УДК 517.51

О. І. Гайдукевич, В. К. Маслюченко (Чернів. ун-т)

НОВІ УЗАГАЛЬНЕННЯ ТЕОРЕМИ СКОРЦА-ДРАГОНІ

We consider the Carathéodory functions $f: T \times X \to Y$, where T is a topological space with regular σ-finite measure, spaces X and Y are metrizable and separable, and X is locally compact. We show that every function of this sort possesses the Scorza-Dragoni property and obtain a similar result for the case where the space T is locally compact and $X = \mathbb{R}^\infty$.

Показано, що кожна функція Каратеодорі $f: T \times X \to Y$, де T — топологічний простір з регулярною σ-скінченною мірою, простори X і Y — метризовні і сепарабельні, X — локально компактний, має властивість Скорца-Драгоні. Аналогічний результат одержано, коли простір T — локально компактний і $X = \mathbb{R}^\infty$.

1. Класична теорема Скорца-Драгоні [1] стверджує, що для кожної функції $y = f(t, x)$: $[0, 1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, вимірної відносно t і неперервної відносно $x \in X$, і для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує замкнена множина $A \subseteq [0,1]$ така, що її міра Лебега $\mu(A)$ більша за $1 - \varepsilon$ і звуження $f|_{A \times X}$ неперервне за сукупністю змінних. Цю теорему можна розглядати як далекий розвиток теореми Лузіна про вимірні функції і як метричний аналог теореми Ван Влека [2] про нарізно неперервні функції. Як теорема Ван Влека, так і теорема Скорца-Драгоні можуть бути узагальнені, і таким узагальненням присвячено багато робіт математиків XX ст. Щодо узагальнень теореми Ван Влека див. [3 – 5] і вказану там літературу, щодо узагальнень теореми Скорца-Драгоні див., наприклад, [6 – 8]. Ці два напрямки розвивались паралельно без відчутного взаємовпливу. Між тим результати і методи кожного з них могли б послужити джерелом для постановки нових задач, як це продемонстровано, наприклад, в роботі Окстобі [9]. В даній роботі, розвиваючи один з класичних методів дескриптивної теорії [2, 10 – 12], одержуємо нове узагальнення теореми Скорца-Драгоні для функцій $f: T \times X \to Y$, що визначені на добутку топологічного простору T зі скінченною борелівською регулярною мірою і метризовного сепарабельного локально компактного простору X (теорема 3).

В усіх відомих результатах серед умов, накладених на простір X, вимагають метризовності або наявності зліченної бази. Оскільки ці умови досить обтяжливі, то виникає природне бажання якось їх послабити, розглянувши, скажімо, той випадок, коли простір X — σ-метризовний. Тут ми робимо перший крок у цьому напрямку, взявши за X простір фінітних послідовностей дійсних чисел (теорема 5).

Крім цього, природно виникає питання про узагальнення теореми Скорца-Драгоні на той випадок, коли міра на T нескінченна. Найбільш доступним виглядає випадок σ-скінченної міри. Як виявилось, для перенесення відповідних результатів тут знадобилося дещо сильніше обмеження на міру, назване нами сильною σ-скінченністю. З допомогою простих міркувань можна пересвідчитись, що кожна регулярна σ-скінченна міра є сильно σ-скінченною, і ми одержуємо, таким чином, ряд узагальнень теореми Скорца-Драгоні для просторів T з σ-скінченною мірою (теореми 7–9).

2. Почнемо з уточнення понять, пов'язаних з мірою, зокрема, для повноти викладу наведемо доведення теореми Лузіна для вимірних відображень.

Мірою на σ-алгебрі $\mathcal{A}$ підмножин деякої множини T називається σ-адитивна функція множини $\mu: \mathcal{A} \to [0; +\infty]$ така, що $\mu(\varnothing) = 0$. Борелівською мірою називаємо міру, визначену на σ-алгебрі $\mathcal{B}$ всіх борелівських підмножин деякого топологічного простору. Кожну міру можна стандартним чином поповнити. Поповнення борелівської міри теж будемо називати борелівською мірою. Борелівську міру $\mu: \mathcal{A} \to [0; +\infty]$, де $\mathcal{A}$ — σ-алгебра вимірних множин, будемо називати регулярною, якщо для кожної множини $A \in \mathcal{A}$ і для кожного $\varepsilon > 0$ існують замкнена $F \subseteq A$ і відкрита $G \supseteq A$ множини такі, що $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$.

