УДК 517.5–514.17

А. А. Лигун, А. А. Шумейко (Днепродзержин. техн. ун-т)

ОПИСАНИЕ ВЫПУКЛЫХ КРИВЫХ

We give a description of convex curves which enables one to reduce the problem of approximation of a convex curve by piecewise circular lines in the Hausdorff metric to the problem of approximation of $-periodic functions by trigonometric splines in the uniform metric. We describe some properties of convex curves.

Наведено опис опуклих кривих, який дозволяє звести задачу наближення опуклої кривої кусково-коловими лініями в метриці Хаусдорфа до задачі наближення 2π-періодичних функцій тригонометричними сплайнами в рівномірній метриці. Наведено деякі властивості опуклих кривих.

Исследуются некоторые свойства выпуклых кривых, в частности, задача аппроксимации кривых в метрике Хаусдорфа сводится к аппроксимации периодических функций в равномерной метрике.

Вначале приведем несколько определений.

Жорданову кривую $\Gamma(t)$ будем называть кусочно-гладкой, если в каждой точке касательная изменяется непрерывно.

Как обычно, под направляющим вектором касательной к кривой Γ в точке $\Gamma(t)$ будем понимать вектор $(x'(t), y'(t))$.

Кривую $\Gamma(t)$ с непрерывной кривизной

$$k(\Gamma, t) = \frac{y'(t)\,x''(t) - y''(t)\,x'(t)}{\left((x'(t))^2 + (y'(t))^2\right)^{3/2}} \tag{1}$$

будем называть гладкой. Через $R(\Gamma, t) = k^{-1}(\Gamma, t)$ обозначим радиус кривизны $\Gamma(t)$.

Жорданову кривую (дугу) $\Gamma(t)$ будем называть строго выпуклой, если любая прямая пересекает ее не более чем в двух различных точках.

Через $C^{r,*}(\mathbb{T})$ обозначим множество всех T-периодических функций $f(t)$ с кусочно-непрерывной r-й производной. Для определенности будем считать, что в точке разрыва t значение r-й производной определено равенством

$$f^{(r)}(t) = \frac{f^{(r)}(t-0) + f^{(r)}(t+0)}{2}.$$

Задачи аппроксимации кривых тесно связаны с понятием эквидистанты. Как обычно, для гладкой замкнутой параметрически заданной кривой $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$ под ε-эквидистантой (внутренней или внешней) будем понимать кривую, определяемую равенствами

$$\Gamma_\varepsilon^{\mp}(t) = \left(x(t) \mp \varepsilon\frac{y'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}},\ y(t) \pm \varepsilon\frac{x'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}\right). \tag{2}$$

Важную роль в дифференциальной геометрии и ее приложениях (см., например, [1]) играют эволюты кривых — геометрическое место центров кривизн, т. е.

$$\tilde{\Gamma}(t) = \left(x(t) - \frac{R(\Gamma, t)\,y'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}},\ y(t) + \frac{R(\Gamma, t)\,x'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}\right). \tag{3}$$

Каждой функции $\theta \in C^{3,*}(2\pi)$ поставим в соответствие параметрически заданную кривую

$$\Gamma(\theta, \varphi) = \begin{cases} x(\theta, \varphi) \\ y(\theta, \varphi) \end{cases} = \begin{cases} -\theta(\varphi)\sin\varphi - \theta'(\varphi)\cos\varphi, \\ \theta(\varphi)\cos\varphi - \theta'(\varphi)\sin\varphi. \end{cases} \tag{4}$$

Приведем некоторые, необходимые в дальнейшем, свойства кривых $\Gamma(\theta, \varphi)$. Для удобства ссылок объединим их в одно утверждение. Некоторые из них в том или ином виде известны в теории выпуклых кривых.

Предложение 1. *Пусть функция* $\theta \in C^{2,*}(2\pi)$. *Тогда*:

1. *Кривая* $\Gamma(\theta)$ *замкнутая и кусочно-гладкая.*

2. *Если*

$$\theta(\varphi) = \theta_1(\varphi) + x_0 \sin\varphi - y_0 \cos\varphi, \tag{5}$$

то

$$x(\theta, \varphi) = x(\theta_1, \varphi) - x_0,$$
$$y(\theta, \varphi) = y(\theta_1, \varphi) - y_0.$$

3. *Если для* $\varphi \in [\alpha, \beta]$ *имеет место равенство* $\theta(\varphi) = \theta_1(\varphi)$, *то*

$$\Gamma(\theta, \varphi) = \Gamma(\theta_1, \varphi), \qquad \varphi \in [\alpha, \beta].$$

4. *Направляющий вектор касательной к кривой* $\Gamma(\theta)$ *в точке* $\Gamma(\theta, \varphi)$ *составляет с положительным направлением оси* OX *угол* φ, *если* $\theta(\varphi) + \theta''(\varphi) > 0$, *и угол* $\pi + \varphi$, *если* $\theta(\varphi) + \theta''(\varphi) < 0$.

5. *Кривизна кривой* $\Gamma(\theta, \varphi)$ *определяется равенством*

$$k(\Gamma(\theta), \varphi) = -\frac{1}{\theta(\varphi) + \theta''(\varphi)},$$

следовательно, если функция $\theta(\varphi) + \theta''(\varphi)$ *не изменяет знак на периоде, то кривая* $\Gamma(\theta)$ *строго выпуклая.*

6. *Если функция* $\theta(\varphi)$ *такова, что ее первая производная имеет ограниченную полную вариацию, то дифференциал дуги кривой* $\Gamma(\theta, \varphi)$ *определяется равенством*

$$dl(\Gamma(\theta, \varphi)) = \theta(\varphi)\,d\varphi + d\theta'(\varphi).$$

7. *Длина дуги* $\mathcal{L}(\Gamma(\theta))$ *кривой* $\Gamma(\theta)$ *вычисляется следующим образом*:

$$\mathcal{L}(\Gamma(\theta)) = \int_0^{2\pi} \theta(\varphi)\,d\varphi.$$

8. *Если функция* $\theta(\varphi)$ *такова, что ее первая производная имеет ограниченную полную вариацию и функция* $\theta(\varphi) + \theta''(\varphi)$ *не изменяет знак на периоде, то площадь фигуры* $\mathcal{S}(\Gamma(\theta))$, *ограниченной кривой* $\Gamma(\theta)$, *определяется равенством*

$$\mathcal{S}(\Gamma(\theta)) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\theta^2(\varphi) - (\theta'(\varphi))^2)\,d\varphi.$$

9. *Если имеет место неравенство* $\theta(\varphi) + \theta''(\varphi) > 0$, *то для эквидистант имеет место соотношение*

$$\Gamma_\varepsilon^+(\theta, \varphi) = \Gamma(\theta + \varepsilon, \varphi) \tag{6}$$

при любом $\varepsilon > 0$ *и*

$$\Gamma_{\varepsilon}^{-}(\theta, \varepsilon) = \Gamma(\theta - \varepsilon, \varphi)$$

для достаточно малых положительных ε.

