УДК 517.9

О. В. Капустян (Нац. ун-т ім. Т. Шевченка, Київ),
Х. Валеро (Ун-т Мурсії, Іспанія)

АТРАКТОРИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ВКЛЮЧЕНЬ ТА ЇХ АПРОКСИМАЦІЯ

We investigate properties of solutions of differential inclusions in the Banach space. We prove the theorem on the existence of global attractor of multivalued semidynamical system generated by these solutions and the theorem on approximation of an attractor in the Hausdorff metric.

Досліджуються властивості розв'язків диференціальних включень в банаховому просторі. Доведено теорему існування глобального атрактора багатозначної напівдинамічної системи, що породжується цими розв'язками, і теорему про апроксимацію атрактора в метриці Хаусдорфа.

1. Нехай H — сепарабельний гільбертів простір, $(\cdot,\cdot)$, $\|\cdot\|$ — скалярний добуток і норма в H, 2^H — сукупність всіх підмножин H, $\beta(H)$ — сукупність всіх непорожніх і обмежених підмножин H, $C_v(H)$ — сукупність всіх непорожніх, обмежених, замкнених, опуклих підмножин H, при $A \subset H$ будемо позначати через $B_\varepsilon(A)$ і $\overline{A}$ відповідно ε-окіл і замикання множини A в H, $\overline{\mathrm{co}}A$ — замикання опуклої оболонки множини A, для $A, B \subset H$ покладемо $\operatorname{dist}(A,B) = \sup\limits_{x\in A}\inf\limits_{y\in B}\|x-y\|$. Нехай $\phi: H \mapsto (-\infty, +\infty]$ — власна, опукла, напівнеперервна знизу функція і нехай $D(\partial\phi) \subset H \mapsto 2^H$ — її субдиференціал. Розглядається задача

$$\frac{dy(t)}{dt} \in -\partial\phi(y(t)) + F(y(t)), \quad t \in [0,T],$$
$$y(0) = y_0 \in H, \tag{1}$$

де $F: H \mapsto 2^H$ — багатозначне відображення, що задовольняє властивості:

1) $F: H \mapsto C_v(H)$;

2) існують $D_1, D_2 \geq 0$ такі, що для довільного $v \in H$
$$\sup_{u\in F(v)}\|u\| \leq D_1 + D_2\|v\|;$$

3) F — w-напівнеперервна зверху на H (w-н. н. зв.), тобто для довільних $\varepsilon > 0$, $x_0 \in H$ існує $\delta > 0$ таке, що для довільних $x_0 \in B_\delta(x_0)$ виконується $F(x) \subset B_\varepsilon(F(x_0))$;

4) існують $\delta > 0$, $M > 0$ такі, що для довільних $u \in D(\partial\phi)$ таких, що $\|u\| \geq M$, для довільних $y \in -\partial\phi(u) + F(u)$ маємо $(y,u) \leq -\delta$;

5) для довільного $R > 0$ множина $M_R = \{u \in H : \|u\| \leq R,\ \phi(u) \leq R\}$ — компакт в H.

Детально задачу (1) розглянуто в [1, 2]. Наведемо лише основні означення і необхідні для подальшого результати. Нехай $X := \overline{D(\phi)}$. Якщо $\rho(x,y) := \|x - y\|$, то (X, ρ) — повний метричний простір [2]. Поряд із задачею (1) розглянемо таку задачу:

$$\frac{dy(t)}{dt} \in -\partial\phi(y(t)) + f(t), \quad t \in [0,T],$$
$$y(0) = y_0 \in H, \tag{2}$$

де $f(\cdot) \in L_1(0,T;H)$.

Означення 1. *Неперервна функція* $y: [0, T] \mapsto H$ *називається сильним розв'язком задачі* (2) *(або* (1)), *якщо* $y(0) = y_0$, $y(\cdot)$ *є абсолютно неперервною на кожній компактній підмножині* $(0, T)$ *і задовольняє* (2) *(або* (1)) *майже скрізь на* $(0, T)$.

