УДК 519.41/47

Н. С. Черников (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ ЛОКАЛЬНО РАЗРЕШИМЫХ ГРУППАХ, РАЗЛОЖИМЫХ В ПРОИЗВЕДЕНИЕ ДВУХ ЛОКАЛЬНО НИЛЬПОТЕНТНЫХ ПОДГРУПП *

We establish a number of new results concerning various properties of a periodic locally solvable group $G = AB$ with locally nilpotent subgroups A and B one of which is hyper-Abelian.

Встановлено ряд нових результатів щодо різних властивостей періодичної локально розв'язної групи $G = AB$ із локально нільпотентними підгрупами A і B, одна з яких є гіперабелевою.

В настоящей работе автор продолжает исследования [1, 2]. Основными ее результатами являются теоремы 1–6 и предложения 1–4.

Пусть G — группа. Ниже для произвольных простого p и множества π простых чисел G_p и G_π — силовские соответственно p- и π-подгруппы группы G. $F(G)$ — локально нильпотентный радикал группы G, $F_0(G) = 1$ и для порядкового $\alpha > 0$ $F_\alpha(G)$ определяется индуктивно: если α непредельное, то $F_\alpha(G)/F_{\alpha-1}(G) = F(G/F_{\alpha-1}(G))$; если α предельное, то $F_\alpha(G) = \bigcup_{\beta<\alpha} F_\beta(G)$. Если G радикальна (в смысле Б. И. Плоткина), то ряд $1 = F_0(G) \subset \ldots \subset F_\alpha(G) \subset \ldots \subset F_\gamma(G) = G$ называют рядом Гирша–Плоткина. Длину γ последнего обозначаем через $l_{\mathfrak{N}}(G)$ (как в [2]). Под фактором группы понимаем фактор-группу, определяемую двумя ее инвариантными подгруппами. Ниже S_4 — симметрическая группа 4-й степени.

Теорема 1. *Пусть $G = AB$ — периодическая локально разрешимая группа, A и B — ее локально нильпотентные подгруппы, хотя бы одна из которых гиперабелева; φ — произвольный гомоморфизм группы G такой, что при $\sigma = \pi(A) \cap \pi(B)$ $F(G)_\sigma \subseteq \operatorname{Ker}\varphi$ (в частности, φ может быть гомоморфизмом группы G на одну из следующих фактор-групп: $G/F(G)_\sigma$, $G/F(G)$). Далее, пусть для подгруппы $N \trianglelefteq A$ N^φ имеет возрастающий инвариантный ряд длины $\alpha + n$ с абелевыми факторами и нормальными в A^φ членами, где α — предельное и n — натуральное или $n = 0$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. $N^\varphi \subseteq F_{\alpha+6n}(G^\varphi)$.

2. $N^\varphi \subseteq F_{\alpha+4n}(G^\varphi)$ *в каждом из случаев*: а) $2 \notin \pi(N^\varphi)$; б) $3 \notin \pi(B^\varphi)$; в) G^φ *не имеет секции, изоморфной* S_4.

3. $N^\varphi \subseteq F_{\alpha+2n}(G^\varphi)$ *в каждом из случаев*: а) N^φ *является холловой подгруппой группы* A^φ (*в частности, может быть* $N^\varphi = A^\varphi$); б) N^φ *принадлежит к* $(\alpha+n)$-*му гиперцентру группы* A^φ; в) $2, 3 \notin \pi(N^\varphi)$; г) $2 \notin \pi(N^\varphi)$ *и при этом или* $\pi(N^\varphi)$ *не содержит чисел Ферма* (*т. е. простых чисел вида* $2^{2^k}+1$), *или подгруппа* B_2^φ *абелева.*

* Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00462).

4. *Если* $\operatorname{Ker}\varphi \subseteq F(G)$, *то в утверждениях* 1–3 *соответственно*

$$N \subseteq F_{1+\alpha+6n}(G), \quad N \subseteq F_{1+\alpha+4n}(G) \quad и \quad N \subseteq F_{1+\alpha+2n}(G).$$

5. *Если* $N^{\varphi} = A^{\varphi}$, *то* $l_{\mathfrak{N}}(G^{\varphi}) \leq \alpha + 2n + 1$, *и в случае, когда* $\operatorname{Ker}\varphi \subseteq F(G)$; $l_{\mathfrak{N}}(G) \leq 1 + \alpha + 2n + 1$.