Наступне узагальнення класичної теореми Лузіна одержується безпосереднім перенесенням методу, застосованого у [9] для числової прямої, на топологічні простори. Вимірність функції відноситься до σ-алгебри μ-вимірних множин.

Теорема 1. *Нехай T — топологічний простір з регулярною мірою μ, Y — топологічний простір з другою аксіомою зліченності і $f: T \to Y$ — вимірна функція. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться замкнена в T множина A, для якої $\mu(T \setminus A) < \varepsilon$ і звуження $f|_A$ — неперервне.*

Доведення. Нехай $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ — база топології в Y і $\varepsilon > 0$. Оскільки функція f вимірна, то для кожного номера n знайдуться замкнена F_n і відкрита G_n множини такі, що $F_n \subseteq f^{-1}(V_n) \subseteq G_n$ і $\mu(G_n \setminus F_n) < \varepsilon/2^n$. Покладемо $B = \bigcup_{n=1}^{\infty}(G_n \setminus F_n)$. Зрозуміло, що множина B відкрита і $\mu(B) < \varepsilon$. Нехай $A = T \setminus B$, $g = f|_A$ і $n \in \mathbb{N}$. Тоді $g^{-1}(V_n) = f^{-1}(V_n) \cap A = f^{-1}(V_n) \setminus B$. Покажемо, що $g^{-1}(V_n) = F_n \setminus B = G_n \setminus B$. Оскільки $F_n \setminus B \subseteq g^{-1}(V_n) \subseteq G_n \setminus B$, то досить показати, що $G_n \setminus B \subseteq F_n \setminus B$. Нехай $x \in G_n \setminus B$. Тоді $x \in G_n$ і $x \notin B$, а значить, $x \notin G_k \setminus F_k$ для будь-якого k, зокрема, $x \notin G_n \setminus F_n$. В такому разі обов'язково $x \in F_n$. Отже, $x \in F_n \setminus B$. Бачимо, що множина $g^{-1}(V_n) = G_n \cap A$ відкрита відносно множини A для кожного натурального n, звідки випливає, що g — неперервна функція. Отже, множина A — шукана.

3. Нагадаємо, що міра μ на вимірному просторі T називається σ-скінченною, якщо T можна подати у вигляді об'єднання послідовності вимірних множин T_n з $\mu(T_n) < +\infty$. Міру, задану на топологічному просторі T, будемо називати сильно σ-скінченною, якщо існує локально скінченна послідовність множин $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ скінченної міри така, що $T = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

Теорема 2. *Регулярна σ-скінченна міра μ, що задана на довільному топологічному просторі T, є сильно σ-скінченною.*

Доведення. Оскільки міра μ є σ-скінченною, то $T = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$, де $\mu(T_n) < +\infty$. З регулярності міри μ випливає, що існують відкриті множини $G_n \subseteq T$ такі, що $T_n \subseteq G_n$ і $\mu(G_n) < +\infty$. Покладемо $H_n = \bigcup_{k=1}^{n} G_k$ і $E_n = H_n \setminus H_{n-1}$ $(H_0 = \varnothing)$. Очевидно, що $\mu(E_n) < +\infty$ для кожного n і $\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = T$. Крім цього, послідовність $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ — локально скінченна. Справді, для кожної точки $t_0 \in T$ існує номер n_0 такий, що $t_0 \in H_{n_0}$. Множина $U = H_{n_0}$ буде околом точки t_0, адже вона відкрита, і $U \cap E_n = \varnothing$ при $n > n_0$.

4. Далі будемо розглядати відображення $f: T \times X \to Y$, де T — топологічний простір з борелівською мірою μ, а X і Y — топологічні простори. Як звичайно, для $(t, x) \in T \times X$ покладемо $f^t(x) = f_x(t) = f(t, x)$. Відображення f називається функцією Каратеодорі, якщо для кожного $t \in T$ відображення $f^t: X \to Y$ неперервне і для кожного $x \in X$ відображення $f_x: T \to Y$ — вимірне. Говорять, що f має властивість Скорца-Драгоні (коротше, властивість SD), якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує така замкнена множина $T_\varepsilon \subseteq T$, що $\mu(T \setminus T_\varepsilon) < \varepsilon$ і звуження $f|_{T_\varepsilon \times X}$ неперервне за сукупністю змінних.

