УДК 517.5

А. С. Сердюк (Ін-т математики НАН України, Київ)

НАБЛИЖЕННЯ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ ВИСОКОЇ ГЛАДКОСТІ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИМИ ТРИГОНОМЕТРИЧНИМИ ПОЛІНОМАМИ В МЕТРИЦІ L_1

We establish asymptotically exact estimate of an error of approximation of $\mathbb{R}^2$-periodic functions with high smoothness by interpolational trigonometric polynomials in the δ-metric.

Встановлено асимптотично точну оцінку похибки наближення 2π-періодичних функцій високої гладкості інтерполяційними тригонометричними поліномами в L_1-метриці.

Нехай L_1 — простір 2π-періодичних функцій φ, сумовних на $[0, 2\pi]$ з нормою

$$\|\varphi\|_{L_1} = \|\varphi\|_1 = \int_0^{2\pi} |\varphi(t)|\,dt.$$

Нехай далі $C_1^{\overline{\Psi}}$ — введені О. І. Степанцем [1] класи неперервних 2π-періодичних $\overline{\psi}$-інтегровних функцій, що допускають зображення у вигляді згорток

$$C_1^{\overline{\Psi}} = \left\{ f \in C\colon f(\cdot) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \Psi(\cdot - t)\varphi(t)\,dt,\ \|\varphi\|_1 \le 1,\ \varphi \perp 1,\ a_0 \in \mathbb{R} \right\}$$

з фіксованими ядрами $\Psi(t)$ вигляду

$$\Psi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_1(k)\cos kt + \psi_2(k)\sin kt, \qquad \psi_i(k) \in \mathbb{R}, \qquad i = 1, 2, \tag{1}$$

коефіцієнти Фур'є яких $\psi_1(k)$ і $\psi_2(k)$ підпорядковані умові

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} = 0, \qquad \psi(k) \overset{\mathrm{df}}{=} \sqrt{\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k)}. \tag{2}$$

Зазначимо, що виконання умови (2) для коефіцієнтів Фур'є ядра Ψ забезпечує високу гладкість функцій із класу $C_1^{\overline{\Psi}}$ (елементи множини $C_1^{\overline{\Psi}}$ можна розглядати як звуження на дійсну вісь функцій, регулярних на всій комплексній площині [1, с. 1100–1101]).

Якщо $f(x)$ — довільна 2π-періодична неперервна функція, то через $\tilde{S}_n(f, x)$ позначимо тригонометричний поліном порядку n, що інтерполює $f(x)$ в точках $x_k^{(n)} = 2k\pi/(2n+1)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

У цій роботі встановлюється асимптотично точна оцінка величини

$$\tilde{\mathcal{E}}_n\big(C_1^{\overline{\Psi}}\big)_{L_1} = \sup_{f \in C_1^{\overline{\Psi}}} \big\| f(\cdot) - \tilde{S}_n(f, \cdot) \big\|_1.$$

Теорема. *Якщо коефіцієнти Фур'є ядра* $\Psi(t)$ *вигляду* (1) *підпорядковані умові* (2), *то при* $n \to \infty$ *має місце асимптотична рівність*

$$\tilde{\mathcal{E}}_n\big(C_1^{\overline{\Psi}}\big)_{L_1} = \frac{16}{\pi^2}\psi(n+1) + O(1)\left(\frac{\psi(n+1)}{n} + \sum_{k=n+2}^{\infty} \psi(k) \right),$$

в якій величина $O(1)$ *рівномірно обмежена відносно* n *і* ψ.

Доведення. Коефіцієнти Фур'є a_k і b_k функції f із класу $C_1^{\overline{\psi}}$ мають вигляд

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\psi(k)\cos\left(kt+\frac{\pi\beta_k}{2}\right)\varphi(t)\,dt, \tag{3}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\psi(k)\sin\left(kt+\frac{\pi\beta_k}{2}\right)\varphi(t)\,dt, \tag{4}$$

де послідовність β_k означається за допомогою рівностей

$$\cos\frac{\beta_k\pi}{2} = \frac{\psi_1(k)}{\psi(k)}, \qquad \sin\frac{\beta_k\pi}{2} = \frac{\psi_2(k)}{\psi(k)}, \qquad k=1,2,\ldots .$$

Нам буде зручно зобразити функцію $f(x)$ у вигляді

$$f(x) = S_n(f,x)+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k=n+1}^{\infty}\psi(k)\cos\left(k(t-x)+\frac{\pi\beta_k}{2}\right)\varphi(t)\,dt, \tag{5}$$

де $S_n(f,x)$ — часткова сума Фур'є порядку n функції f із $C_1^{\overline{\psi}}$.

