих условиях, накладываемых на класс $X_0 = K_0 \times V_0$.

Пусть B_K и B_V — единичные шары подпространств K и V с центрами в нуле соответственно. Предположим, что существует набор постоянных $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6)$, $\theta_i > 0$, $i = \overline{1, 6}$, таких, что

$$\theta_1 B_K \subset K_0 \subset \theta_2 B_K \tag{2}$$

и для любых $k \in K_0$

$$\begin{aligned} &\| T_k \|_{E \to E} \le \theta_3, \qquad \left\| (I - T_k)^{-1} \right\|_{E \to E} \le \theta_4, \\ &\| T_k \|_{V \to V} \le \theta_5, \qquad \left\| (I - T_k)^{-1} \right\|_{V \to V} \le \theta_6. \end{aligned} \tag{3}$$

Напомним, что m-м числом Гельфанда линейного непрерывного оператора U, действующего из нормированного пространства Y в нормированное пространство Z, называется величина

$$G_m(U: Y \to Z) = \inf_{\lambda_i \in Y^*,\, i = \overline{1, m-1}} \sup_{\substack{y \in Y,\, \|y\|_Y \le 1 \\ \lambda_i(y) = 0,\, i = \overline{1, m-1}}} \| Uy \|_Z .$$

Рассмотрим оператор (функтор) $\Psi: K \to \mathfrak{L}(V, E)$, ставящий в соответствие каждому $k \in K$ оператор $\Psi_k \in \mathfrak{L}(V, E)$, определяемый равенством $\Psi_k = T_k J_V$, где J_V — оператор вложения V в E.

Теорема Хейнриха [3]. *Если множество* K_0 *удовлетворяет условиям* (2), (3), *а* $V_0 = B_V$, *то для класса* $X_0 = K_0 \times V_0$ *справедливо соотношение*

$$r_n(X_0) \asymp \inf_{n_1 + n_2 \le n} \left\{ G_{n_1}(\Psi: K \to \mathfrak{L}(V, E)) + G_{n_2}(J_V: V \to E) \right\}.$$

2. Вспомогательные результаты. Пусть $[0, 2\pi]^d$ и $\mathbb{Z}^d$ — декартовы произведения соответственно $[0, 2\pi]$ и $\mathbb{Z}$ самих на себя d раз. Пусть еще

$$e_0(u) = (2\pi)^{-1/2}, \qquad e_j(u) = \begin{cases} \pi^{-1/2} \cos ju, & j = 1, 2, \ldots, \\ \pi^{-1/2} \sin |j| u, & j = -1, -2, \ldots . \end{cases}$$

Для мультииндекса $i = (i_1, i_2, \ldots, i_d)$ положим $|i| = \sum_{k=1}^{d} |i_k|$. Известно, что

$$e_i(t) = e_{i_1}(t_1) e_{i_2}(t_2) \cdots e_{i_d}(t_d), \qquad t = (t_1, t_2, \ldots, t_d) \in [0, 2\pi]^d,$$

образуют ортонормированный базис в пространстве $L_2([0, 2\pi]^d)$ функций d переменных, суммируемых с квадратом на $[0, 2\pi]^d$. Аналогично, ортонормированный базис $\{e_{ij}\}_{i,j\in\mathbb{Z}^d}$ в пространстве $L_2([0, 2\pi]^{2d})$ функций от $2d$ переменных образует система функций

$$e_{ij}(t, \tau) = e_i(t)e_j(\tau), \qquad t, \tau \in [0, 2\pi]^d.$$

При этом коэффициенты Фурье функций $f \in L_2([0, 2\pi]^d)$, $k \in L_2([0, 2\pi]^{2d})$ обозначим следующим образом:

$$\hat{k}(i, j) = (k, e_{ij}), \qquad \hat{f}(i) = (f, e_i), \quad i, j \in \mathbb{Z}^d.$$

Рассмотрим следующее нормированное пространство функций d переменных:

$$\Gamma_d^\rho = \left\{ g\colon g \in L_2([0, 2\pi]^d),\ \|g\|_{\rho, d} := \left(\sum_{i\in\mathbb{Z}^d} \rho^{-2|i|} |\hat{g}(i)|^2 \right)^{1/2} < \infty \right\}.$$

Легко видеть [4, с. 186], что пространство Γ_d^ρ состоит из 2π-периодических функций d переменных, являющихся по каждой переменной следами гармонических в единичном круге $\{(x, y)\colon x^2 + y^2 < 1\}$ функций на окружности радиуса ρ : $\{(x, y)\colon x^2 + y^2 = \rho\}$, $0 < \rho < 1$.