***Следствие* 1.** *Пусть при условии теоремы* 1 *подгруппы* A^{φ}, B^{φ} *гиперабелевы и минимумы длин их возрастающих инвариантных рядов с абелевыми факторами совпадают и равны* $\gamma + m$, *где* γ — *предельное число и* m — *натуральное или* $m = 0$. *Тогда* $l_{\mathfrak{N}}(G^{\varphi}) \leq \gamma + 2m$, *и в случае, когда* $\operatorname{Ker}\varphi \subseteq F(G)$, $l_{\mathfrak{N}}(G) \leq 1 + \gamma + 2m$.

Теорема 2. *Пусть при условии теоремы* 1 *подгруппа* A^{φ} *имеет конечную экспоненту и для каждого* p p^{e_p} — *ее* p*-экспонента. Пусть в случае, когда* p — *число Ферма и* B_2^{φ} *неабелева,* $t_p = 2e_p$, *а в противном случае* $t_p = e_p$; t — *наибольшее из чисел* t_p. *Тогда:* $l_{\mathfrak{N}}(G^{\varphi}) \leq 2t + 1$ *и если* $\operatorname{Ker}\varphi \subseteq F(G)$, *то* $l_{\mathfrak{N}}(G) \leq 2t + 2$, $l_{\mathfrak{N}}(G^{\varphi}) \leq 2t$ *в случае, когда подгруппа* B^{φ} *имеет конечную экспоненту и число* t^*, *определяемое для нее так же, как* t *для* A^{φ}, *совпадает с* t. *В последнем случае* $l_{\mathfrak{N}}(G) \leq 2t + 1$, *если* $\operatorname{Ker}\varphi \subseteq F(G)$.

Теорема 3 [3, 4]. *Пусть* $G = AB$ — *периодическая локально разрешимая группа,* A *и* B — *ее локально нильпотентные подгруппы и* A — *гиперабелева (или, что то же, является* RI^**-группой);* $\sigma = \pi(A) \cap \pi(B)$ *и* H — *силовская* σ*-подгруппа локально нильпотентного радикала группы* G *(или, что то же, радикала Гирша–Плоткина группы* G *). Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *Если подгруппа* B *гиперабелева, то фактор-группа* G/H *является* RN^**-группой, причем любой ее локально нильпотентный фактор гиперабелев.*

2. *Если для некоторого множества* π *простых чисел силовские* π*-подгруппы групп* A *и* B *принадлежат к некоторому классу* $\mathfrak{X}$ *групп, замкнутому относительно взятия нормальных делителей, гомоморфных образов и прямого произведения двух групп, то любой локально нильпотентный* π*-фактор группы* G/H *принадлежит к* $\mathfrak{X}$.

***Замечания.* 1.** В утверждении 2 теоремы 3 возможен, конечно, случай, когда $\pi = \mathbb{P}$. В этом случае в его заключении любой локально нильпотентный фактор группы G/H принадлежит к $\mathfrak{X}$.

2. Утверждение 2 теоремы 3 остается в силе и в случае, когда принадлежность к $\mathfrak{X}$ требуется только от групп AH/H и BH/H (см. ниже доказательство утверждения 2).

3. Пусть в теореме 3 группа BH/H гиперабелева, γ и $\zeta \leq \gamma$ — наименьшие из длин возрастающих инвариантных рядов с абелевыми факторами групп AH/H и BH/H соответственно. Тогда с учетом замечания 2 ввиду утверждения 2 любой локально нильпотентный фактор группы G/H имеет возрастающий инвариантный ряд длины $\leq \gamma$ с абелевыми факторами. В силу этого такой ряд имеет произвольный фактор $F_{\alpha+1}(G)/F_{\alpha}(G)$.