10. *Справедливы равенства*

$$\mathcal{L}(\Gamma_{\varepsilon}^{\mp}(\theta)) = \mathcal{L}(\Gamma(\theta)) \mp 2\pi\varepsilon,$$

$$\mathcal{S}(\Gamma_{\varepsilon}^{\mp}(\theta)) = \mathcal{S}(\Gamma(\theta)) + 2\pi\varepsilon^2 \mp 2\varepsilon\mathcal{L}(\Gamma(\theta)).$$

11. *Если функция* $\theta \in C^{2,*}(2\pi)$, *то эволюта кривой* $\Gamma(\theta)$ *описывается параметрическими уравнениями*

$$\tilde{\Gamma}(\theta, \varphi) = (\theta''(\varphi)\sin\varphi - \theta'(\varphi)\cos\varphi, -\theta''(\varphi)\cos\varphi - \theta'(\varphi)\sin\varphi).$$

Доказательство. Справедливость утверждения 1 очевидным образом следует из вида кривой (4). Для доказательства справедливости свойства 2, используя в (4) вместо функции $\theta(\varphi)$ левую часть равенства (5) и учитывая, что

$$\theta'(\varphi) = \theta_1'(\varphi) + x_0\cos\varphi + y_0\sin\varphi,$$

после очевидных преобразований сразу получаем требуемое соотношение.

Таким образом, коэффициенты Фурье при $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ функции $\theta(\varphi)$ определяют параллельный перенос кривой $\Gamma(\theta)$. Поэтому, не ограничивая общности, в дальнейшем будем считать, что функция $\theta(\varphi)$ имеет коэффициенты Фурье a_1 и b_1, равные нулю.

Утверждение пункта 3 сразу следует из равенств (4).

Используя соотношения

$$x'(\theta, \varphi) = -\cos\varphi(\theta(\varphi) + \theta''(\varphi)), \tag{7}$$

$$y'(\theta, \varphi) = -\sin\varphi(\theta(\varphi) + \theta''(\varphi)), \tag{8}$$

сразу убеждаемся в справедливости утверждения 4.

Для доказательства свойства 5 достаточно в формуле для вычисления кривизны (1) использовать равенства (7), (8) и

$$x''(\theta, \varphi) = \sin\varphi(\theta(\varphi) + \theta''(\varphi)) - \cos\varphi(\theta'(\varphi) + \theta'''(\varphi)), \tag{9}$$

$$y''(\theta, \varphi) = -\cos\varphi(\theta(\varphi) + \theta''(\varphi)) - \sin\varphi(\theta'(\varphi) + \theta'''(\varphi)). \tag{10}$$

Таким образом, чтобы кривая $\Gamma(\theta, \varphi)$ была строго выпукла, необходимо, чтобы на всем периоде функция $\theta(\varphi) + \theta''(\varphi)$ была строго отделена от нуля.

Из формул (7), (8) сразу следует равенство

$$dl(\Gamma(\theta, \varphi)) = \theta(\varphi)d\varphi + d\theta'(\varphi).$$

Отсюда и из того факта, что для 2π-периодической функции $\theta(\varphi)$ с интегрируемой производной имеет место равенство

$$\int_0^{2\pi} d\theta'(\varphi) = 0,$$

сразу получаем

$$\mathcal{L}(\Gamma(\theta)) = \int_0^{2\pi} dl(\Gamma(\varphi)) = \int_0^{2\pi} \theta(\varphi)\,d\varphi.$$

Для вычисления площади фигуры, ограниченной выпуклой кривой $\Gamma(\theta)$, достаточно в формулу для вычисления площади

$$\mathcal{S}(\Gamma(\theta)) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma(\theta)} x\,dy - y\,dx$$

подставить значения $x(\varphi)$, $y(\varphi)$ и их дифференциалов.

Для доказательства справедливости пункта 9 достаточно в равенстве (2) использовать соотношения (7), (8) и учесть факты, приведенные в пунктах 7 и 8.

Эволюта $\tilde{\Gamma}(\theta)$ кривой $\Gamma(\theta)$ определяется из равенств (3), соотношений (4) и утверждения пункта 5.

Обозначим через $\delta(M, L)$ расстояние от точки M до прямой L.

Пусть $L_t(\Gamma(\theta), \varphi)$ — касательная к кривой $\Gamma(\theta)$ в точке $\Gamma(\theta, \varphi)$.

Предложение 2. *Пусть функция* $\theta \in C^{3,*}(2\pi)$, *тогда имеет место равенство*

$$\delta(0, L_t(\Gamma(\theta), \varphi)) = |\theta(\varphi)|.$$

Действительно, касательная к кривой $\Gamma(\theta)$ в точке $\Gamma(\theta, \varphi)$ описывается уравнением

$$x\sin\varphi - y\cos\varphi + \theta(\varphi) = 0. \tag{11}$$

Таким образом, ясно, что

$$\delta(0, L_t(\Gamma(\theta), \varphi)) = \frac{|0\sin\varphi - 0\cos\varphi + \theta(\varphi)|}{\sqrt{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}} = |\theta(\varphi)|.$$

В предложении 2 утверждается, что $\theta(\varphi)$ — опорная функция кривой $\Gamma(\theta, \varphi)$ (см., например, [2]).

