УДК 517.5

К. М. Жигалло, Ю. І. Харкевич (Волин. ун-т, Луцьк)

ПРО НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ КЛАСУ ГЕЛЬДЕРА БІГАРМОНІЙНИМИ ІНТЕГРАЛАМИ ПУАССОНА

We obtain the exact value of the upper bound of deviation of the Poisson biharmonic integral from functions belonging to the Hölder class.

Отримано точне значення верхньої межі відхилення бігармонійного інтеграла Пуассона від функцій класу Гельдера.

Через $L^1_{2\pi}$ і $C_{2\pi} = L^\infty_{2\pi}$ будемо позначати класи 2π -періодичних відповідно інтегровних і неперервних функцій з нормами

$$\|f\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|dx, \quad \|f\|_\infty = \max_x |f(x)|.$$

Множину функцій $f \in L^p_{2\pi}$, $p = 1, \infty$, які задовольняють нерівність

$$\|f(x+h) - f(x)\|_p \leq |h|, \tag{1}$$

будемо позначати, як прийнято, через H^1_p і називати класом Гельдера.

Якщо ж $f \in L^p_{2\pi}$, $p = 1, \infty$, і виконується нерівність

$$\|f(t+h) - 2f(t) + f(t-h)\|_p \leq 2|h|,$$

то множину таких функцій позначають H^2_p і називають класом квазігладких функцій [1].

Нехай $A_2(r, \theta) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t+\theta) P_2(r, t)dt$ — бігармонійний інтеграл Пуассона, де

$$P_2(r, t) = \frac{\left(1 - r^2\right)^2 (1 - r\cos t)}{2\pi\left(1 - 2r\cos t + r^2\right)^2}, \quad 0 \leq r < 1,$$

— бігармонійне ядро Пуассона [2, 3].

Позначимо через

$$\mathscr{E}\left(H^\nu_p, r\right)_p = \sup_{f \in H^\nu_p} \|A_2(r, \theta) - f(\theta)\|_p, \quad p = 1, \infty, \quad \nu = 1, 2, \tag{2}$$

верхню межу відхилень функцій класу H^ν_p від їх бігармонійного інтеграла Пуассона.

Якщо в явному вигляді знайдена функція $\varphi(1-r) = \varphi\left(H^\nu_p; A_2(r, \theta); (1-r)\right)$ така, що при $r \to (1-0)$

$$\mathscr{E}\left(H^\nu_p, r\right)_p = \varphi(1-r) + o(\varphi(1-r)),$$

то говорять [4], що розв'язана задача Колмогорова–Нікольського (далі задача К.–Н.) для даного оператора $A_2(r, \theta)$ і класу H^ν_p, $p = 1, \infty$, $\nu = 1, 2$.

У 1963 р. С. Каніев [5] для величини $\mathscr{E}\left(H^2_\infty, r\right)_\infty$ встановив асимптотичну рівність при $r \to (1-0)$:

$$\mathscr{E}\left(H^2_\infty, r\right)_\infty = \frac{2}{\pi}(1-r) + \frac{\varepsilon_r}{\pi}, \quad \varepsilon_r = o(1-r). \tag{3}$$

У 1968 р. Р. Pych [6] було встановлено таку асимптотичну рівність:

$$\mathscr{E}\left(H^2_\infty, r\right)_\infty = \frac{2}{\pi}(1-r) + O\left((1-r)^2 \ln\frac{1}{1-r}\right), \quad r \to 1-0. \tag{4}$$

Оцінки (3) і (4) дають можливість встановити першу асимптотичну константу (константу К. – Н.) [7] при наближенні функцій класу H^2_∞ їх бігармонійними інтегралами Пуассона.

У даній роботі знайдено точне значення верхньої межі відхилень бігармонійного інтеграла Пуассона від функцій класу Гельдера H^1_p, $p = 1, \infty$.

Справедливе наступне твердження.

Теорема. *Величину* $\mathscr{E}\left(H^1_p, r\right)_p$, *що визначається рівністю* (2), *при* $r \to$ $\to 1-0$ *можна подати у вигляді такого асимптотичного ряду*:

$$\mathscr{E}\left(H^1_p, r\right)_p = \frac{2}{\pi}(1-r) + \frac{2}{\pi}(1-r)^2 \ln\frac{1}{1-r} + \frac{2\ln 2+1}{\pi}(1-r)^2 + $$
$$+ \frac{2}{\pi}\sum_{k=3}^{\infty}\left\{\frac{1}{k}(1-r)^k \ln\frac{1}{1-r} + \gamma_k(1-r)^k\right\}, \tag{5}$$

де $p = 1, \infty$,

$$\gamma_k = \frac{1}{k}\left(\ln 2 + \frac{1}{k} - \sum_{j=1}^{k-1}\frac{2^{-j}}{j}\right) - \frac{1}{(k-2)(k-1)2^{k-1}}.$$

Доведення. Доведемо спочатку рівність (5) для випадку $p = \infty$.