Теорема 3. *Нехай T — топологічний простір із скінченною регулярною мірою μ, X — метризовний сепарабельний локально компактний простір, Y — метризовний сепарабельний простір і $f: T \times X \to Y$ — функція Каратеодорі. Тоді f має властивість* SD.

Доведення. Нехай d_X і d_Y — метрики, які породжують топології просторів відповідно X і Y, і $\tilde{X} = \{x_1, x_2, \ldots\}$ — щільна в X множина. Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$. Простір Y має не більш ніж зліченну базу, отже, для кожного $k \in \mathbb{N}$ за теоремою 1 знайдеться замкнена в T множина A_k, для якої $\mu(T \setminus A_k) < \varepsilon/2^{k+2}$ і звуження $f_{x_k}|_{A_k}$ — неперервне. Множина $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ замкнена і $\mu(T \setminus E_k) < \varepsilon/4$.

Нехай $(G_m)_{m=1}^{\infty}$ — зростаюча послідовність відкритих в X множин, таких, що їх замикання $\overline{G}_m$ компактні і $\bigcup_{m=1}^{\infty} G_m = X$. Покладемо

$$A_{m,n} = \left\{ t \in E : (\forall x', x'' \in G_m)\left(d_X(x', x'') < \frac{1}{n} \Rightarrow d_Y\left(f^t(x'), f^t(x'')\right) \le \frac{1}{m} \right) \right\}.$$

Покажемо, що $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{m,n} = E$ для довільного фіксованого номера m. Розглянемо довільне $t \in E$ і $m \in \mathbb{N}$. Функція $f^t : X \to Y$ — неперервна на X, тому за теоремою Кантора вона рівномірно неперервна на компактній множині $\overline{G}_m$, а значить, і на G_m. Отже, існує номер $n_0 \in \mathbb{N}$ такий, що для всіх $x', x'' \in G_m$ з того, що $d_X(x', x'') < 1/n_0$, випливає $d_Y\left(f^t(x'), f^t(x'')\right) \le 1/m$. Тоді $t \in$ $\in A_{m,n_0}$, а значить, і $t \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{m,n}$.

Покажемо, що множини $A_{m,n}$ вимірні. Для цього покладемо $X_m = \tilde{X} \cap G_m$ і розглянемо множину

$$\tilde{A}_{m,n} = \left\{ t \in E : (\forall x', x'' \in X_m)\left(d_X(x', x'') < \frac{1}{n} \Rightarrow d_Y\left(f^t(x'), f^t(x'')\right) \le \frac{1}{m} \right) \right\}.$$

Очевидно, що $A_{m,n} \subseteq \tilde{A}_{m,n}$. Покажемо, що $\tilde{A}_{m,n} \subseteq A_{m,n}$. Нехай $t \in \tilde{A}_{m,n}$ і точки $x', x'' \in G_m$ такі, що $d_X(x', x'') < 1/n$. Оскільки $\overline{X}_m \supseteq G_m$, то в X_m існують такі послідовності точок (x'_k) та (x''_k), що $x'_k \to x'$ і $x''_k \to x''$ при $k \to \infty$, причому $d_X(x'_k, x''_k) < 1/n$ для всіх номерів k. Маємо $d_Y\left(f^t(x'_k), f^t(x''_k)\right) \le 1/m$ для кожного k. Оскільки функція f^t неперервна, то, перейшовши в останній нерівності до границі при $k \to \infty$, отримаємо $d_Y\left(f^t(x'), f^t(x'')\right) \le 1/m$, звідки $t \in A_{m,n}$. Отже, $\tilde{A}_{m,n} = A_{m,n}$. Розглянемо не більш ніж зліченну множину

$$S_{m,n} = \left\{ (x', x'') \in X_m^2 : d_X(x', x'') < \frac{1}{n} \right\}.$$

Для $(x', x'') \in S_{m,n}$ покладемо

$$B_{x',x''} = \left\{ t \in E : d_Y\left(f^t(x'), f^t(x'')\right) \le \frac{1}{m} \right\}.$$

