УДК 517.98

Ю. Г. Мокроусов (Нац. техн. ун-т „КПІ", Київ)

ПРО ЩІЛЬНІСТЬ ПІДПРОСТОРІВ АНАЛІТИЧНИХ ВЕКТОРІВ ЗАМКНЕНОГО ЛІНІЙНОГО ОПЕРАТОРА В БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ

We obtain conditions on the behavior of resolvent and on the location of spectrum of a linear closed operator A densely defined in the Banach space E under which its Gevrey spaces $G_{(\beta)}(A)$, $\beta < 1$, are dense in E.

Отримано умови на поведінку резольвенти та розташування спектра лінійного замкненого щільно визначеного оператора A у банаховому просторі E, за яких його простори Жевре $G_{(\beta)}(A)$, $\beta < 1$, щільні в E.

Нехай A — замкнений лінійний оператор з щільною областю визначення $D(A)$ в комплексному банаховому просторі E з нормою $\|\cdot\|$. Позначимо через $C^\infty(A)$ простір нескінченно диференційовних векторів оператора A:

$$C^\infty(A) = \bigcap_{n \in N_0} D(A^n), \quad N_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Для числа $\beta \geq 0$ покладемо

$$G_{\{\beta\}}(A) = \left\{x \in C^\infty(A) \mid \exists\, \alpha > 0\ \exists\, c > 0\ \forall\, k \in N_0\ \left\|A^k x\right\| \leq c\alpha^k k^{\beta k}\right\},$$

$$G_{(\beta)}(A) = \left\{x \in C^\infty(A) \mid \forall\, \alpha > 0\ \exists\, c > 0\ \forall\, k \in N_0\ \left\|A^k x\right\| \leq c\alpha^k k^{\beta k}\right\}.$$

На лінійних просторах $G_{\{\beta\}}(A)$ і $G_{(\beta)}(A)$ вводяться топології відповідно індуктивної та проективної границь банахових просторів

$$G_\beta^\alpha(A) = \left\{x \in C^\infty(A) \mid \exists\, c > 0\ \forall\, k \in N_0\ \left\|A^k x\right\| \leq c\alpha^k k^{\beta k}\right\}, \quad \alpha \geq 0,$$

$$\|x\|_{G_\beta^\alpha(A)} = \sup_{k \in N_0} \left\|A^k x\right\| \left(\alpha^k k^{\beta k}\right)^{-1}.$$

Таким чином,

$$G_{\{\beta\}}(A) = \operatorname{ind} \lim_{\alpha \to \infty} G_\beta^\alpha(A), \qquad G_{(\beta)}(A) = \operatorname{proj} \lim_{\alpha \to \infty} G_\beta^\alpha(A).$$

Зазначимо, що для довільних $\lambda, \mu \in \boldsymbol{C}$ ($\boldsymbol{C}$ — множина комплексних чисел)

$$G_{\{\beta\}}(A) = G_{\{\beta\}}(\lambda A + \mu I), \qquad G_{(\beta)}(A) = G_{(\beta)}(\lambda A + \mu I).$$

Простори $G_{\{1\}}(A)$, $G_{(1)}(A)$ і $G_{\{0\}}(A)$ називаються просторами відповідно аналітичних [1], цілих [2] і цілих експоненціального типу [3] векторів оператора A. У конкретному випадку, коли $E = C[a, b]$, $-\infty < a < b < \infty$, $A = d/dx$, $D(A) = C^1[a, b]$, $C^\infty(A)$ збігається з множиною $C^\infty[a, b]$ усіх нескінченно диференційовних на $[a, b]$ функцій, а $G_{\{I\}}(A)$, $G_{(I)}(A)$ і $G_{\{0\}}(A)$ — простори усіх відповідно аналітичних на $[a, b]$, цілих і цілих експоненціального типу функцій. Простори $G_{\{\beta\}}(A)$ $(G_{(\beta)}(A))$, $\beta > 1$, — відомі класи Жевре типу Рум'є (Берлінга). У наведеному прикладі усі розглянуті простори щільні в E. У загальному випадку це не так, тому виникає питання, за яких умов на оператор A і число β $\overline{G_{\{\beta\}}(A)} = E$, $\overline{G_{(\beta)}(A)} = E$. Це питання цікавило багатьох математиків у різних частинних випадках [4–6]. У [7] для $\beta > 1$ сформульовану задачу розв'язано у термінах розміщення спектра A і оцінки росту його резольвенти. Розглянемо випадок, коли $\beta \leq 1$. Позначимо

$$\overline{S_{\theta_0}} = \{z \in \boldsymbol{C} : |\arg z| \leq \theta_0\}, \quad K_{R_0} = \{z \in \boldsymbol{C} : |z| \leq R_0\}, \quad P_{\theta_0, R_0} = \overline{S_{\theta_0}} \cup K_{R_0}.$$