Оскільки $\int_{-\pi}^{\pi} P_2(r,t)\,dt = 1$, то

$$A_2(r,\theta) - f(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi}\{f(t+\theta) - f(\theta)\}P_2(r,t)\,dt.$$

Звідси, використовуючи (1), отримуємо оцінку

$$|A_2(r,\theta) - f(\theta)| \le \int_{-\pi}^{\pi}|t|P_2(r,t)\,dt.$$

Оскільки у класі H^1_∞ існує функція, рівна $|t|$ на проміжку $[-\pi, \pi]$, яка попередню нерівність перетворює в рівність, то згідно з (2) одержуємо

$$\mathscr{E}\left(H^1_\infty, r\right)_\infty = \int_{-\pi}^{\pi}|t|P_2(r,t)\,dt = 2\int_0^{\pi} tP_2(r,t)\,dt. \tag{6}$$

Легко бачити, що використавши формули 2.554(1) і 2.556 з [8], можна показати, що

$$\int \frac{1-r\cos t}{\left(1-2r\cos t+r^2\right)^2}dt = \frac{1}{\left(1-r^2\right)^2}\left[\frac{\left(r-r^3\right)\sin t}{1-2r\cos t+r^2} + \int\frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}dt\right] =$$
$$= \frac{1}{\left(1-r^2\right)^2}\left[\frac{\left(r-r^3\right)\sin t}{1-2r\cos t+r^2} + 2\operatorname{arctg}\left(\frac{1+r}{1-r}\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)\right].$$

Використовуючи це для інтеграла (6) після інтегрування за частинами, маємо

$$\mathscr{E}\left(H^1_\infty, r\right)_\infty = \pi - \frac{1-r^2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{r\sin t}{1-2r\cos t+r^2}dt - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{1+r}{1-r}\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)dt =$$
$$= -\frac{1-r^2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{r\sin t}{1-2r\cos t+r^2}dt + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}dt. \tag{7}$$

Застосовуючи тепер до (7) відомі при $0 \le r < 1$ тотожності

$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2} = 1+2\sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos kt, \qquad \frac{r\sin t}{1-2r\cos t+r^2} = \sum_{k=1}^{\infty} r^k \sin kt,$$

отримуємо

$$\mathscr{E}\left(H_{\infty}^{1}, r\right)_{\infty} = \frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} r^k \int_0^{\pi} t\cos kt\,dt - \frac{1-r^2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} r^k \int_0^{\pi} \sin kt\,dt =$$

$$= \frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r^{2k-1}}{(2k-1)^2}-\frac{2(1-r^2)}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r^{2k-1}}{2k-1} =$$

$$= \frac{4}{\pi}\left[\frac{\pi^2}{8}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^{2k+1}}{(2k+1)^2}\right]-\frac{2(1-r^2)}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r^{2k-1}}{2k-1}. \qquad (8)$$

Використаємо співвідношення

$$\ln\frac{1+r}{1-r} = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r^{2k-1}}{2k-1}, \qquad |r|<1,$$

і результати роботи [9], із яких випливає рівність

$$\frac{\pi^2}{8}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^{2k+1}}{(2k+1)^2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{k}(1-r)^k\ln\frac{1}{1-r}+\beta_k(1-r)^k\right\}, \qquad r\in(0,1),$$

де для натуральних k

$$\beta_k = \frac{1}{k}\left(\ln 2+\frac{1}{k}-\sum_{j=1}^{k-1}\frac{2^{-j}}{j}\right). \qquad (9)$$

При вказаних умовах на r співвідношення (8) перетворюється в асимптотичну рівність

$$\mathscr{E}\left(H_{\infty}^{1}, r\right)_{\infty} = \frac{2}{\pi}\left[(\ln 2+1)(1-r)+(1-r)\ln\frac{1}{1-r}+\right.$$

$$\left.+\frac{(1-r)^2}{2}\ln\frac{1}{1-r}+\frac{\ln 2}{2}(1-r)^2-\frac{1-r^2}{2}\ln\frac{1}{1-r}-\frac{1-r}{2}(1+r)\ln(1+r)\right]+$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{k=3}^{\infty}\left\{\frac{1}{k}(1-r)^k\ln\frac{1}{1-r}+\beta_k(1-r)^k\right\}. \qquad (10)$$

Для спрощення виразу, що стоїть в квадратних дужках рівності (10), розкладемо функцію $g(r)=(1+r)\ln(1+r)$ в ряд Тейлора за степенями $(r-1)$. При цьому отримаємо

$$\frac{2}{\pi}\left[(1-r)\ln 2-\frac{1-r^2}{2}\ln(1+r)\right] = \frac{1}{\pi}\left[(1-r)^2(1+\ln 2)-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(1-r)^{k+1}}{k(k-1)2^{k-1}}\right].$$