В рамках наших обозначений положим $E = L_2([0, 2\pi]^d)$, $V = \Gamma_d^\rho$, $K = \Gamma_{2d}^\rho$. Кроме того, оператор T, ставящий в соответствие каждому элементу $k \in \Gamma_{2d}^\rho$ оператор $T_k : L_2([0, 2\pi]^d) \to L_2([0, 2\pi]^d)$, определим следующим равенством:

$$T_k g(t) = T_k g(t_1, t_2, \ldots, t_d) =$$
$$= \int\limits_{[0, 2\pi]^d} k(t_1, t_2, \ldots, t_d, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_d) g(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_d)\, d\tau_1 \ldots d\tau_d \tag{4}$$

и рассмотрим множество

$$\mathcal{K}_d^\rho = \mathcal{K}_d^\rho(\alpha) =$$
$$= \left\{ k\colon k \in \Gamma_{2d}^\rho,\ \|k\|_{\rho, 2d} \le \alpha_1,\ \left\|(I - T_k)^{-1}\right\|_{L_2([0, 2\pi]^d) \to L_2([0, 2\pi]^d)} \le \alpha_2 \right\},$$
$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2).$$

Тогда класс

$$X^{\rho, d} = X^{\rho, d}(\alpha) = \mathcal{K}_d^\rho \times B_{\Gamma_d^\rho}$$

состоит из интегральных уравнений Фредгольма II рода

$$u(t) - T_k u(t) := u(t_1, t_2, \ldots, t_d) -$$
$$- \int\limits_{[0, 2\pi]^d} k(t_1, t_2, \ldots, t_d, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_d) u(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_d)\, d\tau_1 \ldots d\tau_d =$$
$$= f(t_1, t_2, \ldots, t_d) \tag{5}$$

с ядрами $k(t, \tau)$ из множества $\mathcal{K}_d^\rho$, $t, \tau \in [0, 2\pi]^d$, и свободными членами $f(t)$ из единичного шара $B_{\Gamma_d^\rho}$ пространства Γ_d^ρ с центром в нуле.

Положим

$$Q_{\nu,d} = \left\{(i,j)\colon i,j\in\mathbb{Z}^d, |i|+2|j|\le\nu\right\}, \qquad q_{\nu,d} = \left\{i\colon i\in\mathbb{Z}^d, |i|\le\nu\right\}$$

и рассмотрим СЗИ $N_{\nu,d} = \left(N_{1,Q_{\nu,d}}, N_{2,q_{\nu,d}}\right)$, определяемый следующими наборами информационных функционалов:

$$N_{1,Q_{\nu,d}}k = \left(\lambda_{ij}(k) = \hat{k}(i,j),\ (i,j)\in Q_{\nu,d}\right),$$

$$N_{2,q_{\nu,d}}f = \left(\sigma_i(f) = \hat{f}(i),\ i\in q_{\nu,d}\right).$$

Обозначим через $\varphi_{\nu,d}$ алгоритм из $\Phi\left(N_{\nu,d}\right)$, при котором приближенное решение уравнения (5) определяется из следующего уравнения с вырожденным ядром:

$$\bar{u}(t) - T_{k_{\nu,d}}\bar{u}(t) := \bar{u}(t_1,t_2,\ldots,t_d) -$$

$$-\int\limits_{[0,2\pi]^d} k_{\nu,d}(t_1,t_2,\ldots,t_d,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_d)\bar{u}(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_d)\,d\tau_1\ldots d\tau_d =$$

$$= S_{\nu,d}f(t_1,t_2,\ldots,t_d), \tag{6}$$

где

$$S_{\nu,d}f(t_1,t_2,\ldots,t_d) = \sum_{(i_1,\ldots,i_d)\in q_{\nu,d}} \hat{f}\,(i_1,i_2,\ldots,i_d)e_{i_1}(t_1)\cdots e_{i_d}(t_d),$$

$$k_{\nu,d}f(t_1,t_2,\ldots,t_d,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_d) =$$