Теорема. *Нехай* A — *лінійний замкнений щільно визначений оператор в банаховому просторі* E. *Припустимо, що резольвента* A *існує в області* $C \backslash P_{\theta_0, R_0}$ *при деяких* $R_0 \geq 0$, $0 \leq \theta_0 \leq \pi/2$, *причому* $\forall\, \theta_1 > \theta_0$, $0 \leq \theta_1 \leq \pi/2$, $\exists\, M > 0$, $R_1 > R_0$, і $N \geq 0$ — *ціле, такі, що*

$$\left\|(zI - A)^{-1}\right\| \leq M(1+|z|)^N, \quad z \in C \backslash P_{\theta_1, R_1}. \tag{1}$$

Тоді для довільного $\beta > 2\theta_0/\pi$ $\overline{G_{(\beta)}(A)} = E$, *а значить, і* $\overline{G_{\{\beta\}}(A)} = E$.

Доведення. Розглянемо сім'ю цілих функцій

$$\psi_\rho(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{n^\rho}\right), \quad \rho > 1.$$

Як показано в [8], для кожного $\varepsilon > 0$ існує $C_\varepsilon > 0$ таке, що

$$\left|\psi_\rho(re^{i\theta})\right| \leq C_\varepsilon \exp\left[\left(\frac{\pi}{\sin \pi/\rho} \cos\frac{\theta - \pi}{\rho} + \varepsilon\right) r^{1/\rho}\right].$$

З цієї оцінки випливатиме, що для цілої функції

$$h_\beta(re^{i\theta}) = \psi_\rho r^{1/n} \exp[i(\theta + \pi/n + \pi\beta)/n],$$

де $n/\rho = 1/\beta$, $n \in N = \{1, 2, 3, \ldots, \}$, $2\theta_0/\pi < \beta < 1$, справедлива нерівність

$$\left|h_\beta(re^{i\theta})\right| \leq C_\varepsilon \exp\left[\left(-B\cos\frac{\theta}{\beta} + \varepsilon\right) r^{1/\beta}\right], \quad B = B(\rho) > 0.$$

Як наслідок будемо мати, що при кожному $\theta_1 \in [0, \pi\beta/2)$ існують $C_1, \delta_1 > 0$ такі, що

$$\left|h_\beta(re^{i\theta})\right| \leq C_1 e^{-\delta_1 r^{1/\beta}}, \quad -\theta_1 \leq \theta \leq \theta_1. \tag{2}$$

Для довільного фіксованого $\beta \in [2\theta_0/\pi, 1)$ розглянемо множину векторів Y_β:

$$Y_\beta = \left\{y \in E \mid y = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma h_\beta(\varepsilon z) R(z) x\, dz,\ \varepsilon > 0,\ x \in C^\infty(A)\right\},$$

$R(z) = (zI - A)^{-1}$, $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ — контур, що є границею P_{θ_1, R_1}, $\Gamma_1 = \left\{z \in C \mid z = re^{i\theta_1},\ r \geq R_1\right\}$, $\Gamma_2 = \left\{z \in C \mid z = R_1 e^{i\varphi},\ 2\pi - \theta_1 \geq \varphi \geq \theta_1\right\}$, $\Gamma_3 = \left\{z \in C \mid z = re^{-i\theta_1},\ r \geq R_1\right\}$, де $\theta_0 < \theta_1 < \pi\beta/2$. Покажемо, що $Y_\beta \subset G_{\{\beta\}}(A)$ (поклавши для простоти $\varepsilon = 1$). Із умов (1), (2) та тотожності

$$A^k R(z) x = z A^{k-1} R(z) x - A^{k-1} x, \quad x \in C^\infty(A), \quad k \in N,$$

випливає співвідношення

$$A^n y = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma h_\beta(z) z^n R(z) x\, dz, \quad y \in Y_\beta, \quad n \in N_0,$$

і оцінка

$$\left\|A^n y\right\| \leq C_2 \int_0^\infty e^{-\delta r^{1/\beta}} r^{n+N} dr + C_3 R_1^{n+N+1},$$

де C_2, C_3 — додатні константи.

Але

$$\int_0^\infty r^{n+N} e^{-\delta r^{1/\beta}} dr = \frac{\beta}{\delta\beta^{(n+N+1)}} \Gamma(\beta(n+N+1)),$$

де Γ — гамма-функція Ейлера з асимптотикою

$$\Gamma(\beta(n+N+1)) \approx C_4(\beta(n+N+1))^{\beta(n+N+1)} e^{-\beta(n+N+1)} \sqrt{2\pi(\beta(n+N+1))}$$

при великих n (C_4 — додатна константа) [9].