Тоді

$$\mathscr{E}\left(H_{\infty}^{1}, r\right)_{\infty} = \frac{2}{\pi}\left[(1-r)+(1-r)\ln\frac{1}{1-r}+\frac{(1-r)^2}{2}\ln\frac{1}{1-r}-\frac{1-r^2}{2}\ln\frac{1}{1-r}+\right.$$

$$\left.+\frac{1+2\ln 2}{2}(1-r)^2-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(1-r)^{k+1}}{k(k-1)2^{k-1}}\right]+\frac{2}{\pi}\sum_{k=3}^{\infty}\left\{\frac{1}{k}(1-r)^k\ln\frac{1}{1-r}+\beta_k(1-r)^k\right\}. \qquad (11)$$

Виконуючи тотожні перетворення, маємо

$$\frac{1-r^2}{2}\ln\frac{1}{1-r}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(1-r)^{k+1}}{k(k-1)2^{k-1}} = (1-r)\ln\frac{1}{1-r}-\frac{(1-r)^2}{2}\ln\frac{1}{1-r}+\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(1-r)^k}{(k-1)(k-2)2^{k-2}}.$$

Тоді, враховуючи співвідношення (9) для визначення коефіцієнтів β_k при $k\geq 3$, з (11) отримуємо рівність (5).

Доведення рівності (5) у випадку $p=1$ випливає із відомого результату В. П. Моторного [10], який встановлює точні асимптотичні рівності між верхніми межами відхилень функцій класу H_1^1 від їх бігармонійного інтеграла Пуассона в метриці $\|f\|_1$ і відповідними верхніми межами відхилень функцій класу H_∞^1 — в метриці $\|f\|_\infty$. Теорему доведено.

Наслідок 1. *Оскільки* $\mathscr{E}(\dot{H}_p^1, r)_p = \mathscr{E}(H_p^2, r)_p$, $p=1,\infty$ [11], *то величину* $\mathscr{E}(H_p^2, r)_p$ *можна подати у вигляді ряду, записаного в правій частині рівності* (5).

Наслідок 2. *Якщо виконані всі умови теореми, то при* $r\to 1-0$ *мають місце асимптотичні рівності*

$$\mathscr{E}(H_\infty^2, r)_\infty = \mathscr{E}(H_\infty^1, r)_\infty = \frac{2}{\pi}(1-r)+O\left((1-r)^2\ln\frac{1}{1-r}\right), \tag{12}$$

$$\mathscr{E}(H_\infty^2, r)_\infty = \mathscr{E}(H_\infty^1, r)_\infty = \frac{2}{\pi}(1-r)+\frac{2}{\pi}(1-r)^2\ln\frac{1}{1-r}+O\left((1-r)^2\right). \tag{13}$$

Асимптотичні рівності (5) дають можливість знаходити послідовно константи К. – Н. як завгодно високого порядку малості. Асимптотична рівність (12) є уточненням рівності (3), отриманої С. Канієвим, а асимптотична рівність (13) — уточненням рівності (4), отриманої P. Pych. Слід відмітити, що у випадку наближення функцій класу Гельдера H_p^1, $p=1,\infty$, сингулярними інтегралами Абеля – Пуассона аналогічну теорему, яка дає можливість знаходити константи К. – Н. довільно високого порядку малості, було доведено в роботі [9].

1. *Тиман А. Ф.* О квазигладких функциях // Изв. АН СССР. Математика. – 1951. – **15**, № 3. – С. 243–254.
2. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 735 с.
3. *Петров В. А.* Бигармонический интеграл Пуассона // Лит. мат. сб. – 1967. – **7**, № 1. – С. 137–142.
4. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
5. *Каниев С.* Об уклонении бигармонических в круге функций от их граничных значений // Докл. АН СССР. – 1963. – **153**, № 5. – С. 995–998.
6. *Pych P.* On a biharmonic function in unit disc // Ann. pol. math. – 1968. – **20**, № 3. – P. 203–213.
7. *Эрдейи А.* Асимптотические разложения. – М.: Физматгиз, 1962. – 127 с.
8. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Физматгиз, 1963. – 1100 с.
9. *Штарк Э. Л.* Полное асимптотическое разложение для верхней грани уклонения функций из Lip 1 от их сингулярного интеграла Абеля–Пуассона // Мат. заметки. – 1973. – **13**, № 1. – С. 21–28.
10. *Моторный В. П.* Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами в среднем // Там же. – 1974. – **16**, № 1. – С. 15–26.
11. *Butzer P. L., Nessel R. J.* Fourier analysis and approximation, 1. One-dimensional theory. – Basel; New York, 1971. – 553 p.

Одержано 10.03.98,
після доопрацювання — 25.02.2000