Оскільки функція $(f_{x'}, f_{x''})\colon T \to Y^2$, де $(f_{x'}, f_{x''})(t) = (f_{x'}(t), f_{x''}(t))$ — вимірна, а функція $d_Y\colon Y^2 \to \mathbb{R}$ — неперервна, то їх композиція $h = d_Y \circ (f_{x'}, f_{x''})$ є вимірною функцією. Тому множини $B_{x', x''} = h^{-1}([0, 1/m])$ є вимірними для всіх $(x', x'') \in S_{m,n}$. Але зрозуміло, що $\tilde{A}_{m,n} = \bigcap_{(x', x'') \in S_{m,n}} B_{x', x''}$. Отже, і множина $A_{m,n} = \tilde{A}_{m,n}$ є вимірною, як не більш ніж зліченний перетин вимірних множин.

Очевидно, що для кожного m послідовність $\left(A_{m,n}\right)_{n=1}^{\infty}$ зростає. Тому за властивістю неперервності знизу міри $\mu(A_{m,n}) \to \mu(E)$ при $t \to \infty$. Звідси для кожного $m \in \mathbb{N}$ існує номер n_m такий, що $\mu\left(E \setminus A_{m, n_m}\right) < \varepsilon / 2^{m+2}$. Множина $B = \bigcap_{m=1}^{\infty} A_{m, n_m}$ — вимірна, причому

$$\mu(T \setminus B) = \mu((T \setminus E) \cup (E \setminus B)) < \mu(T \setminus E) + \mu(E \setminus B) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Покажемо, що звуження $f|_{B \times X}$ є неперервною функцією. Візьмемо довільну точку $z_0 = (x_0, y_0) \in B \times X$ і зафіксуємо довільне $\delta > 0$. Знайдуться номери m_1, для якого $1/m_1 < \delta/3$, і m_2, для якого $x_0 \in G_{m_2}$. Позначимо $m_0 = \max\{m_1, m_2\}$. Оскільки $x_0 \in G_{m_0}$ і $\overline{X}_{m_0} \supseteq G_{m_0}$, то існує такий номер k_0, що $x_{k_0} \in G_{m_0}$ і $d_X\left(x_{k_0}, x_0\right) < 1/2n_{m_0}$. Але звуження $f_{x_{k_0}}|_B$ — неперервне, адже $B \subseteq A_{k_0}$. Тому існує такий окіл U точки t_0 в B, що для всіх $t \in U$ виконується нерівність $d_Y\left(f_{x_{k_0}}(t), f_{x_{k_0}}(t_0)\right) < \delta / 3$. Нехай

$$V = \left\{x \in X\colon d_X(x, x_0) < \frac{1}{2n_{m_0}}\right\}.$$

Тоді $W = U \times V$ — окіл точки z_0 в просторі $B \times X$. Для довільної точки $z = (t, x) \in W$ маємо

$$d_X\left(x, x_{k_0}\right) \le d_X(x, x_0) + d_X\left(x_0, x_{k_0}\right) < \frac{1}{n_{m_0}}, \qquad d_X\left(x_{k_0}, x_0\right) < \frac{1}{n_{m_0}}$$

і $t, t_0 \in A_{m_0, n_{m_0}}$. Тому

$$d_Y\left(f(t, x), f\left(t, x_{k_0}\right)\right) \le \frac{1}{m_0} \le \frac{1}{m_1} < \frac{\delta}{3}$$

і, так само, $d_Y\left(f\left(t_0, x_{k_0}\right), f(t_0, x_0)\right) < \delta / 3$. В такому разі

$$d_Y(f(t, x), f(t_0, x_0)) \le d_Y\left(f(t, x), f\left(t, x_{k_0}\right)\right) +$$

$$+ d_Y\left(f\left(t, x_{k_0}\right), f\left(t_0, x_{k_0}\right)\right) + d_Y\left(f\left(t_0, x_{k_0}\right), f(t_0, x_0)\right) < \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} = \delta.$$

Отже, неперервність звуження $f|_B$ доведено.