Означення 2. *Неперервна функція* $y: [0, T] \mapsto H$ *називається інтегральним розв'язком задачі* (2), *якщо* $y(0) = y_0$ *і для довільних* $u \in D(\partial\phi)$, $v \in -\partial\phi(u)$, *для довільних* $t, s \in [0, T]$, $t \geq s$, *виконується нерівність*

$$\|y(t)-u\|^2 \leq \|y(s)-u\|^2 + 2\int_s^t (f(\tau)+v, y(\tau)-u)\,d\tau.$$

Відомо [2], що будь-який сильний розв'язок задачі (2) є інтегральним.

Означення 3. *Неперервна функція* $y: [0, T] \mapsto H$ *називається інтегральним розв'язком задачі* (1), *якщо* $y(0) = y_0$ *і для деякої функції (селектора)* $f \in L_1(0, T; H)$ *такої, що* $f(t) \in F(y(t))$ *для майже всіх* $t \in [0, T]$, *виконується нерівність з означення* 2.

Згідно з теоремою 2.1 в [3] для довільних $x_0 \in X$, $T > 0$ існує принаймні один інтегральний розв'язок задачі (1), який будемо позначати $x(\cdot) = I(x_0)f(\cdot)$; множина всіх розв'язків задачі (1), яку будемо позначати $\Theta_F(x_0)$, є зв'язним компактом у просторі $C([0,T]; H)$ і відображення $x \mapsto \Theta_F(x)$ є напівнеперервним зверху на H [3] (теореми 2.1, 3.3, 4.3).

Лема 1. *При виконанні умови* 2 *кожен інтегральний розв'язок задачі* (1) *є її сильним розв'язком.*

Доведення. Згідно з [2] для цього достатньо довести, що будь-який селектор $f(\cdot) \in F(y(\cdot))$, де $y(\cdot)$ — інтегральний розв'язок задачі (1), належить $L_2(0, T; H)$. Але це випливає з умови 2 і того, що $y(\cdot) \in C([0,T]; H)$.

Тепер утворимо багатозначне відображення $G(\cdot, \cdot): [0; +\infty) \times X \mapsto 2^X$,

$$G(t, y_0) = \{y(t): y(\cdot) \text{ — сильний розв'язок задачі (1), } y(0) = y_0\}. \qquad (3)$$

Означення 4. *Відображення* $G: [0; +\infty) \times X \mapsto 2^X$ *називається багатозначним напівпотоком (м-напівпотоком), якщо*:

а) $G(0, \cdot) = I$ — *тотожне відображення в* X;

б) $G(t_1 + t_2, x) \subset G(t_1, G(t_2, x))$ *для довільних* $t_1, t_2 \geq 0$, $x \in X$, *де*

$$G(t_1, G(t_2, x)) = \bigcup_{y \in G(t_2, x)} G(t_1, y).$$

Означення 5. *Множина* $\Xi \subset X$ *називається глобальним атрактором м-напівпотоку* G, *якщо:*

а) Ψ — *притягуюча множина, тобто* $\operatorname{dist}(G(t, A), \Xi) \to 0$ *при* $t \to +\infty$ *для довільної* $A \in \beta(X)$;

б) Ψ — *напівінваріантна, тобто* $\Psi \subset G(t, \Psi)$ *для довільних* $t \geq 0$;

в) $\Psi \neq X$ *і якщо* Y — *довільна притягуюча множина, то* $\Psi \subset \overline{Y}$.

Згідно з лемою 5 [1] при виконанні умов $1-5$ відображення G, означене в (3), є $м$-напівпотоком.

Означення 6. *М-напівпотік* G *називається точково дисипативним, якщо існує така множина* $B_0 \in \beta(X)$, *що для довільного* $x \in X$ *існує* $t_x \geq 0$ *таке, що* $G(t, x) \subset B_0$ $\forall\, t \geq t_x$; *м-напівпотік* G *називається асимптотично напівкомпактним зверху (ас.нк.зв.), якщо для довільних множини* $B \in \beta(X)$ *і послідовності* $\{t_n\}$, $t_n \to +\infty$, *довільна послідовність* $\{\xi_n\}$, $\xi_n \in G(t_n, B)$ *є передкомпактною в* X.