Інтерполяційний тригонометричний поліном $\tilde{S}_n(f,x)$ можна записати, як відомо, таким чином:

$$\tilde{S}_n(f,x) = \frac{a_0^{(n)}}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^{(n)}\cos kx+b_k^{(n)}\sin kx\right),$$

де

$$a_k^{(n)} = \frac{2}{2n+1}\sum_{i=0}^{2n}f(x_i^{(n)})\cos kx_i^{(n)},$$

$$b_k^{(n)} = \frac{2}{2n+1}\sum_{i=0}^{2n}f(x_i^{n})\sin kx_i^{(n)}, \qquad k=\overline{0,n}.$$

Зв'язок між коефіцієнтами Фур'є a_k і b_k функції $f(x)$ і коефіцієнтами $a_k^{(n)}$ і $b_k^{(n)}$ інтерполяційного многочлена $\tilde{S}_n(f,x)$ виражається рівностями [2, с. 28; 3, с. 213]

$$a_k^{(n)} = a_k+\sum_{\mu=1}^{\infty}\left(a_{\mu(2n+1)+k}+a_{\mu(2n+1)-k}\right), \qquad k=\overline{0,n}, \tag{6}$$

$$b_k^{(n)} = b_k+\sum_{\mu=1}^{\infty}\left(b_{\mu(2n+1)+k}-b_{\mu(2n+1)-k}\right), \qquad k=\overline{1,n}. \tag{7}$$

Враховуючи (3)–(7) і означаючи функції $\omega_\nu(x,t)$, $\nu=n+1, n+2,\ldots$, за допомогою формул

$$\omega_{\mu(2n+1)+k}(x,t) = \cos\left(\mu(2n+1)t+k(t-x)+\frac{\pi\beta_{\mu(2n+1)+k}}{2}\right),$$
$$\mu=1,2,\ldots; \quad k=0,\pm1,\pm2,\ldots,\pm n,$$

одержуємо

$$\tilde{S}_n(f,x) = S_n(f,x)+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(t)\psi(n+1)\cos\left((n+1)t+nx+\frac{\pi\beta_{n+1}}{2}\right)dt+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(t)\sum_{\nu=n+2}^{\infty}\psi(\nu)\omega_\nu(x,t)\,dt. \tag{8}$$

Із (5) і (8) випливає

$$f(x)-\tilde{S}_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\psi(n+1)\left[\cos\left((n+1)(t-x)+\frac{\pi\beta_{n+1}}{2}\right)-\right.$$

$$\left.-\cos\left((n+1)t+nx+\frac{\pi\beta_{n+1}}{2}\right)\right]\varphi(t)\,dt+\rho_{n+2}(f,x) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\sin\frac{2n+1}{2}x\int_0^{2\pi}\psi(n+1)\sin\left((n+1)t-\frac{x}{2}+\frac{\pi\beta_{n+1}}{2}\right)\varphi(t)\,dt+\rho_{n+2}(f,x), \qquad (9)$$

де

$$\rho_{n+2}(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k=n+2}^{\infty}\psi(k)\left[\cos\left(k(t-x)+\frac{\pi\beta_k}{2}\right)-\omega_k(x,t)\right]\varphi(t)\,dt. \qquad (10)$$

Очевидно, що

$$\|\rho_{n+2}(f,x)\|_1 \le 4\sum_{k=n+2}^{\infty}\psi(k). \qquad (11)$$

Нехай

$$A_n = \sup_{\substack{\|\varphi\|_1\le 1\\ \varphi\perp 1}}\left\|\frac{2}{\pi}\sin\frac{2n+1}{2}x\int_0^{2\pi}\sin\left((n+1)t-\frac{x}{2}+\frac{\pi\beta_{n+1}}{2}\right)\varphi(t)\,dt\right\|_1.$$

Знайдемо далі асимптотично точну оцінку величини A_n при $n\to\infty$. Таку оцінку вдається одержати, скориставшись ідеями С. М. Нікольського ([4], § 2).