Тому

$$\forall y \in Y_\beta \ \exists \alpha, c > 0: \ \left\| A^n y \right\| \le c\alpha^n n^{\beta n} \quad \forall n \in N_0,$$

а значить, $Y_\beta \subset G_{\{\beta\}}(A)$.

Доведемо щільність Y_β в $C^\infty(A)$ (а отже, і в E [10]). Розглянемо послідовність векторів з Y_β: $\left\{ y_\varepsilon = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma h_\beta(\varepsilon z) R(z) x dz, \ \varepsilon > 0 \right\}$, де x — фіксований вектор з $C^\infty(A)$. За формулою Коші

$$\frac{n!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{h_\beta(\varepsilon z)}{z^{n+1}} x dz = \varepsilon^n h_\beta^{(n)}(0) x, \quad n \in N_0.$$

Поділивши і домноживши під інтегралом у виразі для y_ε на z^{N+2} і застосувавши формулу $z^k R(z) x = z^{k-1} x + A z^{k-1} R(z) x, \ k \in N_0$, отримаємо

$$y_\varepsilon = h_\beta(0) x + \varepsilon h_\beta^{(1)}(0) x + \ldots + \frac{\varepsilon^{N+1} h_\beta^{(N+1)}(0)}{(N+1)!} A^{N+1} + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{h_\beta(\varepsilon z)}{z^{N+2}} R(z) A^{N+2} x dz.$$

Використовуючи теорему про мажоровану збіжність і враховуючи, що $R(z) A^{N+2} x / z^{N+2}$ спадає як $1/|z|^2$, $|z| \to \infty$, у $C \backslash P_{\theta_1, R_1}$ маємо

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{h_\beta(\varepsilon z)}{z^{N+2}} R(z) A^{N+2} x dz \to 0 \quad \text{і} \quad y_\varepsilon \to x, \ \varepsilon \to 0.$$

Вибираючи $h_\beta(z)$ такою, що $h_\beta(0) = 1$, отримуємо, що Y_β щільна в $C^\infty(A)$. Теорему доведено.

Нехай тепер A генерує напівгрупу розподілів з кутом θ. Тоді, як показано в [11], існують дійсне ω і ціле N_1 такі, що при кожному $\varepsilon > 0$ існує $C_\varepsilon > 0$ таке, що

$$\left\| (zI - A)^{-1} \right\| \le C_\varepsilon (1 + |z|)^{N_1}, \quad (z - \omega) \in C \mid \overline{S}_{\frac{\pi}{2} - \theta + \varepsilon}, \quad z \ne 0,$$

тобто $A - \omega$ задовольняє умови теореми з $\theta_0 = \pi/2 - \theta$, $R_0 = |\omega|$ і $N = 0$ або N_1.

Наслідок. *Якщо A є генератором аналітичної напівгрупи-розподілу з кутом θ (або просто аналітичної напівгрупи з кутом θ), то для довільного $\beta > 2\theta_0/\pi$ $\overline{G_{(\beta)}(A)} = E$ і $\overline{G_{\{\beta\}}(A)} = E$.*

1. *Nelson E.* Analytic vectors // Ann. Math. – 1959. – (2)70, № 3. – P. 572 – 615.
2. *Goodman R.* Analytic and entire vectors for representations of Lie groups // Trans. Amer. Math. Soc. – 1969. – **143**. – P. 55 – 76.
3. *Радыно Я. В.* Пространство векторов экспоненциального типа // Докл. АН БССР. – 1983. – **27**, № 9. – С. 791 – 793.
4. *Гельфанд И. М.* Об однопараметрических группах операторов в нормированном пространстве // Докл. АН СССР. – 1939. – **25**, № 9. – С. 713 – 718.
5. *Князюк А. В.* Граничные значения бесконечно-дифференцируемых полугрупп. – Киев, 1985. – 47 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; № 69).
6. *Березанский Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель З. Г.* Функциональный анализ. – Киев: Выща шк., 1990. – 600 с.
7. *Beals R.* Semigroups and abstract Gervey spaces // J. Funct. Anal. – 1972. – **10**, № 3. – P. 300 – 308.
8. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Пространства основных и обобщенных функций. – М.: Физматгиз, 1958. – 308 с.
9. *Двайт Г. Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы. – М.: Изд-во иностр. лит., 1948. – 255 с.
10. *Горбачук В. И., Князюк А. В.* Граничные значения решений дифференциально-операторных уравнений // Успехи мат. наук. – 1989. – **44**, № 3. – С. 55 – 91.
11. *Fujiwara D.* A characterization of exponential distribution of semi-groups // J. Math. Soc. Jap. – 1966. – **18**, № 3. – P. 267 – 274.

Одержано 15.02.2000