Предложение 3. *На кривой* $\Gamma(\theta, \varphi)$ *определим функцию плотности, равную кривизне кривой в точке* φ. *Тогда центр тяжести (центр тяжести кривизны кривой)* $\tilde{M}$ *будет иметь координаты*

$$\tilde{x}(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} x(\theta, \varphi)\,d\varphi,$$

$$\tilde{y}(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} y(\theta, \varphi)\,d\varphi.$$

Действительно, в этом случае в соотношения

$$\tilde{x} = \frac{\int_{\Gamma(\theta)} \kappa(\Gamma(\theta), \varphi)\, x(\theta, \varphi)\, dl(\Gamma(\theta), \varphi)}{\int_{\Gamma(\theta)} \kappa(\Gamma(\theta), \varphi)\, dl(\Gamma(\theta), \varphi)},$$

$$\tilde{y} = \frac{\int_{\Gamma(\theta)} \kappa(\Gamma(\theta), \varphi)\, y(\theta, \varphi)\, dl(\Gamma(\theta), \varphi)}{\int_{\Gamma(\theta)} \kappa(\Gamma(\theta), \varphi)\, dl(\Gamma(\theta), \varphi)}$$

нужно подставить выражения для функции плотности, дифференциала дуги и учесть равенства (4).

Иногда центр тяжести кривизны (точку $\tilde{M} = \tilde{M}(\Gamma)$) называют точкой Штейнера кривой $\Gamma(\theta)$ (см., например, [3]).

Отсюда и из пункта 2 предложения 1 сразу получаем следующее утверждение.

Предложение 4. *Пусть функция* $\theta \in C^{2,*}(2\pi)$ *такова, что*

$$\int_0^{2\pi} \theta(\varphi)\sin\varphi\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \theta(\varphi)\cos\varphi\, d\varphi = 0,$$

тогда справедливо равенство

$$\Gamma(\theta,\varphi) = \begin{cases} x(\theta,\varphi) \\ y(\theta,\varphi) \end{cases} = \begin{cases} \tilde{x}(\theta) - \theta(\varphi)\sin\varphi - \theta'(\varphi)\cos\varphi, \\ \tilde{y}(\theta) + \theta(\varphi)\cos\varphi - \theta'(\varphi)\sin\varphi. \end{cases}$$

Жордановую кусочно-гладкую кривую $\gamma_n(\varphi)$ будем называть дуговым сплайном минимального дефекта, если она состоит из n дуг окружностей.

Для произвольного разбиения периода

$$\Delta_n = \{0 = \varphi_0 < \varphi_1 < \ldots < \varphi_n = 2\pi\}$$

тригонометрическим сплайном минимального дефекта по разбиению Δ_n будем называть непрерывную вместе со своей производной 2π-периодическую функцию, которая на каждом из промежутков $[\varphi_i, \varphi_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, n-1$, имеет вид

$$s(\varphi) = A_{i+1/2} + B_{i+1/2}\sin\varphi + C_{i+1/2}\cos\varphi,$$

где $A_{i+1/2}$, $B_{i+1/2}$ и $C_{i+1/2}$ — некоторые константы.

Множество всех таких сплайнов обозначим через $\mathbb{ST}_1(\Delta_n)$.

Теорема 1. *Любой дуговой сплайн минимального дефекта $\gamma(\Delta_n, \varphi)$ представим в виде*

$$\gamma(\Delta_n,\varphi) = \begin{cases} x(\Delta_n,\varphi) \\ y(\Delta_n,\varphi) \end{cases} = \begin{cases} -\theta(\Delta_n,\varphi)\sin\varphi - \theta'(\Delta_n,\varphi)\cos\varphi; \\ \theta(\Delta_n,\varphi)\cos\varphi - \theta'(\Delta_n,\varphi)\sin\varphi, \end{cases} \tag{12}$$

где тригонометрический сплайн $\theta(\Delta_n) \in \mathbb{ST}_1(\Delta_n)$ такой, что $A_{i+1/2} > 0$, $i = 0, 1, \ldots, n+1$.

Параметры дугового и тригонометрического сплайнов определяются взаимно однозначно, т. е. если для $\varphi \in [\varphi_i, \varphi_{i+1}]$ тригонометрический сплайн $\theta(\Delta_n, \varphi)$ имеет вид $A_{i+1/2} + B_{i+1/2}\sin\varphi + C_{i+1/2}\cos\varphi$, то кривая $\gamma(\Delta_n, \varphi)$ совпадает с дугой окружности радиуса $A_{i+1/2}$ с центром в точке $M_{i+1/2}(-B_{i+1/2}, C_{i+1/2})$ и раствором центрального угла $[\varphi_i + \pi/2, \varphi_{i+1} + \pi/2]$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, и наоборот.

Доказательство. Пусть имеет место представление (12). Из определения тригонометрического сплайна следует, что для $\varphi \in [\varphi_i, \varphi_{i+1}]$ непрерывная кривая $\gamma(\theta, \Delta_n, \varphi)$ будет иметь параметрическое задание

$$x(\Delta_n,\varphi) = -\theta(\Delta_n,\varphi)\sin\varphi - \theta'(\Delta_n,\varphi)\cos\varphi =$$

$$= -(A_{i+1/2} + B_{i+1/2}\sin\varphi + C_{i+1/2}\cos\varphi)\sin\varphi -$$

$$- (B_{i+1/2}\cos\varphi - C_{i+1/2}\sin\varphi)\cos\varphi =$$

$$= -A_{i+1/2}\sin\varphi - B_{i+1/2} = A_{i+1/2}\cos(\varphi + \pi/2) - B_{i+1/2}$$

и

$$y(\Delta_n,\varphi) = A_{i+1/2}\cos\varphi + C_{i+1/2} = A_{i+1/2}\sin(\varphi + \pi/2) + C_{i+1/2}.$$

Следовательно, функции $\theta(\Delta_n, \varphi)$, $\varphi \in [\varphi_i, \varphi_{i+1}]$, будет соответствовать дуга окружности радиуса $A_{i+1/2}$ с центром в точке $M_{i+1/2}(-B_{i+1/2}, C_{i+1/2})$.

Выпуклость $\gamma(\theta, \Delta_n, \varphi)$ следует из условия $A_{i+1/2} > 0$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Покажем теперь, что кривая $\gamma(\theta, \Delta_n, \varphi)$ кусочно-гладкая. Для этого достаточно показать, что касательные справа и слева в точке $\varphi_i + \pi/2$ совпадают.