Нехай $M = L_\infty$ — простір функцій $g = g(t)$, вимірних і суттєво обмежених на $[0, 2\pi]$ з нормою $\|g\|_M = \|g\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{0\le t\le 2\pi}|g(t)|$. Легко бачити, що

$$A_n = \frac{2}{\pi}\sup_{\substack{\|\varphi\|_1\le 1\\ \varphi\perp 1}}\sup_{\|g\|_\infty\le 1}\int_0^{2\pi}g(x)\int_0^{2\pi}\sin\frac{2n+1}{2}x\sin\left((n+1)t-\frac{x}{2}+\frac{\pi\beta_{n+1}}{2}\right)\varphi(t)\,dt\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\sup_{\|g\|_\infty\le 1}\sup_{\substack{\|\varphi\|_1\le 1\\ \varphi\perp 1}}\int_0^{2\pi}\varphi(t)\int_0^{2\pi}\sin\frac{2n+1}{2}x\sin\left((n+1)t-\frac{x}{2}+\frac{\pi\beta_{n+1}}{2}\right)g(x)\,dx\,dt. \qquad (12)$$

Нам необхідне наступне твердження [4, с. 214].

Лема. *Нехай $f(x)$ — неперервна на $[a, b]$ функція, тоді*

$$\sup_{\substack{\|\varphi\|_{L_1[a,b]}\le 1\\ \varphi\perp 1}}\int_a^b f(t)\varphi(t)\,dt = \frac{1}{2}\left\{\max_t f(t)-\min_t f(t)\right\} = \frac{1}{2}\max_{t_1,t_2\in[a,b]}\{f(t_1)-f(t_2)\}.$$

Із наведеної леми, а також з рівностей (12) випливає

$$A_n = \frac{2}{\pi}\sup_{\|g\|_\infty\le 1}\left\{\frac{1}{2}\max_{t_1,t_2}\int_0^{2\pi}\sin\frac{2n+1}{2}x\left[\sin\left((n+1)t_1-\frac{x}{2}+\frac{\pi\beta_{n+1}}{2}\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sin\left((n+1)t_2-\frac{x}{2}+\frac{\pi\beta_{n+1}}{2}\right)\right]g(x)\,dx\right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\max_{t_1, t_2}\int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{2n+1}{2}x\left[\sin\left((n+1)t_1-\frac{x}{2}+\frac{\pi\beta_{n+1}}{2}\right)-\sin\left((n+1)t_2-\frac{x}{2}+\frac{\pi\beta_{n+1}}{2}\right)\right]\right|dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\max_{t_1, t_2}\int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{2n+1}{2}x\cos\left((n+1)\frac{t_1+t_2}{2}-\frac{x}{2}+\frac{\pi\beta_{n+1}}{2}\right)\sin\left((n+1)\frac{t_1-t_2}{2}\right)\right|dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\max_{0\le\theta\le\frac{2\pi}{2n+1}}\int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{2n+1}{2}x\sin\frac{x-\theta}{2}\right|dx. \tag{13}$$

Оскільки для кожного $\theta\in\left[0,\frac{2\pi}{2n+1}\right]$

$$\left|\int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{2n+1}{2}x\right|\left(\sin\frac{x}{2}-\left|\sin\frac{x-\theta}{2}\right|\right)dx\right| \le$$

$$\le \frac{\pi}{2n+1}\int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{2n+1}{2}x\right|dx = \frac{4\pi}{2n+1} = \frac{O(1)}{n},$$

то

$$\max_{0\le\theta\le\frac{2\pi}{2n+1}}\int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{2n+1}{2}x\sin\frac{x-\theta}{2}\right|dx =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{2n+1}{2}x\right|\sin\frac{x}{2}\,dx+\frac{O(1)}{n}. \tag{14}$$