Предложение 1. *Пусть при условии теоремы* 1 H — *произвольная холлова подгруппа группы* A (H *может совпадать с* A), N *и* L — *нормальные де-*

лители группы G *такие, что* $H \subseteq L$, $F(G)_\sigma \subseteq N \subseteq L$ *и фактор-группа* L/N *— локально нильпотентна. Тогда* $HN \trianglelefteq G$. *В частности, если* $H \not\subseteq F(G)$ *и* α *— непредельное, при котором* $H \subseteq F_\alpha(G)$, *то* $HF_{\alpha-1}(G) \trianglelefteq G$.

Предложение 2. *При условии теоремы* 1 *подгруппы* $A^\varphi \cap F(G^\varphi)$ *и* $B^\varphi \cap F(G^\varphi)$ *поэлементно перестановочны и*

$$F(G^\varphi) = (A^\varphi \cap F(G^\varphi))(B^\varphi \cap F(G^\varphi)). \tag{1}$$

Далее, в случае, когда φ *— гомоморфизм группы* G *на одну из указанных в формулировке теоремы* 1 *фактор-групп или при некотором* $\alpha > 0$ *на фактор-группу* $G/F_\alpha(G)$, *выполняется соотношение*

$$F(G^\varphi) = (A^\varphi \cap F(G^\varphi)) \times (B^\varphi \cap F(G^\varphi)). \tag{2}$$

Предложение 3. *При условии теоремы* 1 *справедливы следующие утверждения*:

1. *Если* N *—* p*-группа для некоторого* p, *то* $\langle N^G\rangle^\varphi = (\langle N^G\rangle^\varphi \cap A_p^\varphi)(\langle N^G\rangle^\varphi \cap B_{p'}^\varphi)$. *В частности, для любого* p

$$\langle A_p^G\rangle^\varphi = A_p^\varphi(\langle A_p^G\rangle^\varphi \cap B_{p'}^\varphi). \tag{3}$$

2. *При* $\tau = \pi(N)$ $\langle N^G\rangle^\varphi = (\langle N^G\rangle^\varphi \cap A_\tau^\varphi)(\langle N^G\rangle^\varphi \cap B^\varphi)$. *В частности, для произвольного множества* τ *простых чисел* $\langle A_\tau^G\rangle^\varphi = A_\tau^\varphi(\langle A_\tau^G\rangle^\varphi \cap B^\varphi)$.

***Доказательство теоремы* 1.** Утверждения $1-3$ в случае абелевой N^φ (т. е. в случае, когда $\alpha = 0$ и $n = 1$) справедливы ввиду теоремы 5 [2], а общий случай легко сводится к нему с помощью трансфинитной индукции. Утверждение 4 — следствие утверждений $1-3$.

Пусть $N^\varphi = A^\varphi$. Тогда вследствие утверждения 3 $G^\varphi = F_{\alpha+2n}(G^\varphi)B^\varphi$ и, значит, $C^\varphi/F_{\alpha+2n}(G^\varphi)$ — локально нильпотентна. Справедливость последнего заключения утверждения 5 непосредственно вытекает из его первого заключения.

***Доказательство следствия* 1.** В силу утверждения 3 теоремы 1 $A^\varphi, B^\varphi \subseteq F_{\gamma+2m}(G^\varphi)$, поэтому $F_{\gamma+2m}(G^\varphi) = G^\varphi$. Справедливость последнего заключения следствия непосредственно вытекает из его первого заключения.

Справедливость теоремы 2 вытекает из теоремы 5 [2].

***Доказательство предложения* 1.** Пусть φ — гомоморфизм G на $G/F(G)_\sigma$ и $T = N^\varphi$. Тогда $H^\varphi T \trianglelefteq G^\varphi$ — см. доказательство предложения 4 [2]. Поэтому $HN \trianglelefteq G$.

***Доказательство предложения* 2.** Действительно, ввиду утверждений 2 и 3 теоремы 2 [1] выполняется (1) и в выделенном случае $A \cap B \subseteq \operatorname{Ker}\varphi = (\operatorname{Ker}\varphi \cap A)(\operatorname{Ker}\varphi \cap B)$. Учитывая последние соотношения, нетрудно убедиться в том, что в выделенном случае $(F(G^\varphi) \cap A^\varphi) \cap (F(G^\varphi) \cap B^\varphi) = 1$. Далее, в силу предложения 12 [1] при каждом p $[A_p^\varphi, B_p^\varphi] = 1$. Очевидно, $[F(G^\varphi) \cap A_p^\varphi, (F(G^\varphi) \cap B^\varphi)_{p'}] = 1$. Следовательно, $[F(G^\varphi) \cap A_p^\varphi, F(G^\varphi) \cap B^\varphi] = 1$. Поэтому ввиду произвольности p $[F(G^{\varphi})\bigcap A^{\varphi}, F(G^{\varphi})\bigcap B^{\varphi}] = 1$ и, значит, в выделенном случае выполняется (2).