З регулярності міри μ випливає, що існує замкнена множина $T_\varepsilon \subseteq B$ така, що $\mu(B \setminus T_\varepsilon) < \varepsilon / 2$. Тоді $\mu(T \setminus T_\varepsilon) < \varepsilon$. Ясно, що звуження функції f на множину $T_\varepsilon \times X$ буде неперервним. Отже, множина T_ε — шукана.

Одержаний результат близький до результату Річчері – Віллані [6], в якому T — компакт, X — метризовний і сепарабельний і Y — метризовний. Таким чином, у нашому узагальненні, яке доведено іншим методом, послаблюються умови на T і підсилюються на X і Y.

5. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ розглянемо вкладення $j_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \to \to (\xi_1, \ldots, \xi_n, 0, 0, \ldots)$ n-вимірного арифметичного простору $\mathbb{R}^n$, який розглядаємо з його стандартною евклідовою топологією, в простір $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ всіх послідовностей дійсних чисел. Образ $X_n = j_n(\mathbb{R}^n)$ є підпростором $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, а відображення $j_n : \mathbb{R}^n \to X_n$ — алгебраїчним ізоморфізмом, з допомогою якого топологія з $\mathbb{R}^n$ переноситься на X_n. Покладемо $\mathbb{R}^\infty = \bigcup_{n=1}^\infty X_n$. Очевидно, що $\mathbb{R}^\infty$ — це підпростір $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Ми його наділяємо топологією індуктивної границі, що породжується послідовністю вкладень $j_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^\infty$. Зрозуміло, що $\mathbb{R}^\infty$ є строгою індуктивною границею послідовності просторів X_n. Це так званий простір фінітних послідовностей. Базу околів точки $x_0 = \left(\xi_1^0, \ldots, \xi_k^0, \ldots\right) \in \mathbb{R}^\infty$ утворюють множини

$$V_e(x_0) = V_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k, \ldots}(x_0) = \left\{ x = (\xi_k)_{k=1}^\infty \in \mathbb{R}^\infty : \left|\xi_k - \xi_k^0\right| \le \varepsilon_k \quad \text{при} \quad k \in \mathbb{N} \right\},$$

де $e = (\varepsilon_k)_{k=1}^\infty$ — довільна послідовність додатних чисел. Якщо $x_0 \in X_{n_0}$, то окіл $V = V_e(x_0)$ можна подати у вигляді об'єднання зростаючої послідовності паралелепіпедів

$$V_m = V_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n_0+m}}(x_0) = V \cap X_{n_0+m}, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots .$$

Нехай T — деякий топологічний простір. Розглянемо топологічні добутки $Z = = T \times \mathbb{R}^\infty$, $Z_n = T \times X_n$, де $n = 1, 2, \ldots$, і для точки $z = (t, x) \in T \times \mathbb{R}^n$ покладемо $J_n(z) = (t, j_n(x))$. Для кожного n відображення $J_n : T \times \mathbb{R}^n \to Z_n$ є гомеоморфізмом.

Добре відомо [13], що множина $A \subseteq \mathbb{R}^\infty$ буде замкненою тоді і тільки тоді, коли всі її сліди $A_n = A \cap X_n$ будуть замкненими відповідно в просторах X_n. Методом, застосованим в [13], доведемо наступне узагальнення цього результату.

Теорема 4. *Нехай T — локально компактний топологічний простір. Множина $F \subseteq Z$ буде замкненою в Z тоді і тільки тоді, коли для кожного $n \in \mathbb{N}$ множина $F_n = F \cap Z_n$ буде замкненою в просторі Z_n.*

Доведення. Нехай F — замкнена множина в Z. Для кожного n тотожне вкладення Z_n в Z неперервне, тому множина F_n замкнена в Z_n як прообраз F при цьому вкладенні.