В силу непрерывности производной тригонометрического сплайна для всех $i = 1, 2, \dots, n$ имеем

$$\theta'(\Delta_n, \varphi_i - 0) = \theta'(\Delta_n, \varphi_i + 0),$$

что можно переписать в виде

$$B_{i-1/2}\cos\varphi_i - C_{i-1/2}\sin\varphi_i = B_{i+1/2}\cos\varphi_i - C_{i+1/2}\sin\varphi_i$$

или, что то же,

$$(B_{i+1/2} - B_{i-1/2})\sin(\varphi_i + \pi/2) + (C_{i+1/2} - C_{i-1/2})\cos(\varphi_i + \pi/2) = 0.$$

Таким образом, вектор $(-B_{i+1/2} + B_{i-1/2}, C_{i+1/2} - C_{i-1/2})$ ортогонален вектору $(-\sin(\varphi_i + \pi/2), \cos(\varphi_i + \pi/2))$ и, следовательно, касательные справа и слева к кривой $\gamma(\Delta_n, \varphi)$ совпадают.

Пусть теперь замкнутая выпуклая кусочно-гладкая кривая $\gamma(\Delta_n, \varphi)$, $\varphi \in \in [0, 2\pi]$, совпадает с дугой окружности радиуса $A_{i+1/2}$ с центром в точке $M_{i+1/2}(-B_{i+1/2}, C_{i+1/2})$ и раствором центрального угла $[\varphi_i + \pi/2, \varphi_{i+1} + + \pi/2]$, $i = 0, 1, \dots, n-1$.

Покажем, что тригонометрический сплайн $\theta(\gamma(\Delta_n), \varphi)$, который на каждом из промежутков $[\varphi_i, \varphi_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, имеет вид $A_{i+1/2} + + B_{i+1/2}\sin\varphi + C_{i+1/2}\cos\varphi$, будет непрерывно дифференцируемым на всем периоде.

Из непрерывности дугового сплайна в каждой точке $\varphi \in [0, 2\pi]$ следует, что для $i = 1, 2, \dots, n-1$ имеют место равенства

$$A_{i-1/2}\cos(\varphi_i + \pi/2) - B_{i-1/2} = A_{i+1/2}\cos(\varphi_i + \pi/2) - B_{i+1/2}$$

и

$$A_{i-1/2}\sin(\varphi_i + \pi/2) + C_{i-1/2} = A_{i+1/2}\sin(\varphi_i + \pi/2) + C_{i+1/2}.$$

Первое из равенств умножаем на $-\sin\varphi_i$, второе — на $\cos\varphi_i$ и, почленно складывая, получаем

$$A_{i-1/2} + B_{i-1/2}\sin\varphi_i + C_{i-1/2}\cos\varphi_i = A_{i+1/2} + B_{i+1/2}\sin\varphi_i + C_{i+1/2}\cos\varphi_i.$$

Таким образом, мы показали непрерывность соответствующего тригонометрического сплайна $\theta(\gamma(\Delta_n), \varphi)$.

В силу кусочной гладкости кривой в любой точке $\varphi \in [0, 2\pi]$ касательная справа совпадает с касательной слева. Для точки $\varphi_i + \pi/2$, $i = 1, 2, \dots, n$, это условие эквивалентно тому, что векторы $\overline{M_{i-1/2}\gamma(\Delta_n, \varphi_i)}$ и $\overline{M_{i+1/2}\gamma(\Delta_n, \varphi_i)}$ ортогональны направляющему вектору касательной $(-\sin(\varphi_i + \pi/2), \cos(\varphi_i + + \pi/2))$. Это условие можно записать в виде

$$(B_{i+1/2} - B_{i-1/2})\sin(\varphi_i + \pi/2) + (C_{i+1/2} - C_{i-1/2})\cos(\varphi_i + \pi/2) = 0$$

или, что то же,

$$B_{i-1/2}\cos\varphi_i - C_{i-1/2}\sin\varphi_i = B_{i+1/2}\cos\varphi_i - C_{i+1/2}\sin\varphi_i.$$

Следовательно, имеет место равенство

$$\theta'(\gamma(\Delta_n), \varphi_i - 0) = \theta'(\gamma(\Delta_n), \varphi_i + 0).$$

Теорема доказана.

С помощью предельного перехода отсюда сразу получаем следующую теорему.

Теорема 2. *Любая замкнутая кусочно-гладкая строго выпуклая жорданова кривая* Γ *представима в виде* (4), *где* 2π *-периодическая функция* $\theta \in C^2(2\pi)$ *такова, что* $\theta(\varphi) + \theta''(\varphi)$ *не изменяет знак на периоде и может обращаться в нуль только на множестве меры нуль.*

Из теоремы 1 и пунктов 7 и 8 предложения 1 вытекает следующее утверждение.

***Следствие* 1.** *Длина контура любого дугового сплайна* $\gamma(\Delta_n)$ *минимального дефекта* $\gamma(\Delta_n, \varphi)$ *определена равенством*

$$\mathcal{L}(\gamma(\Delta_n)) = \sum_{i=1}^{n} A_{i-1/2} \Delta\varphi_{i-1/2},$$

а площадь фигуры, ограниченной выпуклым дуговым сплайном $\gamma(\Delta_n)$, *определяется равенством*

$$\mathcal{S}(\gamma(\Delta_n)) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} A_{i-1/2}\Bigg(A_{i-1/2}\Delta\varphi_{i-1/2} + $$

$$+ 2\sin\frac{\Delta\varphi_{i-1/2}}{2}(B_{i-1/2}\sin\varphi_{i-1/2} + C_{i-1/2}\cos\varphi_{i-1})\Bigg),$$

где $\Delta\varphi_{i-1/2} = \varphi_i - \varphi_{i-1/2}$ *и* $\varphi_{i-1/2} = (\varphi_i + \varphi_{i-1})/2$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Предложение 5. *Пусть функция* $\theta(\varphi)$, *непрерывно дифференцируема всюду, кроме точки* φ_0, *и*

$$l_0 = \theta'(\varphi_0 + 0) - \theta'(\varphi_0 - 0) > 0,$$

тогда на кривой $\Gamma(\theta, \varphi)$ *значению параметра* $\varphi = \varphi_0$ *будет соответствовать участок прямой длины* l_0.

Если функция $\theta(\varphi) \in C^2(2\pi)$ *такова, что* $\theta(\varphi) + \theta''(\varphi) = 0$ *при* $\varphi \in [\alpha, \beta]$, *то на кривой* $\Gamma(\theta, \varphi)$ *есть угловая точка с полукасательными, наклоненными к положительному направлению оси* OX *под углами* α *и* β *соответственно.*

Как следует из вида дифференциала дуги (см. пункт 6 предложения 1), для любого малого $\varepsilon > 0$ справедливо соотношение

$$\int\limits_{\varphi_0-\varepsilon}^{\varphi_0+\varepsilon} dl(\Gamma(\varphi)) = \big(\theta'(\varphi + 0) - \theta'(\varphi_0 - 0)\big)\big(1 + o(1)\big).$$

Отсюда сразу следует, что если функция $\theta(\varphi)$ такова, что ее первая производная в точке φ_0 имеет разрыв первого рода и

$$l_0 = \theta'(\varphi_0 + 0) - \theta'(\varphi_0 - 0),$$

то значению параметра $\varphi = \varphi_0$ на кривой $\Gamma(\theta, \varphi)$ будет соответствовать отрезок прямой длины l_0.