***Доказательство предложения* 3.** Действительно, как установлено в доказательстве предложения 4 [2], выполняется соотношение (3). Учитывая это и рассуждая, как в доказательствах утверждений 1 и 2 предложения 2 из [2], убеждаемся в справедливости предложения 3.

***Доказательство теоремы* 3.** В силу утверждения 1 теоремы 3 [1] группа G радикальна и в силу предложения 2 в случае, когда A и B гиперабелевы, $F(G^{\varphi})$ и, в частности, при каждом $\alpha \neq 0$ $F_{\alpha+1}(G)/F_{\alpha}(G)$ гиперабелевы. Отсюда вытекает справедливость утверждения 1 настоящей теоремы.

Далее, пусть $(L/H)/(N/H)$ — локально нильпотентный π-фактор группы G/H. Тогда $L/N \subseteq F(G/N)$. Пусть S/N — силовская π-подгруппа группы $F(G/N)$. Тогда вследствие предложения 2 $S/N\bigcap A_{\pi}N/N$ и $S/N\bigcap B_{\pi}N/N$ поэлементно перестановочны. Используя это же предложение, нетрудно убедиться в том, что $S/N = (S/N\bigcap A_{\pi}N/N)(S/N\bigcap B_{\pi}N/N)$. Легко видеть, что $S/N\bigcap A_{\pi}N/N$ и $S/N\bigcap B_{\pi}N/N$ являются $\mathfrak{X}$-группами. Тогда, как нетрудно убедиться, S/N изоморфна фактор-группе прямого произведения групп $S/N\bigcap A_{\pi}N/N$ и $S/N\bigcap B_{\pi}N/N$ по некоторой его центральной подгруппе. Следовательно, ввиду замкнутости класса $\mathfrak{X}$ относительно взятия прямого произведения двух групп и взятия фактор-групп, $S/N \in \mathfrak{X}$. В таком случае, поскольку $\mathfrak{X}$ замкнут относительно взятия инвариантных подгрупп и $L/N \trianglelefteq S/N$, то $L/N \in \mathfrak{X}$. Теорема доказана.

Приведем еще одно предложение, доказательство которого аналогично доказательству предложения 3 и основано на предложении 12 [1], утверждении 1 предложения 13 [1] и леммах 2, 3 [2].

Предложение 4. *Пусть π_i, $i \in I$, — множества простых чисел такие, что $\pi_i \bigcap \pi_j = \varnothing$, если $j \neq i$; $G = AB$ — периодическая локально разрешимая группа $A = \times_{i\in I} A_{\pi_i}$, $B = \times_{i\in I} B_{\pi_i}$, и хотя бы одна из подгрупп A, B гиперабелева; φ — произвольный гомоморфизм группы G такой, что $\operatorname{Ker}\varphi$ содержит все подгруппы $O_{\pi_i}(G)$ по всем i, при которых $A_{\pi_i} \neq 1$ и $B_{\pi_i} \neq 1$. Тогда для произвольной нормальной подгруппы N группы A справедливы следующие утверждения:*

1. *Если N — π_k-группа для некоторого $k \in I$, то*

$$\langle N^G\rangle^{\varphi} = (\langle N^G\rangle^{\varphi}\bigcap A^{\varphi}_{\pi_k})(\langle N^G\rangle^{\varphi}\bigcap B^{\varphi}_{\pi'_k}).$$

В частности, $\langle A^G_{\pi_k}\rangle = A^{\varphi}_{\pi_k}(\langle A^G_{\pi_k}\rangle^{\varphi}\bigcap B^{\varphi}_{\pi'_k})$, $k \in I$.