Нехай для кожного $n \in \mathbb{N}$ множина F_n замкнена в Z_n. Покажемо, що множина F замкнена в Z. Візьмемо довільну точку $z_0 = (t_0, x_0) = \left(t_0; \xi_1^0, \xi_2^0, \ldots\right) \in \in Z \setminus F$. Існує номер n_0 такий, що $\xi_k^0 = 0$ для $k > n_0$. Тоді $z_0 \in Z_{n_0} \setminus F_{n_0}$. Оскільки множина F_{n_0} замкнена в Z_{n_0}, то існує компактний окіл U точки t_0 в T і число $\delta_0 > 0$ такі, що для околу

$$V_0 = \left\{ (\xi_k) \in \mathbb{R}^{n_0} : \max_{1 \le k \le n_0} \left|\xi_k - \xi_k^0\right| \le \delta_0 \right\}$$

точки $j_{n_0}^{-1}(x_0)$ в просторі $\mathbb{R}^{n_0}$ матимемо $\left(U \times j_{n_0}(V_0)\right) \cap F_{n_0} = \varnothing$. Множина $W_0 = U \times V_0$ є компактним околом точки $z_{n_0} = J_{n_0}^{-1}(z_0)$ у просторі $T \times \mathbb{R}^{n_0}$ таким, що $W_0 \cap J_{n_0}^{-1}\left(F_{n_0}\right) = \varnothing$. Припустимо, що вже побудовано такий компактний окіл W_m точки $z_{n_0+m} = J_{n_0+m}^{-1}(z_0)$ в $T \times \mathbb{R}^{n_0+m}$, що $W_m \cap$ $\cap J_{n_0+m}^{-1}\left(F_{n_0+m}\right) = \varnothing$. Покладемо

$$B_{m+1} = J_{n_0+m+1}^{-1}\left(F_{n_0+m+1}\right) \cap (W_m \times \mathbb{R}).$$

Множина B_{m+1} замкнена в $T \times \mathbb{R}^{n_0+m+1}$, причому $B_{m+1} \cap (W_m \times \{0\}) = \varnothing$, тому що якщо існує точка $u \in B_{m+1} \cap (W_m \times \{0\})$, то $u = (u', 0)$, де $u' \in W_m$, причому $J_{n_0+m}(u') = J_{n_0+m+1}(u) \in F_{n_0+m+1}$ і разом з тим $J_{n_0+m}(u') \in Z_{n_0+m}$, отже, $u' \in W_m \cap J_{n_0+m}^{-1}\left(F_{n_0+m}\right)$, що суперечить вибору околу W_m.

Розглянемо проекцію $q: W_m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, яка ставить у відповідність точці $z =$ $= \left(t; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n_0+m+1}\right)$ точку $\xi_{n_0+m+1} \in \mathbb{R}$. Оскільки множина W_m компактна, а B_{m+1} замкнена в $W_m \times \mathbb{R}$, то за теоремою Куратовського [14, с. 200] множина $q(B_{m+1})$ замкнена в $\mathbb{R}$. Оскільки $q^{-1}(0) = W_m \times \{0\}$ і $B_{m+1} \cap (W_m \times \{0\}) = \varnothing$, то $0 \notin q(B_{m+1})$. Отже, існує число $\delta_{m+1} > 0$ таке, що $[-\delta_{m+1}, \delta_{m+1}] \cap q(B_{m+1}) = \varnothing$. Покладемо

$$W_{m+1} = W_m \times [-\delta_{m+1}, \delta_{m+1}].$$

Тоді

$$W_{m+1} \cap J_{n_0+m+1}^{-1}\left(F_{n_0+m+1}\right) = W_{m+1} \cap B_{m+1} = \varnothing.$$

Таким чином, отримуємо послідовність (W_m) околів точок $z_{n_0+m} = J_{n_0+m}^{-1}(z_0)$ у просторах $T \times \mathbb{R}^{n_0+m}$ відповідно таких, що $W_m \cap J_{n_0+m}^{-1}\left(F_{n_0+m}\right) = \varnothing$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Розглянемо множину $W = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_{n_0+m}(W_m)$. З нашої побудови випливає, що $W = U \times V$, де $V = V_{\delta_0, \ldots, \delta_0, \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m, \ldots}(x_0)$ (δ_0 береться n_0 разів). Отже, W є околом точки z_0 у просторі Z. Крім того, ясно, що $W \cap F =$ $= \varnothing$, отже, F — замкнена в Z множина.