$$= \sum\nolimits_{(i_1,i_2,\ldots,i_d,j_1,j_2,\ldots,j_d)\in Q_{\nu,d}} \hat{k}(i_1,i_2,\ldots,i_d,j_1,j_2,\ldots,j_d)\times$$

$$\times e_{i_1}(t_1)\cdots e_{i_d}(t_d)e_{j_1}(t_1)\cdots e_{j_d}(t_d).$$

Таким образом, при алгоритме $\varphi_{\nu,d}$ в качестве приближенного решения уравнений (5) рассматривается функция

$$\varphi_{\nu,d}\left(N_{\nu,d},k,f\right) = \left(I - T_{k_{\nu,d}}\right)^{-1}S_{\nu,d}f,$$

представляющая собой тригонометрический полином от d переменных вида

$$\varphi(t_1,t_2,\ldots,t_d) = \sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_d)\in q_{\nu,d}} \hat{\varphi}(i_1,i_2,\ldots,i_d)e_{i_1}(t_1)\cdots e_{i_d}(t_d),$$

для нахождения коэффициентов которого нужно решить некоторую систему линейных алгебраических уравнений, что, в свою очередь, сведется к выполнению конечного числа арифметических операций над значениями функционалов из набора $N_{\nu,d}$.

Пусть $\operatorname{card}\left(Q_{\nu,d}\right)$ — общее число мультииндексов, принадлежащих множеству $Q_{\nu,d}$. Нам потребуется следующее утверждение.

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$\operatorname{card}\left(Q_{\nu,d}\right) = \frac{2^d\nu^{2d}}{(2d)!} + O\left(\nu^{2d-1}\right). \tag{7}$$

Доказательство проведем с помощью индукции по d. При $d=1$ утверждение леммы следует из формулы (9) работы [5]. Пусть теперь соотношение (7) справедливо при $d = m$. Покажем, что тогда оно выполняется и при $d = m + 1$. В самом деле,

$$\operatorname{card}\left(Q_{\nu, m+1}\right) = \sum_{\mu=0}^{\nu} \operatorname{card}\{(i_{m+1}, j_{m+1}) : i_{m+1}, j_{m+1} \in \mathbb{Z},\ |i_{m+1}| + 2|j_{m+1}| = \mu\} \times$$
$$\times \operatorname{card}\left\{(i, j) : i, j \in \mathbb{Z}^m,\ |i| + 2|j| \le \nu - \mu\right\}. \tag{8}$$

В силу предположения имеем

$$\operatorname{card}\left\{(i, j) : i, j \in \mathbb{Z}^m,\ |i| + 2|j| \le \nu - \mu\right\} = \operatorname{card}\left(Q_{\nu-\mu, m}\right) =$$
$$= \frac{2^m(\nu-\mu)^{2m}}{(2m)!} + O\left((\nu-\mu)^{2m-1}\right). \tag{9}$$

Кроме того, легко видеть, что

$$\operatorname{card}\{(i_{m+1}, j_{m+1}) : i_{m+1}, j_{m+1} \in \mathbb{Z},\ |i_{m+1}| + 2|j_{m+1}| = \mu\} =$$
$$= 4\left[\frac{\mu}{2}\right] + O(1) = 2\mu + O(1). \tag{10}$$

Таким образом, из (8)–(10) получаем

$$\operatorname{card}\left(Q_{\nu, m+1}\right) = \frac{2^{m+1}}{(2m)!}\sum_{\mu=0}^{\nu}\mu(\nu-\mu)^{2m} + O\left(\nu^{2m+1}\right) =$$

$$= \frac{2^{m+1}}{(2m)!}\int_0^{\nu}\mu(\nu-\mu)^{2m}\,d\mu + O\left(\nu^{2m+1}\right) = \frac{2^{m+1}}{(2m)!}\int_0^{\nu}u^{2m}(\nu-u)\,du + O\left(\nu^{2m+1}\right) =$$

$$= \frac{2^{m+1}}{(2m)!}\nu^{2m+2}\left(\frac{1}{2m+1} - \frac{1}{2m+2}\right) + O\left(\nu^{2m+1}\right) = \frac{2^{m+1}\nu^{2m+2}}{[2(m+1)]!} + O\left(\nu^{2m+1}\right).$$

Лемма доказана.