Теорема 1 ([4], теорема 1). *Якщо м-напівпотік G є точково дисипативним, ас.нк.зв. і для довільного $t \geq 0$ відображення $G(t, \cdot) : X \mapsto 2^X$ має замкнений графік, то для G існує глобальний, компактний в X атрактор Ξ (надалі атрактор).*

Теорема 2. *При виконанні умов 1–5 для м-напівпотоку G з (3) існує атрактор $\Xi \subset X$.*

Доведення. Отримаємо деякі властивості G. Перша: для довільних $t \geq 0$, $x \in X$ згідно з теоремою 3.3 [3] $G(t, x)$ — компакт в X. Дійсно, з того, що $\Theta_F(x)$ — компакт в $C([0,T]; H)$, маємо, що для довільної послідовності $\{y_n(\cdot)\} \subset \Theta_F(x)$ існують підпослідовність (за якою залишаємо те саме позначення) і $y(\cdot) \in \Theta_F(x)$ такі, що $y_n \to y$ в $C([0,T]; H)$, звідки $y_n(t) \to y(t)$ для довільних $t \in [0, T]$ в H, а тому $G(t, x)$ — компакт в X для довільних $t \in [0, T]$.

Друга властивість: $G(t, \cdot): X \mapsto 2^X$ — напівнеперервне зверху. Дійсно, з того, що $x \mapsto \Theta_F(x)$ — w-напівнеперервне зверху, випливає, що для довільних $\varepsilon > 0$, $x \in X$ існує $\delta > 0$ таке, що для довільних $x \in B_\varepsilon(x_0)$ $\Theta_F(x) \subset \subset B_\varepsilon(\Theta_F(x_0))$. Таким чином, для довільного $y(\cdot) \in \Theta_F(x)$ існує $y_0(\cdot) \in \in \Theta_F(x_0)$ таке, що $\max\limits_{t \in [0,T]} \|y(t) - y_0(t)\| < \varepsilon$. Звідси для довільного $t \in [0, T]$ $\|y(t) - y_0(t)\| < \varepsilon$, отже, $G(t, x) \subset B_\varepsilon(G(t, x_0))$ і внаслідок компактності $G(t, x)$ [5] напівнеперервність зверху доведено. Тоді з [5] маємо, що для довільного $t \geq 0$ відображення $G(t, \cdot): X \mapsto 2^X$ має замкнений графік.