2. *Если σ — объединение некоторых π_i такое, что $\pi(N) \subseteq \sigma$, то*

$$\langle N^G\rangle^{\varphi} = (\langle N^G\rangle^{\varphi}\bigcap A^{\varphi}_{\sigma})(\langle N^G\rangle^{\varphi}\bigcap B^{\varphi}).$$

В частности, для произвольного объединения σ-множеств π_i $\langle A^G_{\sigma}\rangle^{\varphi} = A^{\varphi}_{\sigma}(\langle A^G_{\sigma}\rangle^{\varphi}\bigcap B^{\varphi})$.

***Замечание* 4.** Используя предложение 12 [1], легко убедиться в том, что в случае, когда $A^{\varphi}\bigcap B^{\varphi} = 1$ (в частности, в случае, когда $\operatorname{Ker}\varphi = (\operatorname{Ker}\varphi \bigcap$

$\bigcap A)(\operatorname{Ker}\varphi \bigcap B)$ в утверждении 1 предложения 4 $\langle N^G\rangle^{\varphi} \bigcap \langle B^G_{\pi_k}\rangle^{\varphi} = 1$, и в утверждении 1 предложения 3 $\langle N^G\rangle^{\varphi} \bigcap \langle B^G_{p}\rangle^{\varphi} = 1$.

Ниже для произвольной разрешимой группы G через $d(G)$ обозначается ее ступень разрешимости.

Теорема 4. *Пусть π и σ — непересекающиеся множества простых чисел, $\mathfrak{X}$ — любой класс групп, у которых каждый π-элемент перестановочен с каждым σ-элементом, и $\mathfrak{Z}$ — класс всех групп, имеющих нормальную систему с $\mathfrak{X}$-факторами; $G = AB$ — $\mathfrak{Z}$-группа (в частности, G — RN-группа, локально разрешимая группа), A и B — ее разрешимые локально нильпотентные соответственно π- и σ-подгруппы, m и n — соответственно наибольшее и наименьшее из чисел $d(A)$, $d(B)$. Тогда G — разрешимая локально конечная $\pi \bigcup \sigma$-группа, $d(G) \le (m+n)n + m$ и в случае, когда 2-подгруппы групп A и B — абелевы, $d(G) \le mn + m$.*

Доказательство. Настоящая теорема без своего последнего утверждения совпадает с предложением 4 [1]. Поскольку G — периодическая разрешимая группа и $\pi \bigcap \sigma = \varnothing$, то ввиду теоремы 4 [5] или предложения 2 [6] произвольное конечное множество X ее элементов содержится в некоторой ее конечной подгруппе $K = K(X) = (K \bigcap A)(K \bigcap B)$. Поэтому доказательство справедливости последнего заключения настоящей теоремы, очевидно, сводится к случаю, когда G конечна. Остается повторить доказательство второго утверждения теоремы 3 [7] с заменой в нем ссылки на лемму 9 [7] ссылкой на следствие 1 [8].

Теорема 5. *Пусть $G = AB$ — периодическая локально разрешимая группа, A и B — ее локально нильпотентные подгруппы, хотя бы одна из которых гиперабелева, H — произвольная холлова подгруппа радикала $F(G)$, содержащая при $\pi = \pi(A) \bigcap \pi(B)$ его холлову π-подгруппу $F(G)_\pi$ (в частности, может быть $H = F(G)$ или $H = F(G)_\pi$). Пусть группы AH/H и BH/H — разрешимы, m и n — соответственно наибольшее и наименьшее из чисел $d(AH/H)$, $d(BH/H)$. Тогда фактор-группа G/H разрешима, $d(G/H) \le$ $\le (m+n)n + m$, и в случае, когда 2-подгруппы групп AH/H и BH/H абелевы, $d(G/H) \le mn + m$.*

Доказательство. Ввиду утверждения 2 теоремы 2 [1] произвольное конечное множество X элементов группы G/H содержится в некоторой ее конечной подгруппе $K = K(X) = (K \bigcap AH/H)(K \bigcap BH/H)$, и вследствие ее утверждения 1 пересечение всех $N \trianglelefteq K$, для которых $\pi((K \bigcap AH/H)N/N) \bigcap$ $\bigcap \pi((K \bigcap BH/H)N/N) = \varnothing$, равно единице. В силу предложения 4 [1] $d(K/N) \le (m+n)n + m$, и в силу теоремы 4 в отмеченном случае $d(K/N) \le$ $\le mn + m$. Следовательно, $d(\langle X\rangle) \le d(K) \le (m+n)n + m$, и в отмеченном случае $d(\langle X\rangle) \le d(K) \le mn + m$. Теорема доказана.