3. Основной результат. Теорема 1. *Для сколь угодно малого* $\varepsilon > 0$ *при достаточно больших* n

$$c_1\rho^{\sqrt[2d]{\frac{(2d)!n(1+\varepsilon)}{2^d}}} \le r_n\left(X^{\rho, d}\right) \le c_2\rho^{\sqrt[2d]{\frac{(2d)!n(1-\varepsilon)}{2^d}}},$$

где постоянные c_1 *и* c_2 *не зависят от* n *и* d.

Доказательство. *Оценка снизу.* Легко проверить, что при $E = L_2\left([0, 2\pi]^d\right)$, $V = \Gamma_d^\rho$, $K = \Gamma_{2d}^\rho$ и операторе T, определяемом в (4), множество $\mathcal{K}_d^\rho(\alpha)$ удовлетворяет условиям (2), (3) с некоторыми постоянными θ_i, $i = \overline{1, 6}$, зависящими лишь от α и ρ. Тогда для класса $X^{\rho, d}$ справедлива теорема Хейнриха, из которой следует

$$r_n\left(X^{\rho, d}\right) \ge cG_n\left(\Psi : \Gamma_{2d}^\rho \to \mathfrak{L}\left(\Gamma^\rho, L_2\left([0, 2\pi]^d\right)\right)\right), \tag{11}$$

где постоянная c не зависит от n. Теперь для доказательства теоремы нужно оценить число Гельфанда оператора Ψ.

Через $l_p\left(\mathbb{Z}^d\right)$ и $l_p\left(\mathbb{Z}^{2d}\right)$ обозначим пространства последовательностей с индексами из $\mathbb{Z}^d$ и $\mathbb{Z}^{2d}$ соответственно. Пусть $\{b_i\}_{i \in \mathbb{Z}^d}$ — ортонормированный базис в пространстве $l_p(\mathbb{Z}^d)$. Тогда тензорное произведение базиса $\{b_i\}_{i\in\mathbb{Z}^d}$ самого на себя дает базис

$$b_{ij} = b_i \otimes b_j, \quad i, j \in \mathbb{Z}^d,$$

в пространстве $l_p(\mathbb{Z}^{2d}) = l_p(\mathbb{Z}^d \otimes \mathbb{Z}^d)$, где $\otimes$ — знак тензорного произведения. Напомним, что b_i и b_{ij} представляют собой числовые последовательности, все члены которых равны нулю за исключением членов, имеющих номера, совпадающие с номерами мультииндексов $i = (i_1, i_2, \ldots, i_d)$, $(i, j) = (i_1, i_2, \ldots, i_d, j_1, j_2, \ldots, j_d)$ в $\mathbb{Z}^d$ и $\mathbb{Z}^{2d}$ соответственно. Последние равны единице.

Рассмотрим оператор

$$W: l_2(\mathbb{Z}^{2d}) \to \Gamma^\rho_{2d},$$

который на элементах базиса определяется равенствами

$$W(b_i \otimes b_j) = \rho^{|i|+|j|} e_i(t) e_j(\tau), \quad t, \tau \in [0, 2\pi]^d,$$

и оператор

$$U: \mathfrak{L}\left(\Gamma^\rho_d, L_2([0,2\pi]^d)\right) \to l_\infty(\mathbb{Z}^{2d}),$$

сопоставляющий каждому $A = \mathfrak{L}\left(\Gamma^\rho_d, L_2([0,2\pi]^d)\right)$ последовательность

$$UA = \left\{\rho^{|j|}(e_i, Ae_j)\right\}_{i,\, j\in\mathbb{Z}^d},$$

где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $L_2([0,2\pi]^d)$. Легко видеть, что $\|W\| \le 1$, $\|U\| \le 1$. Пусть теперь $\Psi_k = T_k J_{\Gamma^\rho_d}$, где $J_{\Gamma^\rho_d}$ — оператор вложения Γ^ρ_d в $L_2([0,2\pi]^d)$, а T_k определен в (4). Тем самым определен оператор (функтор) $\Psi: \Gamma^\rho_{2d} \to \mathfrak{L}\left(\Gamma^\rho, L_2([0,2\pi]^d)\right)$. Тогда оператор $D = U\Psi W$ действует из $l_2(\mathbb{Z}^{2d})$ в $l_\infty(\mathbb{Z}^{2d})$ так, что

$$Db_i \otimes b_j = \rho^{|i|+2|j|} b_i \otimes b_j, \quad i, j \in \mathbb{Z}^d.$$

Это означает, что D — диагональный оператор, определяемый числами $\xi_{ij} = \rho^{|i|+2|j|}$.