Тоді з урахуванням (13) і (14) одержуємо

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{2n+1}{2}x\right|\sin\frac{x}{2}\,dx+\frac{O(1)}{n} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\int_{x_k^{(n)}}^{x_{k+1}^{(n)}}(\cos nx-\cos(n+1)x)\,dx+\frac{O(1)}{n} =$$

$$= \frac{2n+1}{\pi n(n+1)}\sum_{k=0}^{2n}\left(\sin\frac{(k+1)\pi}{2n+1}+\sin\frac{k\pi}{2n+1}\right)+\frac{O(1)}{n} =$$

$$= \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{2n}\frac{2\pi}{2n+1}\sin\frac{k\pi}{2n+1}+\frac{O(1)}{n}. \tag{15}$$

Оскільки величина

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{2n}\frac{2\pi}{2n+1}\sin\frac{k\pi}{2n+1}$$

є інтегральною сумою функції $\sin(x/2)$ за розбиттям $\Delta_n = \left\{x_k^{(n)}\right\}_{k=0}^{2n+1}$ проміжку $[0, 2\pi]$, а також

$$\left|\int_0^{2\pi}\sin\frac{x}{2}dx-\sigma_n\right| = |4-\sigma_n| = \frac{O(1)}{n}, \tag{16}$$

на основі (15) і (16) можемо записати оцінку:

$$A_n = \frac{16}{\pi^2} + \frac{O(1)}{n}. \tag{17}$$

Враховуючи (9)–(11) і (17), одержуємо

$$\tilde{\mathscr{E}}_n\left(C_1^{\overline{\psi}}\right)_{L_1} = A_n\psi(n+1)+O(1)\sum_{k=n+2}^{\infty}\psi(k) =$$

$$= \frac{16}{\pi^2}\psi(n+1) + O(1)\left(\frac{\psi(n+1)}{n}+\sum_{k=n+2}^{\infty}\psi(k)\right). \tag{18}$$

Теорему доведено.

Легко переконатись, що для ядер вигляду

$$\Psi(t) = \Phi_{\alpha, r, \overline{\beta}}(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\varphi(k)e^{-\alpha k^r}\cos\left(kt-\frac{\beta_k\pi}{2}\right), \quad \alpha>0, \quad r>1, \tag{19}$$

де $\{\varphi(k)\}_{k=1}^{\infty}$ — довільні незростаючі послідовності додатних дійсних чисел, $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$ — довільні послідовності дійсних чисел, виконуються всі умови теореми і, отже, має місце наступне твердження.

Наслідок. *Якщо клас* $C_1^{\overline{\Psi}}$ *породжується ядром вигляду* (19), *то при* $n \to \to \infty$ *справджується асимптотична рівність*

$$\tilde{\varepsilon}_n\left(C_1^{\overline{\Psi}}\right)_{L_1} = \varphi(n+1)e^{-\alpha(n+1)^r}\left(\frac{16}{\pi^2} + \frac{O(1)}{n}\right),$$

в якій величина $O(1)$ *рівномірно обмежена відносно параметрів* α, r, n *та послідовностей* $\varphi(k)$ *і* β_k.

Зауваження. Для деяких класів функцій невеликої гладкості (зокрема, W_1^r, $r=2$) асимптотично точні оцінки наближень інтерполяційними многочленами $\tilde{S}_n(f,x)$ у L_1-метриці отримано в [5].

1. *Степанец А. И.* Скорость сходимости рядов Фурье на классах $\overline{\psi}$интегралов // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 8. – С. 1069 – 1113.
2. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2-х т. – М.: Мир, 1965. – Т. 2. – 537 с.
3. *Никольский С. М.* Оценки остатка суммы Фейера для периодических функций, имеющих ограниченную производную // Докл. АН СССР. – 1941. – **31**, № 3. – С. 210 – 214.
4. *Никольский С. М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Математика. – 1946. – **10**, № 3. – С. 207 – 256.
5. *Моторный В. П.* Приближение периодических функций интерполяционными многочленами в L_1 // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 6. – С. 781 – 786.

Одержано 03.09.98