Справедливость второй части предложения следует из пункта 4 предложения 1.

Для функции $f(t)$, ν-я производная которой в каждой точке $t \in (a, b)$ имеет односторонние производные $f^{(\nu)}(t \pm 0)$, положим

$$f^{((\nu))}(t) = \frac{1}{2}\left(f^{(\nu)}(t+0) + f^{(\nu)}(t-0)\right).$$

Пусть Θ_n — множество промежутков $[\alpha_k, \beta_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$, из $[0, 2\pi]$ таких, что

$$\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \ldots < \beta_n.$$

Через Ψ_m обозначим m-мерный вектор $\{\varphi_k\}_{k=1}^m$ такой, что

$$\varphi_k \in (\beta_1, \beta_1 + 2\pi) \setminus \bigcup_{i=1}^{n} (\alpha_i, \beta_i), \qquad k = 1, 2, \ldots, m,$$

и

$$\varphi_1 < \varphi_2 < \ldots < \varphi_m.$$

Обозначим через $\mathfrak{L}_m = \{l_k\}_{k=1}^m$ m-мерный вектор с положительными координатами.

Кроме того, пусть $\mathfrak{M}(\Theta_n, \Psi_m, \mathfrak{L}_m)$ — класс замкнутых выпуклых жордановых кривых $\Gamma(t)$, имеющих следующие свойства:

если касательная, скользящая по кривой, в некоторой точке наклонена к положительному направлению оси OX под углом α_i, то при переходе через эту точку угол наклона принимает значение β_i;

если касательная, скользящая по кривой, в некоторой точке наклонена к положительному направлению оси OX под углом φ_k, то касательная будет совпадать с участком кривой длины l_k.

Здесь считаем, что направление касательной в точке $(x(t), y(t))$ совпадает с направлением вектора $(x'(t), y'(t))$.

Каждому набору $(\Theta_n, \Psi_m, \mathfrak{L}_m)$ поставим в соответствие класс $\mathfrak{T}(\Theta_n, \Psi_m, \mathfrak{L}_m)$ 2π-периодических кусочно-дифференцируемых функций $\theta(\varphi)$, определенный следующим образом:

производная $\theta'(\varphi)$ непрерывна во всех точках промежутка $[0, 2\pi]$, кроме точек φ_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, в которых имеет место соотношение

$$\theta'(\varphi_k + 0) - \theta'(\varphi_k - 0) = l_k;$$

производная $\theta^{((2))}(\varphi)$ почти всюду существует, функция $\theta(\varphi) + \theta^{((2))}(\varphi)$ не изменяет знак на периоде, обращается в нуль при $\varphi \in [\alpha_k, \beta_k]$, $k = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n$, и на множестве $(\beta_1, \beta_1 + 2\pi) \setminus \bigcup_{i=1}^n (\alpha_i, \beta_i)$ почти всюду отлична от нуля.

Из предложения 5 и теоремы 2 непосредственно получаем следующее утверждение.

Теорема 3. *Кривая* $\Gamma(\theta)$ *принадлежит классу* $\mathfrak{M}(\Theta_n, \Psi_m, \mathfrak{L}_m)$ *тогда и только тогда, когда она представима в виде* (4), *где функция* $\theta(\varphi)$ *лежит в классе* $\mathfrak{I}(\Theta_n, \Psi_m, \mathfrak{L}_m)$.

Отсюда и из предложения 2 вытекает такое следствие.

Следствие 2. *Если выпуклая кривая* $\Gamma(\theta_0)$ *находится в области, ограниченной гладкой выпуклой кривой* $\Gamma(\theta_1)$, *то имеет место неравенство*

$$\theta_0(\varphi) \le \theta_1(\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi],$$

и, наоборот, если $\theta_0(\varphi) + \theta_0''(\varphi)$ *не изменяет знак на периоде, а функция* $\theta_1(\varphi) + \theta_1''(\varphi)$ *строго отделена от нуля и*

$$\theta_0(\varphi) \le \theta_1(\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi],$$

то кривая $\Gamma(\theta_0, \varphi)$ *лежит в области, ограниченной кривой* $\Gamma(\theta_1, \varphi)$.

***Следствие* 3.** *Любой выпуклый n-угольник с вершинами в точках* $M_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *однозначно представим в виде* (4), *где функция* $\theta(\varphi)$ *определяется равенством*

$$\theta(\varphi) = \frac{1}{\sin(\varphi_{i+1} - \varphi_i)} \left(\theta_{i+1} \sin(\varphi - \varphi_i) + \theta_i \sin(\varphi_{i+1} - \varphi)\right),$$

где

$$\theta_i = \sqrt{(x_i - \tilde{x})^2 + (y_i - \tilde{y})^2}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\tilde{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \tilde{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i$$

и φ_i $(\varphi_1 < \varphi_2 < \ldots < \varphi_n < \varphi_{n+1} = \varphi_1 + 2\pi)$ — *угол наклона вектора* $\overline{M_i M_{i+1}}$ *к положительному направлению оси* OX.

Жорданову кусочно-гладкую кривую $\gamma_n(\Delta_n, \varphi)$ будем называть H-сплайном минимального дефекта по разбиению Δ_n, если ее эволюта на каждом участке совпадает с дугой гипоциклоиды.

Тригонометрическим сплайном второго порядка по разбиению Δ_n будем называть 2π-периодическую непрерывную вместе со своей производной функцию, которая на каждом из промежутков $[\varphi_i, \varphi_{i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, имеет вид

$$s(\varphi) = A_i + B_i \sin\varphi + C_i \cos\varphi + D_i \sin 2\varphi + E_i \cos 2\varphi,$$

где A_i, B_i, C_i, D_i и E_i — некоторые константы.

Множество всех таких сплайнов обозначим через $\mathbb{ST}_2(\Delta_n)$.

Аналогично теореме 1 доказывается следующее утверждение.