Нехай $B_0 = \{u \in X : \|u\| \leq M + \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$. Покажемо, що $G(t, B_0) \subset B_0$ для довільного $t \geq 0$. Нехай $x_0 \in B_0$, $x(\cdot) \in \Theta_F(x_0)$. Якщо вкладення невірне, то існує $t > 0$ таке, що $x(t) \notin B_0$, тобто $\|x(t)\| > M + \varepsilon$. Оскільки $x(\cdot)$ — неперервна, то існує t_0 таке, що $\|x(t_0)\| = M + \varepsilon$, $\|x(\tau)\| \geq M + \varepsilon$ для довільних $\tau \in \in [t_0, t]$. Тоді, використовуючи властивість 4 і те, що $x(\cdot)$ — сильний розв'язок задачі (1), стандартним чином отримуємо $\dfrac{1}{2}\dfrac{d}{d\tau}\|x(\tau)\|^2 \leq -\delta$, $\tau \in [t_0, t]$. Звідси $\|x(t)\|^2 \leq \|x(t_0)\|^2 - \delta(t - t_0)$ і маємо суперечність, отже, $G(t, B_0) \subset B_0$ для довільних $t \geq 0$. Тепер покажемо, що для довільного $x \in X$ існує $t_x > 0$ таке, що $G(t_x, x) \subset B_0$. Припустимо супротивне, тобто нехай існує $x \in X$ таке, що $G(t, x) \not\subset B_0$ для будь-якого $t \geq 0$. Тоді для довільного $x(\cdot) \in G(\cdot, x)$ маємо $x(t) \notin B_0$ для довільних $t \geq 0$. Розглянемо $t_x > (\|x\|^2 - (M + \varepsilon)^2)(2\delta)^{-1}$ і аналогічно з попередніми міркуваннями одержимо $\|x(t_x)\|^2 \leq \|x\|^2 - 2\delta t_x < < (M + \varepsilon)^2$, що приводить до суперечності. Отже, для довільного $\tau \geq 0$ з означення 4 маємо $G(t_x + \tau, x) \subset G(\tau, G(t_x, x)) \subset G(\tau, B_0) \subset B_0$, тобто G є точково дисипативним. Так само можемо показати, що для довільних $N > 0$, $t \geq 0$ $G(t, B_N) \subset B_N$, де $B_N = \{u \in H : \|u\| \leq N\}$. Звідси маємо, що для довільної $B \in \beta(X)$: $\bigcup\limits_{\tau \geq 0} G(\tau, B) \in \beta(X)$. Доведемо, що $G(t, B)$ — передкомпакт в X для довільних $t > 0$, $B \in \beta(X)$. Для цього на основі умови 5 достатньо показати, що існує $R = R(t, B)$ таке, що $G(t, B) \subset M_R$. Спочатку покажемо, що множина $M(B, T) = \{f(\cdot)$: існує розв'язок $dy/dt \in -\partial\phi(y) + f(t)$, $t \in [0, T]$, $y(0) \in B\}$ обмежена в $L_2(0, T; H)$. Дійсно, існує N таке, що $G(t, B) \subset B_N$ для довільного $t \geq 0$, звідки для довільного $y(\cdot) \in \Theta_F(B)$: $\max\limits_{t \in [0,T]} \|y(t)\| \leq N$. Отже, внаслідок умови 2 для довільних $f(\cdot) \in M(B, T)$: $\|f(t)\| \leq D_1 + D_2\|y(t)\| \leq D_1 + + D_2 N$. Звідси $M(B, T)$ — обмежена в $L_2(0, T; H)$. Тоді можемо скористатися теоремою 8 з [1] і отримати, що існує $R = R(t, B)$ таке, що $G(t, B) \subset M_R$. Звідси $G(t, B)$ — передкомпакт в X, а тому для довільних послідовностей $\{t_n\}$, $t_n \to +\infty$, і $\{\xi_n\}$, $\xi_n \in G(t_n, B)$, маємо $\xi_n \in G(t_n, B) \subset G(t, G(t_n - t, B)) \subset G(t, B_n)$ для досить великих N, починаючи з деякого n. Отже, $\{\xi_n\}$ — передкомпактна, тобто G є ас. нк. зв. і з теореми 1 випливає, що існує Ξ-компактний атрактор G, причому $\Xi \doteq G(t, \Xi)$ для довільних $t \geq 0$.

2. Тепер дослідимо питання про апроксимацію атрактора Ξ. Для цього конкретизуємо задачу (1), а саме, нехай $\partial\phi = -\Delta$ при нульових крайових умовах, $H = L_2(\Omega)$, $\Omega \subset R^n$ — обмежена область з досить гладкою границею.

Теорема 3. *Якщо виконані умови* 1, 3 *з теореми* 2 *і* 2*) *існує* $C > 0$ *така, що для довільного* $u \in R$ $\sup_{s \in f(u)} |v| < C$, *то для м-напівпотоку* G, *що задається формулою* (3),

i) *існує компактний атрактор* Ξ, *причому* $\Xi = G(t, \Xi)$ *для будь-якого* $t \geq 0$;

ii) *існує послідовність м-напівпотоків* G_n *і їх атракторів* $\{\Xi_n\}$ *така, що* $\Re(\Xi, \Xi_n) \to 0$, $n \to \infty$, *де* $\Re(\cdot, \cdot)$ —*метрика Хаусдорфа.*

Доведення. В умовах теореми $X = \overline{H_0^1(\Omega)} = H$. Перше твердження теореми є безпосереднім наслідком теореми 2. Дійсно, умова 2 теореми 2 випливає з 2*; внаслідок компактності вкладення $H_0^1 \subset L_2$ маємо, що для довільного $R > 0$ M_R — компакт в H, отже, виконано умову 5, а для довільного $u \in \Delta y + F(y)$ маємо $(u, y) + \lambda_1 \|y\|^2 \leq (f, y) \leq C\|y\|$ (тут $f \in F(y)$, λ_1 — перше власне значення $-\Delta$ в $H_0^1(\Omega)$). Звідси $(u, y) \leq \|y\|(-\lambda_1\|y\| + C)$ і умова 4 теореми 2 виконується при $\delta = M = \lambda_1^{-1}(C+1)$. Отже, для м-напівпотоку G існує компактний в X атрактор Ξ, який є обмеженою множиною в H_0^1.