Пусть $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \ldots \ge \lambda_n \ge \ldots$ — элементы последовательности $\{\xi_{ij}\}$, упорядоченные по убыванию. Тогда из теорем 11.11.7, 11.7.4, 11.5.2 в [6] следует

$$G_n\left(\Psi: \Gamma^\rho_{2d} \to \mathfrak{L}\left(\Gamma^\rho_d, L_2([0,2\pi]^d)\right)\right) \ge \frac{\lambda_n}{\sqrt{n}}. \tag{12}$$

С другой стороны, так как при $(i,j) \in Q_{\nu,d}$ $\xi_{ij} \ge \rho^\nu$, то

$$\lambda_{\operatorname{card}(Q_{\nu,d})} \ge \rho^\nu.$$

В силу леммы 1 для сколь угодно малого $\varepsilon \in (0,1)$ при достаточно больших ν

$$\operatorname{card}(Q_{\nu,d}) \ge \frac{2^d \nu^{2d}}{(2d)!\left(1+\varepsilon^2\right)},$$

но тогда

$$\lambda_{\left[\frac{2^d \nu^{2d}}{(2d)!\left(1+\varepsilon^2\right)}\right]} \geq \lambda_{\operatorname{card}\left(Q_{\nu, d}\right)} \geq \rho^{\nu},$$

или, что то же самое,

$$\lambda_n \geq \rho^{\sqrt[2d]{\frac{(2d)!n\left(1+\varepsilon^2\right)}{2^d}}}.$$

Теперь из (12) при достаточно больших n имеем

$$G_n\left(\Psi\colon \Gamma_{2d}^{\rho} \to \mathfrak{L}\left(\Gamma_d^{\rho}, L_2\left([0,2\pi]^d\right)\right)\right) \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \rho^{\sqrt[2d]{\frac{(2d)!n\left(1+\varepsilon^2\right)}{2^d}}} \geq \rho^{\sqrt[2d]{\frac{(2d)!n(1+\varepsilon)}{2^d}}}.$$

Отсюда в силу (11) и следует требуемая оценка снизу.

Оценка сверху. Нам потребуется следующее утверждение.

Лемма 2. *Если* $k \in \mathcal{K}_d^{\rho}(\alpha)$, *то*

$$\left\| T_k - T_{k_{\nu, d}} \right\|_{\Gamma_d^{\rho} \to L_2\left([0,2\pi]^d\right)} \leq \alpha_1 \rho^{\nu},$$

$$\left\| T_k - T_{k_{\nu, d}} \right\|_{L_2\left([0,2\pi]^d\right) \to L_2\left([0,2\pi]^d\right)} \leq \alpha_1 \rho^{\nu/2}.$$

Доказательство проведем для первого неравенства. Второе неравенство доказывается аналогично. С учетом определения $Q_{\nu, d}$ и $k_{\nu, d}$ для любой функции $f \in \Gamma_d^{\rho}$ имеем

$$\left\| T_k f - T_{k_{\nu, d}} f \right\|^2 \leq \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \left(\sum_{j\colon |j| > (\nu - |i|)/2} \hat{k}^2(i, j) \right) \left(\sum_{j\colon |j| > (\nu - |i|)/2} \hat{f}^2(j) \right) \leq$$

$$\leq \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \left(\sum_{j\colon |j| > (\nu - |t|)/2} \rho^{-2|j| + \nu - |i|} \hat{k}^2(i, j) \right) \left(\sum_{j\colon |j| > (\nu - |t|)/2} \rho^{-2|j| + \nu - |i|} \hat{f}^2(j) \right) \leq$$

$$\leq \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \rho^{2\nu - 2|i|} \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \rho^{-2|j|} \hat{k}^2(i, j) \right) \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \rho^{-2|j|} \hat{f}^2(j) \right) \leq \rho^{2\nu} \| f \|_{\rho, d}^2 \| k \|_{\rho, d}^2.$$

В силу произвольности $f \in \Gamma_d^{\rho}$ утверждение леммы следует из последнего неравенства и определения класса $\mathcal{K}_d^{\rho}(\alpha)$.