Теорема 4. *Для того чтобы замкнутая строго выпуклая кривая* $\gamma(\Delta_n, \varphi)$ *была H-сплайном минимального дефекта, необходимо и достаточно, чтобы кривая была представима в виде* (4), *где* $\theta(\varphi) = \theta(\Delta_n, \varphi)$ — *тригонометрический сплайн второго порядка* $(\theta(\Delta_n) \in \mathbb{S}\,\mathbb{T}_2(\Delta_n))$ *такой, что* $A_i > 4\sqrt{D_i^2 + E_i^2}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Как обычно, ε-коридором $\mathcal{K}_\varepsilon(\Gamma)$ кривой Γ назовем объединение всех кругов $K_M(\varepsilon)$ радиуса ε с центрами, лежащими на кривой Γ, т. е.

$$\mathcal{K}_\varepsilon(\Gamma) = \bigcup_{M \in \Gamma} K_M(\varepsilon).$$

Через $\Re(\Gamma, \gamma)$ обозначим наименьшее значение ε, при котором $\gamma \in \mathcal{K}_\varepsilon(\Gamma)$, т. е.

$$\Re(\Gamma, \gamma) = \min\{\varepsilon : \gamma(t) \in \mathcal{K}_\varepsilon(\Gamma)\}.$$

При этом будем говорить, что кривая γ находится от кривой Γ на расстоянии $\Re(\Gamma, \gamma)$.

Заметим, что таким образом введенное расстояние не является коммутативным.

Теорема 5. *Если кривые* Γ *и* γ *замкнутые выпуклые (а кривая* Γ, *кроме того, кусочно-гладкая и строго выпуклая) и таковы, что*

$$\| \theta(\Gamma) - \theta(\gamma) \|_C = \varepsilon,$$

то при достаточно малом ε *справедливо соотношение*

$$\mathfrak{R}(\Gamma, \gamma) \le \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть сначала кривая Γ такова, что

$$\theta(\Gamma, \varphi) + \theta''(\Gamma, \varphi) > a > 0$$

для всех $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Из условия

$$\| \theta(\Gamma) - \theta(\gamma) \|_C = \varepsilon$$

следуют неравенства

$$\theta(\Gamma, \varphi) - \varepsilon \le \theta(\gamma, \varphi) \le \theta(\Gamma, \varphi) + \varepsilon.$$

Отсюда в силу следствия 2 вытекает, что кривая γ лежит между кривыми $\Gamma(\theta(\Gamma) - \varepsilon, \varphi)$ и $\Gamma(\theta(\Gamma) + \varepsilon, \varphi)$. Поэтому из предложения 2 получаем, что кривая γ лежит между внешней и внутренней границами ε-коридора кривой Γ, т. е. $\gamma \in \mathcal{K}_\varepsilon(\Gamma)$.

Общий случай получается предельным переходом.

В другом виде связь между аппроксимацией опорных функций в $C_{[0,2\pi]}$ и аппроксимацией кривых в метрике Хаусдорфа приведена, например, в [2, с. 144].

Следствие 4. *Из того (см., например,* [4]), *что для любой функции из* $C^3_{[0,2\pi]}$ *найдется тригонометрический сплайн минимального дефекта, аппроксимирующий данную функцию с порядком* $O(n^{-3})$, *и из теорем* 2 *и* 5 *следует, что для достаточно гладкой кривой найдется последовательность дуговых сплайнов, сходящаяся к этой кривой в метрике Хаусдорфа с порядком* $O(n^{-3})$.

Таким образом, можно оценить качество приближения в хаусдорфовой метрике через приближение опорной функции в равномерной метрике.

С другой стороны, значения опорной функции не всегда известны. Приведем один алгоритм точечного задания функции $\theta(\Gamma, \varphi)$.

Пусть замкнутая выпуклая кривая задана параметрическими уравнениями $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [0, T]$. Выберем произвольное число n и рассмотрим точки

$$t_k = \operatorname{ctg} \frac{kT}{2(n+1)}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

$$t_k = \pi + t_{n-k}, \qquad k = n+1, n+2, \ldots, 2n.$$

Вычислим углы φ_k согласно формулам

$$\varphi_k = \operatorname{arcctg} \frac{x'(t_k)}{y'(t_k)}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\varphi_k = \pi + \operatorname{arcctg} \frac{x'(t_k)}{y'(t_k)}, \qquad k = n+1, n+2, \ldots, 2n,$$

а значения функции найдем по формулам

$$\theta_k = -x(t_k)\sin\varphi_k + y(t_k)\cos\varphi_k, \quad k = 1, 2, \ldots, 2n.$$

Таким образом, получаем таблицу (θ_k, φ_k), $k = 1, 2, \ldots, 2n$.

Применяя различные методы обработки табличных данных (см., например, [5]), получаем аналитическое описание функции $\theta(\Gamma, \varphi)$.

Дальнейшие наши рассуждения посвящены строго выпуклым замкнутым кривым.

Ясно, что функция $\theta(\varphi)$ удовлетворяет условию Дирихле, поэтому ее можно записать в виде ряда Фурье:

$$\theta(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \cos(k\varphi + \varphi_k).$$

Из предложения 1 сразу получаем такое следствие.

***Следствие* 5.** *Для строго выпуклой замкнутой кривой имеют место равенства*

$$\mathcal{L}(\Gamma(\theta)) = a_0\pi$$

и

$$\mathcal{S}(\Gamma(\theta)) = \frac{a_0^2\pi}{2} - \pi\sum_{k=1}^{\infty}(k^2-1)\rho_k^2.$$

Отсюда сразу следует решение известной изопериметрической задачи: среди всех замкнутых кривых данного периметра фигуру наибольшей площади ограничивает окружность.

Важное значение в теории машин и механизмов (см., например, [1]) имеют кривые равной ширины и Δ-кривые. Исследованию свойств таких кривых издавна уделялось много внимания. Остановимся на этом вопросе подробнее.

Для кривой Γ каждый вектор $\bar{l}$ определяет прямоугольник со сторонами, параллельными и перпендикулярными $\bar{l}$, описанный вокруг Γ. Периметр этого прямоугольника обозначим через $P(\Gamma, \bar{l})$. Если для любого направления $\bar{l}$ величина $P(\Gamma, \bar{l})$ является постоянной и равной P, то такую кривую будем называть P-кривой.

P-кривая, у которой описанный прямоугольник является квадратом, называют кривой равной ширины d (при этом $d = P/4$).