Доведемо друге твердження теореми. Завдяки умові 2* можемо скористатися теоремою 1.1 з [3] і побудувати послідовність $\{F_n : H \mapsto C_v(H)\}$ таку, що для довільного $u \in H$ $F(u) = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n(u)$, $F_{n+1}(u) \subset F_n(u)$, $F_n(u)$ — локально ліпшицеві та мають локально ліпшицеві селектори і для кожного F_n виконується умова 2* з тією самою константою C. На основі F_n за формулою (3) будуємо м-напівпотоки G_n. Оскільки локально ліпшицеве відображення є w-напівнеперервним зверху, то всі умови пункту i) цієї теореми виконані для G_n і для довільних $n \geq 1$ існують Ξ_n-компактні атрактори G_n, причому $G_n(t, \Xi_n) = \Xi_n$ для довільних $t \geq 0$. Тоді $\Xi = G(t, \Xi) \subset G_n(t, \Xi_n) \subset B_\varepsilon(\Xi_n)$ для довільного $\varepsilon > 0$, Ξ_n — компакти, отже, $\Xi \subset \Xi_n$ для довільних $n \geq 1$ і аналогічно $\Xi_{n+1} \subset \Xi_n$. Тоді $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Xi_n \subset \Xi_1$ і для доведення $\Re(\Xi_n, \Xi) \to 0$ достатньо переконатись в тому, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує N таке, що для довільних $n \geq N$ $\Xi_n \subset B_\varepsilon(\Xi)$. Це вкладення випливає з теореми 2, наведеної в [4], якщо довести, по-перше, справедливість включення $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Xi_n \in \beta(H)$ (а ми вже показали передкомпактність цієї множини) і, по-друге, існування такого $t > 0$, що для довільного $\varepsilon > 0$ $G_n(t, \bigcup_{n=1}^{\infty} \Xi_n \cup \Xi) \subset B_\varepsilon(G(t, \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \Xi_n \cup \Xi}))$ для довільного $n \geq N$. Перевіримо це. На множині $\Lambda = N \cup \{+\infty\}$ введемо метрику $\rho(m, n) = |1/m - 1/n|$ $(1/\infty = 0)$. Тоді (Λ, ρ) — метричний компакт. Нехай $\lambda_0 = +\infty$, а з властивостей Ξ_n маємо $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \Xi_n \cup \Xi} = \Xi_1$. Тепер нам достатньо перевірити, що відображення $\Lambda \ni \lambda \mapsto G_\lambda(t, \Xi_1)$ є w-напівнеперервним зверху в точці λ_0. Оскільки $G_\lambda(t, \Xi_1)$ — компакт для довільного $\lambda \in \Lambda$ (це випливає з w-н. н. зв. і компактозначності відображення $G_\lambda(t, \cdot)$ [6]), (Λ, ρ) — метричний компакт, то для напівнеперервності зверху вказаного відображення достатньо довести, що його графік на Λ — компакт в $\Lambda \times H$ (див. [3], теорема 4.3), тобто множина $D = \{(\Lambda, u)\colon \lambda \in \Lambda,\ u \in G_\lambda(t, \Xi_1)\}$ — компакт в $\Lambda \times H$. Нехай $\{(\lambda_n, u_n)\} \subset D$. Тоді $\lambda_n \to \lambda_0$ і доведемо існування елемента $u_1 \in G_{\lambda_0}(t, \Xi_1)$ такого, що $u_n \to u_1$ в H (з точністю до підпослідовності). Маємо $u_n = u_n(t) = I(\eta_n) f_n(t)$, $u_n(0) = \eta_n \in \Xi_1$. Тоді існує $\eta_0 \in \Xi_1$ таке, що $\eta_n \to \eta_0$. Розглянемо $z_n(\cdot) = I(\eta_0) f_n(\cdot)$. Оскільки на підставі умови 2^* та твердження 1.2 [6] $f_n \to f$ слабко в $L_1(0, T; H)$, $\{f_n\}$ — рівномірно інтегровна (умова 2^*) і напівгрупа $S(t, \cdot)$, породжена оператором $-\partial\phi$, є компактною [2], то існують підпослідовності $\{z_n(\cdot)\}$, $\{f_n(\cdot)\}$ такі, що $z_n \to z$ в $C([0, T]; H)$, $f_n \to f$ слабко в $L_1(0, T; H)$ і $z(\cdot) = = I(\eta_0) f(\cdot)$ ([6], лема 1.3). Тоді