Наслідок. *Нехай T — локально компактний топологічний простір, Y — топологічний простір. Функція $f: T \times \mathbb{R}^{\infty} \to Y$ буде неперервною тоді і тільки тоді, коли для кожного $n \in \mathbb{N}$ звуження $f_n = f|_{T \times X_n}$ будуть неперервними.*

Доведення. *Необхідність* очевидна. Доведемо *достатність*. Нехай B — замкнена в Y множина. Оскільки всі функції f_n неперервні, то для кожного $n \in \mathbb{N}$ множина $A_n = f_n^{-1}(B)$ буде замкненою в $T \times X_n$. Тоді за теоремою 4 множина $A = f^{-1}(B)$ буде замкненою в $T \times \mathbb{R}^{\infty}$, а отже, функція f є неперервною.

Теорема 5. *Нехай T — локально компактний топологічний простір із скінченною регулярною мірою μ, Y — сепарабельний метризовний простір і $f: T \times \mathbb{R}^{\infty} \to Y$ — функція Каратеодорі. Тоді f має властивість* SD.

Доведення. Нехай функція $f: T \times \mathbb{R}^{\infty} \to Y$ задовольняє умови теореми. Тоді для кожного $n \in \mathbb{N}$ функція $f_n = f|_{T \times X_n}$ задовольняє умови теореми 3.

Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$ і для кожного $n \in \mathbb{N}$ знайдемо замкнену множину $A_n \subseteq T$ таку, що $\mu(T \setminus A_n) < \varepsilon/2^n$ і звуження $f|_{A_n \times X_n}$ неперервне. Покладемо $T_\varepsilon = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Тоді $\mu(T \setminus T_\varepsilon) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(T \setminus A_n) < \varepsilon$ і для кожного $n \in \mathbb{N}$ звуження $f|_{T_\varepsilon \times X_n}$ неперервне. Оскільки простір T_ε локально компактний, як замкнений підпростір локально компактного простору T, то за наслідком теореми 4 функція $f|_{T_\varepsilon \times \mathbb{R}^\infty}$ буде неперервною. Отже, функція f має властивість SD.

6. Як теореми 3 і 5, так і теорему Річчері – Віллані [6] можна узагальнити на випадок нескінченної міри μ. Основним інструментом при цьому є наступний результат.

Теорема 6. *Нехай T — топологічний простір з регулярною σ-скінченною мірою μ, X і Y — топологічні простори і $f: T \times X \to Y$ — функція, така, що для кожної множини $E \subseteq T$ скінченної міри звуження $f|_{E \times X}$ має властивість* SD. *Тоді і f має властивість* SD.

Доведення. За теоремою 2 існує локально скінченна послідовність вимірних множин E_n така, що $\mu(E_n) < +\infty$ для кожного n і $T = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Нехай $\varepsilon > 0$. Оскільки міра μ — регулярна, то для кожного n існує замкнена в T множина F_n така, що $F_n \subseteq E_n$ і $\mu(E_n \setminus F_n) < \varepsilon/2^{n+1}$. Покладемо $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Ясно, що $\mu(T \setminus F) < \varepsilon/2$, $\mu(F_n) < +\infty$ для кожного n і послідовність $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ — локально скінченна. За умовою кожне звуження $f|_{F_n \times X}$ має властивість SD. Виберемо для кожного n таку замкнену в F_n множину A_n, що $\mu(F_n \setminus A_n) < \varepsilon/2^{n+1}$ і звуження $f|_{A_n \times X}$ неперервне за сукупністю змінних. Множини A_n будуть замкненими і у просторі T, як і їх об'єднання $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, причому $\mu(F \setminus A) < \varepsilon/2$. Множини $A_n \times X$ утворюють локально скінченну послідовність замкнених множин у просторі $T \times X$. Оскільки всі звуження $f|_{A_n \times X}$ неперервні, то і звуження $f|_{A \times X}$ теж неперервне, причому $\mu(T \setminus A) < \varepsilon$.

З теорем 3, 5 і 6 безпосередньо одержуємо такі результати.

Теорема 7. *Нехай T — топологічний простір з регулярною σ-скінченною мірою μ, X — метризовний сепарабельний локально компактний простір, Y — метризовний сепарабельний простір і $f: T \times X \to Y$ — функція Каратеодорі. Тоді f має властивість* SD.