Будем говорить, что выпуклая кривая Γ есть Δ-кривая, если при любом повороте она вписана в фиксированный правильный треугольник со стороной a (т. е. будет иметь три точки касания при любом повороте).

В дальнейшем будем считать, что функция $\theta(\varphi)$ такова, что $\theta(\varphi) + \theta''(\varphi)$ не изменяет знак на периоде.

Теорема 6. *Любая* P*-кривая* $\Gamma(\varphi)$ *представима в виде* (4), *где функция* $\theta(\varphi)$ *имеет вид*

$$\theta(\varphi) = \frac{P}{4} + \sum_{\substack{k \neq 4n \\ n \in \mathbb{N}}} \rho_k \cos(k\varphi + \varphi_k). \tag{13}$$

Любая кривая $\Gamma(\varphi)$ *равной ширины* d *представима в виде* (4), *где функция* $\theta(\varphi)$ *имеет вид*

$$\theta(\varphi) = \frac{d}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho_{2k-1}\cos((2k-1)\varphi + \varphi_{2k-1}). \tag{14}$$

Любая Δ*-кривая* $\Gamma(\varphi)$ *представима в виде* (4), *где функция* $\theta(\varphi)$ *имеет вид*

$$\theta(\varphi) = \frac{a\sqrt{3}}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho_{3k\pm1} \cos((3k\pm1)\varphi + \varphi_{3k\pm1}). \tag{15}$$

Доказательство. Поскольку кривая $\Gamma(t)$ выпуклая, то, как следует из теоремы 2, ее можно представить в виде (4). Для любого φ касательная в точке φ параллельна касательной в точке $\varphi+\pi$. Расстояние между ними представляется в виде

$$\frac{\left|x'(\varphi)(y(\varphi+\pi) - y(\varphi)) - y'(\varphi)(x(\varphi+\pi) - x(\varphi))\right|}{\sqrt{(x'(\varphi))^2 + (y'(\varphi))^2}} = \theta(\varphi) + \theta(\varphi+\pi). \tag{16}$$

Кроме того, касательная в точке $\varphi + \pi/2$ параллельна касательной в точке $\varphi - \pi/2$ и перпендикулярна касательной в точке φ.

Отсюда следует, что для того чтобы кривая Γ была P-кривой, необходимо и достаточно выполнения условия

$$\theta(\varphi) + \theta(\varphi+\pi) + \theta\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) + \theta\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{P}{2} \tag{17}$$

для всех $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Замечая, что для соответствующего ряда Фурье будут выполняться равенства

$$\theta(\varphi) + \theta(\varphi + \pi) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \cos\left(k\varphi + \varphi_k + \frac{k\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) \tag{18}$$

и

$$\theta\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) + \theta\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \cos(k\varphi + \varphi_k)\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right),$$

отсюда получаем равенство

$$\theta(\varphi) + \theta(\varphi+\pi) + \theta\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) + \theta\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= 2a_0 + 4\sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \cos\left(k\varphi + \varphi_k + \frac{k\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{k\pi}{4}\right).$$

Следовательно, условие (17) эквивалентно тому, что все коэффициенты Фурье с номерами, кратными 4, функции $\theta(\varphi)$ равны нулю.

Справедливость соотношения (14) сразу следует из (16) и (18).

Докажем справедливость соотношения (17). Как следует из (11), точка пересечения касательной с углом наклона $\psi + \alpha$ к положительному направлению оси OX и касательной с углом наклона $\psi + \beta$ определяется координатами

$$x_{\alpha,\beta} = \frac{\theta(\psi+\beta)\cos\alpha - \theta(\psi+\alpha)\cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)};$$

$$y_{\alpha,\beta} = -\frac{\theta(\psi+\alpha)\sin\beta - \theta(\psi+\beta)\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

Расстояние от точки $(x_{\alpha,\beta}, y_{\alpha,\beta})$ до касательной

$$x\sin\gamma - y\cos\gamma + \theta(\psi+\gamma) = 0$$

равно

$$d = \frac{1}{\sin(\alpha-\beta)}(\theta(\psi+\beta)\sin(\gamma-\alpha) + $$
$$+ \theta(\psi+\alpha)\sin(\beta-\gamma) + \theta(\psi+\gamma)\sin(\alpha-\beta)).$$

Легко проверить, что для треугольника с углами A, B, C, описанного вокруг кривой Γ, высота из вершины A вычисляется согласно формуле

$$h_A(\psi) = \frac{\theta(\psi)\sin A + \theta(\psi+\pi-C)\sin B + \theta(\psi+\pi+B)\sin C}{\sin A}. \qquad (19)$$

В частности, если треугольник правильный, то

$$h(\psi) = \theta\left(\psi + \frac{2\pi}{3}\right) + \theta\left(\psi - \frac{2\pi}{3}\right) + \theta(\psi).$$

Отсюда получаем, что для выполнения условия $h \equiv \frac{a\sqrt{3}}{2}$ необходимо и достаточно, чтобы функция $\theta(\varphi)$ имела отличные от нуля лишь коэффициенты Фурье с номерами $n = 3k \pm 1$, $k \in \mathbb{N}$.

Естественным обобщением Δ-кривых являются выпуклые кривые, которые являются вписанными при вращении в произвольном треугольнике. Решение этой задачи довольно громоздкое. Приведем решение для равнобедренных треугольников.

Будем говорить, что выпуклая кривая Γ есть Δ_α-кривая, если при любом повороте она вписана в фиксированный равнобедренный треугольник периметра P с углом α при вершине.

***Следствие* 6.** *Если для равнобедренного треугольника угол α при вершине не выражается рационально через π, то для такого треугольника Δ_α-кривая не существует, а если у равнобедренного треугольника периметра P угол при вершине $\alpha = \pi p/q$, где $p/q, p, q \in \mathbb{N}$, — несократимая дробь, то чтобы кривая $\Gamma(\varphi)$ была Δ_α-кривой, необходимо и достаточно, чтобы она была представима в виде* (4), *где функция $\theta(\varphi)$ имеет вид*

$$\theta(\varphi) = \frac{P\sin\alpha}{4\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2} + \sum_{k\in\mathcal{N}(p,q)} \rho_k \cos(k\varphi + \varphi_k),$$

где $\mathcal{N}(p,q)$ — множество всех чисел вида

$$\frac{2q(2N+1) \pm (q-p)}{q+p} \in \mathbb{N}, \quad N \in \mathbb{Z}.$$

Приведем несколько частных случаев.