Вернемся к доказательству теоремы 1. В силу теоремы о разрешимости приближенного уравнения [2, с. 517] и второго неравенства леммы 2 для $k \in \mathcal{K}_d^{\rho}(\alpha)$ и достаточно большого ν имеем

$$\left\| \left(I - T_{k_{\nu, d}} \right)^{-1} \right\|_{L_2\left([0,2\pi]^d\right) \to L_2\left([0,2\pi]^d\right)} \leq \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_1 \alpha_2 \rho^{\nu/2}} \leq \beta_1, \tag{13}$$

где постоянная β_1 не зависит от ν. Кроме того, для $k \in \mathcal{K}_d^{\rho}(\alpha)$ и $g \in L_2\left([0, 2\pi]^d\right)$

$$\| T_k g \|_{\rho}^2 \leq \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \rho^{-2|i|} \sum_{i, j \in \mathbb{Z}^{2d}} \hat{k}^2(i, j) \sum_{j \in \mathbb{Z}^{2d}} \hat{g}^2(j) \leq \alpha_1^2 \| g \|^2.$$

Тогда для решения $u(t)$ любого уравнения (5) из $X^{\rho, d}$ имеем

$$\|u\|_{\rho,d} = \left\| f + T_k(I - T_k)^{-1} f \right\|_{\rho,d} \le 1 + \alpha_1\alpha_2. \tag{14}$$

Напомним еще, что для $f \in B_{\Gamma_d^\rho}$

$$\left\| f - S_{\nu,d} f \right\| \le \rho^\nu. \tag{15}$$

Таким образом, из леммы 2 и (13)–(15) находим

$$e\left(X^{\rho,d}, \varphi_{\nu,d}\right) = \sup_{(k,f)\in X^{\rho,d}} \left\| (I - T_k)^{-1} f - \left(I - T_{k_{\nu,d}}\right)^{-1} S_{\nu,d} f \right\| =$$

$$= \sup_{(k,f)\in X^{\rho,d}} \left\| (I - T_k)^{-1} \left(\left(f - S_{\nu,d} f\right) + \left(T_k - T_{k_{\nu,d}}\right)\left(I + T_k\left(I - T_{k_{\nu,d}}\right)^{-1}\right) f \right) \right\| \le$$

$$\le \beta_1\rho^\nu + 2\beta_1\alpha_1\rho^\nu(1 + \alpha_1\alpha_2) \le c\rho^\nu,$$

где постоянная c зависит лишь от α и ρ.

С другой стороны, $\varphi_{\nu,d} \in \Phi(N_{\nu,d})$, а из леммы 1 следует, что для сколь угодно малого $\varepsilon \in (0,1)$ при достаточно больших ν

$$\operatorname{card}\left(N_{\nu,d}\right) = \operatorname{card}\left(Q_{\nu,d}\right) + \operatorname{card}\left(q_{\nu,d}\right) = \frac{2^d \nu^{2d}}{(2d)!} + O\left(\nu^{2d-1}\right) \le \frac{2^d \nu^{2d}}{(2d)!(1-\varepsilon)}.$$

Таким образом, при $\nu = \left[\sqrt[2d]{\left((2d)!\,n(1-\varepsilon)/2^d\right)} \right]$

$$\operatorname{card}\left(N_{\nu,d}\right) \le n$$

и, следовательно,

$$r_n\left(X^{\rho,d}\right) \le e\left(X^{\rho,d}, \varphi_{\nu,d}\right) \le c\rho^{\sqrt[2d]{\frac{(2d)!\,n(1-\varepsilon)}{2^d}}}.$$

Это и есть требуемая оценка сверху. Теорема доказана.

1. *Трауб Дж., Вожьняковский Х.* Общая теория оптимальных алгоритмов. – М.: Мир, 1983. – 382 с.
2. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 752 с.
3. *Frank K., Heinrich S., Pereverzev S. V.* Information complexity of multivariate Fredholm integral equations in Sobolev classes // J. Complexity. – 1996. – **12**. – P. 17–34.
4. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 304 с.
5. *Переверзев С. В., Азизов М.* Об оптимальных способах задания информации при решении интегральных уравнений с аналитическими ядрами // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 5. – С. 656–665.
6. *Пич А.* Операторные идеалы. – М.: Мир, 1982. – 586 с.

Получено 21.05.98