Ниже $\Phi(G)$ — подгруппа Фраттини группы G.

Теорема 6. *Пусть $G = AB$ — конечная разрешимая группа, A и B — ее нильпотентные подгруппы, H — произвольная холлова подгруппа $\Phi(G)$, содержащая при $\pi = \pi(A) \bigcap \pi(B)$ холлову π-подгруппу $\Phi(G)_\pi$ последней (в частности, может быть $H = \Phi(G)$ или $H = \Phi(G)_\pi$), m и n — соответственно наибольшее и наименьшее из чисел $d(AH/H)$, $d(BH/H)$. Тогда $d(G/H) \le (m+n)n + m$ и в случае, когда 2-подгруппы групп AH/H и BH/H абелевы, $d(G/H) \le mn + m$.*

Доказательство. Действительно, вследствие утверждений 1 и 2 предложения 1 [2] и следствия 1 [1] H совпадает с пересечением некоторых $N \trianglelefteq G$, для каждого из которых или $\pi(AN/N) \bigcap \pi(BN/N) = \varnothing$, или $|G/N|$ — простое число. В силу же предложения 4 [1] и теоремы 4 $d(G/N) \le (m+n)n + m$ и в отмеченном случае $d(G/N) \le mn + m$. Теорема доказана.

Следующее предложение вытекает из теоремы 6 и теоремы Гашюца, в силу которой для конечной группы G $F(G/\Phi(G)) = F(G)/\Phi(G)$.

Следствие 2. *Пусть* $G = AB$ *— конечная разрешимая группа,* A *и* B *— ее нильпотентные подгруппы,* m *и* n *— соответственно наибольшее и наименьшее из чисел* $d(A\Phi(G)/\Phi(G))$, $d(B\Phi(G)/\Phi(G))$. *Тогда* $d(G/F(G)) \le$ $\le (m+n)n + m - 1$, *и в случае, когда* 2*-подгруппы групп* $A\Phi(G)/\Phi(G)$ *и* $B\Phi(G)/\Phi(G))$ *абелевы,* $d(G/F(G)) \le mn + m - 1$.

1. *Черников Н. С.* Периодические локально разрешимые группы, факторизуемые двумя локально нильпотентными подгруппами // Вопросы алгебры (Гомель). – 1997. – **11**. – С. 90–115.
2. *Черников Н. С.* О конечных разрешимых группах, разложимых в произведение двух нильпотентных подгрупп // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 6. – С. 809–819.
3. *Черников Н. С.* О периодических локально разрешимых группах, факторизуемых двумя локально нильпотентными подгруппами // Междунар. конф. „Симметрия в естествознании": Тез. докл. (Красноярск, 23–29 авг. 1998 г.). – Красноярск: Ин-т выч. моделирования СО РАН, 1998. – С. 142.
4. *Chernikov N. S.* On groups factorized by two locally nilpotent subgroups // The Seventh Intern. Conf. "Groups & groups rings": Thes. of talks (Supraśl, Poland, June 15–19, 1999). – Warsaw: Inst. Math., Warsaw Univ., 1999. – P. 7–8.
5. *Черников Н. С.* Обобщенно разрешимые и обобщенно π-разрешимые факторизуемые группы // Вопросы алгебры (Гомель). – 1996. – **10**. – С. 91–122.
6. *Черников Н. С.* Группы, факторизуемые перестановочными периодическими подгруппами без элементов одинаковых простых порядков // Исследования групп с ограничениями для подгрупп. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1988. – С. 98–117.
7. *Kazarin L. S.* Soluble products of groups // Infinite groups. 94. – Berlin etc.: Walter de Gruyter & Co, 1995. – P. 111–123.
8. *Черников Н. С., Петравчук А. П.* О π-длине конечных π-разрешимых групп // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1993. – С. 393–404.

Получено 06.09.99