Для правильного треугольника $\alpha = \pi/3$ множество $\mathcal{N}(1,3)$ будет иметь вид $3N \pm 1$, $N = 0, 1, \ldots$. Для прямоугольного равнобедренного треугольника $\alpha = \pi/2$ множество $\mathcal{N}(1,2)$ будет состоять из чисел вида $8N+1$, $N = 0, 1, \ldots$. Для равнобедренного треугольника с углом $\alpha = 2\pi/3$ имеем множество $\mathcal{N}(2,3)$ из чисел вида $12N+1$, $N = 0, 1, \ldots$.

Из теоремы 6 можно получить ряд интересных следствий. Приведем два таких следствия.

***Следствие* 7.** *Среди всех 2π-периодических функций $\theta(\varphi)$ таких, что*

$$\theta(\varphi) + \theta(\pi+\varphi) = d \qquad (20)$$

и функция $\theta(\varphi) + \theta''(\varphi)$ *не изменяет знак на периоде, наименьшее значение величины*

$$\mathcal{S}(\theta) = \int_0^{2\pi} (\theta^2(\varphi) - (\theta'(\varphi))^2)\, d\varphi \tag{21}$$

достигается на $(2\pi/3)$*-периодической функции*

$$\theta^*(\varphi) = \begin{cases} \dfrac{d}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3} + \sin\left(\varphi - \dfrac{\pi}{3}\right)\right), & -\dfrac{\pi}{3} \le \varphi \le 0, \\ \dfrac{d}{\sqrt{3}} \sin\left(\dfrac{\pi}{3} + \varphi\right), & 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{3}, \end{cases}$$

или, что то же,

$$\theta^*(\varphi) = d\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 3k\varphi}{k(9k^2-1)}\right)$$

и экстремальное значение $\mathcal{S}$ *равно*

$$\mathcal{S}_{\min} = \mathcal{S}(\theta^*) = \frac{d^2(2\pi - \sqrt{3})}{2}.$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что, как следует из теоремы 6, для того, чтобы кривая вида (4) была кривой равной ширины, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (20) и функция $\theta(\varphi) + \theta''(\varphi)$ не изменяла знак на периоде.

С другой стороны, хорошо известно [6], что среди всех кривых равной ширины d фигуру наименьшей площади ограничивает треугольник Рело. Отсюда и из того факта, что треугольник Рело — кривая $\Gamma(\theta^*)$, следует требуемое утверждение.

Аналогично доказывается следующее утверждение.

***Следствие* 8.** *Среди всех* 2π*-периодических функций* $\theta(\varphi)$ *таких, что*

$$\theta(\varphi) + \theta\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right) + \theta\left(\varphi - \frac{2\pi}{3}\right) = d$$

и функция $\theta(\varphi) + \theta''(\varphi)$ *не изменяет знак на периоде, наименьшее значение величины* (21) *достигается на* π*-периодической функции*

$$\theta^*(\varphi) = \begin{cases} \dfrac{d}{2} \sin\left(\varphi + \dfrac{\pi}{6}\right), & 0 \le \varphi \le \dfrac{2\pi}{3}, \\ \dfrac{d}{2}\left(2 + \sqrt{3}\cos\left(\varphi + \dfrac{\pi}{6}\right)\right), & \dfrac{2\pi}{3} \le \varphi \le \pi, \end{cases}$$

и экстремальное значение $\mathcal{S}$ *определятеся равенством*

$$\mathcal{S}_{\min} = \mathcal{S}(\theta^*) = \frac{d^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{3}.$$

В завершение работы приведем еще одно свойство выпуклых кривых.

Рассмотрим сетку (i, j), где $i, j \in \mathbb{Z}$. Ясно, что если $\Gamma_{i,j}$ — набор кругов радиуса $1/2$ с центрами в узлах решетки, то при любом повороте на угол φ всех кругов каждый из них будет касаться четырех соседних. Найдутся ли выпуклые фигуры, отличные от кругов и имеющие эти свойства?

Будем говорить, что выпуклая кривая Γ с диаметром не больше единицы, имеет R-свойство, если для каждого узла решетки найдется такое расположение кривой $\Gamma_{i,j}$ (с точностью до поворота и сдвига), при котором узел решетки будет лежать в области, ограниченной этой кривой, и при любом повороте всех кривых на один и тот же угол φ (вокруг соответствующего узла решетки) каждая из них будет касаться четырех соседних.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 7. *Если угол* $\alpha = \dfrac{2p+1}{2q}\pi$, $p, q \in \mathbb{N}$, *и функция*

$$\theta(\varphi) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho_{2q(2k-1)} \cos\left(2q(2k-1)\varphi + \varphi_k\right)$$

такова, что $\theta(\varphi) + \theta''(\varphi) \geq 0$ *при всех* $\varphi \in [0, 2\pi]$, *то кривая* Γ *вида*

$$\Gamma_{i,j}(\theta, \varphi) =$$

$$= \begin{cases} i - \theta(\varphi)\sin\left(\varphi + \dfrac{1-(-1)^{i+j}}{2}\alpha\right) - \theta'(\varphi)\cos\left(\varphi + \dfrac{1-(-1)^{i+j}}{2}\alpha\right), \\ j + \theta(\varphi)\cos\left(\varphi + \dfrac{1-(-1)^{i+j}}{2}\alpha\right) - \theta'(\varphi)\sin\left(\varphi + \dfrac{1-(-1)^{i+j}}{2}\alpha\right), \end{cases}$$

имеет R*-свойство.*

1. *Артоболевский И. И.* Теория механизмов и машин. – М.: Наука, 1988. – 640 с.
2. *Лейхтвейс К.* Выпуклые множества. – М.: Наука, 1985. – 335 с.
3. *Kubota T.* Uber die Schwerpunkte der konvexen geschlossenen Kurven und Flächen // Tôhoku Math. J. – 1918. – **14**. – S. 20–27.
4. *Korneichuk N. P., Ligun A. A., Babenko V. F.* Extremal properties of polynomials and splines. – New York: Nova Sci. Publ., 1996. – 433 p.
5. *Лигун А. А., Шумейко А. А.* Асимптотические методы восстановления кривых. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1997. – 358 с.
6. *Яглом И. М., Болтянский В. Г.* Выпуклые фигуры. – М.: Гостехиздат, 1951. – 250 с.

Получено 28.07.98