Теорема 8. *Нехай T — локально компактний топологічний простір з регулярною σ-скінченною мірою μ, Y — метризовний сепарабельний простір і $f: T \times \mathbb{R}^\infty \to Y$ — функція Каратеодорі. Тоді f має властивість* SD.

Теорема 9. *Нехай T — σ-компактний топологічний простір з регулярною σ-скінченною мірою μ, X — метризовний сепарабельний простір, Y — метризовний простір і $f: T \times X \to Y$ — функція Каратеодорі. Тоді f має властивість* SD.

Доведення. Нехай $T = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$, де $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ — зростаюча послідовність компактних множин, $E \subseteq T$ — довільна множина скінченної міри і $\varepsilon > 0$. На основі регулярності міри μ виберемо замкнену множину F таку, що $F \subseteq E$ і $\mu(E \setminus F) < \varepsilon/3$. Оскільки $\mu(F) = \lim_{n\to\infty} \mu(F \cap T_n)$, то існує такий номер n_0, що $\mu\left(F \setminus T_{n_0}\right) = \mu\left(F \setminus \left(F \cap T_{n_0}\right)\right) < \varepsilon/3$. Множина $K = F \cap T_{n_0}$ компактна, тому за теоремою Річчері–Віллані існує така замкнена множина A, що $A \subseteq K$, $\mu(K \setminus A) < \varepsilon/3$ і звуження $f|_{A \times X}$ неперервне. Оскільки $\mu(E \setminus A) < \varepsilon$, то $f|_{E \times X}$ має властивість SD. Тепер залишається скористатись теоремою 6.

Автори висловлюють подяку О. Маслюченку і О. Толесникову за зауваження, які дозволили покращити первісний варіант роботи.

1. *Scorza-Dragoni G.* Un teorema sulle funzioni continue rispetto ad una e misurabili rispetto ad un'altra variable // Rend. Semin. mat. Univ. Padova. – 1948. – **17.** – P. 102–108.
2. *Van Vleck E.B.* A proof of some theorems on pointwise discontinuous function // Trans. Amer. Math. Soc. – 1907. – **8.** – P. 189–204.
3. *Piotrowski Z.* Separate and joint continuity // Real. Anal. Exch. – 1985, 1986. – **11**, № 2. – P. 293–322.
4. *Piotrowski Z.* Separate and joint continuity. II // Ibid. – 1989, 1990. – **15**, № 1. – P. 248–258.
5. *Маслюченко В.К., Михайлюк В.В., Собчук О.В.* Дослідження про нарізно неперервні відображення // Матеріали міжнар. мат. конф., присвяченої пам'яті Ганса Гана. – Чернівці: Рута, 1995. – С.192–246.
6. *Ricceri B., Villani A.* Separability and Scorza-Dragoni's property // Le Matematiche. – 1982. – **37**, № 1. – P. 156–161.
7. *Castaign C.* Une nouvelle extension du theoreme de Dragoni-Scorza // G.r. Acad sci. A. – 1970. – **271.** – P.396–398.
8. *Averna D., Fiacca A.* Sulle proprieta di Scorza-Dragoni // Atti Semin. mat. e fis.Univ. Modena. – 1984. – **33**, № 2. – P.313–318.
9. *Окстоби Дж.* Мера и категория. – М.: Мир, 1974. – 158 с.
10. *Hahn N.* Theorie der reellen Functionen. – Berlin: Springer, 1921. – Bd 1. – VIII + 600 S.
11. *Breckenridge J.C., NichiuraT.* Partial continuity, quasiicontinuity and Baire spaces // Bull. Inst. Math. Acad. Sinica. – 1976. – **4**, № 2. – P.191–203.
12. *Маслюченко Б.К.* Сукупна неперервність нарізно неперервних відображень // Крайові задачі з різними виродженнями і особливостями / За ред. С. Д. Івасишена. – Чернівці, 1990. – С.143–159.
13. *Маслюченко В.К., Собчук О.В.* Досконала нормальність простору фінітних послідовностей. – Чернівці, 1991. – 5 с. – Деп. в ДНТБ України, № 1610-Ук 91.
14. *Энгелькинг Р.* Общая топология. – М.: Мир, 1986. – 752 с.

Одержано 11.02.98