$$\max_{t \in [0,T]} \|u_n(t) - z(t)\| \le \max_{t \in [0,T]} \|I(\eta_n) f_n(t) - I(\eta_0) f_n(t)\| +$$

$$+ \max_{t \in [0,T]} \|I(\eta_0) f_n(t) - I(\eta_0) f(t)\| \le \|\eta_n - \eta_0\| + \max_{t \in [0,T]} \|z_n(t) - z(t)\| \to 0, \quad n \to \infty,$$

отже, $u_n(t) \to z(t)$ для довільних $t \in [0, T]$, $z(0) = \eta_0 \in \Xi_1$. Те, що $f(t) \in \in F(z(t))$ для майже всіх $t \in [0, T]$, випливає з наступних міркувань.

$f_n(t) \in F_n(z_n(t))$ (надалі опускаємо аргумент t). Доведемо існування $N \ge 1$ такого, що для довільних $n \ge N$ $f \in B_{1/n}(F_n(z))$. Припустимо, що це не так. Тоді для довільного $N \ge 1$ існує $n \ge N$ таке, що $f \notin B_{1/n}(F_n(z))$. Водночас з w-н. н. зв. і викладеного вище для довільного $n \ge 1$ існує $m(n) \ge n$ таке, що для довільного $k \ge m(n)$ $F_n(z_k) \subset B_{1/(2n)}(F_n(z))$. Отже, $\bigcup_{k \ge m(n)} F_n(z_k) \subset \subset B_{1/(2n)}(F_n(z))$. Оскільки $k \ge m(n) \ge n$, то $\bigcup_{k \ge m(n)} F_n(z_k) \subset B_{1/(2n)}(F_n(z))$. Звідси внаслідок опуклості $F_n(z)$ маємо вкладення $\overline{\mathrm{co}} \bigcup_{k \ge m(n)} f_k \subset B_{1/n}(F_n(z))$, а тому $f \notin \notin \overline{\mathrm{co}} \bigcup_{k \ge m(n)} f_k$ і з твердження 1.1 [6] отримуємо суперечність. Отже, для довільного $n \ge N$ існує $g_n \in F_n(z)$ таке, що $\|g_n - f\| \le 1/n$. Звідси $g_n \to f$ в H і з того, що $F_{n+1}(z) \subset F_n(z)$, маємо $f \in F_n(z)$ для довільних $n \ge \ge N$, отже, $f \in F(z)$. Теорему доведено.

Зауваження. Неважко довести, що при виконанні умови 5 з теореми 2 теорема 3 залишається справедливою для довільної функції ϕ з теореми 2, субдиференціал якої є однозначним відображенням, що задовольняє нерівність $(\partial\phi(u), u) \ge \gamma \|u\|^2$ з деяким $\gamma > 0$ для всіх $u \in \overline{D(\phi)}$.

Теорема 2 анонсована в [7].

1. *Melnik V. S., Valero J.,* On attractors of multivalued semi-flows and differential inclusions // Set-Valued Anal. – 1998. – № 6. – P. 83 – 111.
2. *Barbu V.* Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces. – Budapest: Editura Acad., 1976. – 438 p.
3. *Толстоногов А. А., Уманский Я. И.* О решениях эволюционных включений. 2 // Сиб. мат. журн. – 1992. – **33**, № 4. – С. 163 – 173.
4. *Капустян А. В., Мельник В. С.* Аттракторы многозначных полудинамических систем и их аппроксимации // Допов. НАН України. – 1998. – № 10. – С. 21 – 25.
5. *Обмен Ж.-П., Екланд И.* Прикладной нелинейный анализ. – М.: Мир, 1988. – 510 с.
6. *Толстоногов А. А.* О решениях эволюционных включений. 1 // Сиб. мат. журн. – 1992. – **33**, № 3. – С. 165 – 175.
7. *Капустян О. В.* Апроксимації і неперервна залежність від параметра атракторів диференціальних включень // Мат. студ. – 2000. – **13**, № 1. – С. 83 – 86.

Одержано 06.10.99,
після доопрацювання — 28.01.2000