УДК 519.21

В. С. Королюк (Ін-т математики НАН України, Київ)

КОМЕНТАРІ ДО СТАТТІ „ТВОРЧИЙ ВНЕСОК В. С. КОРОЛЮКА В РОЗВИТОК ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ”

1. Асимптотичні розклади для критеріїв згоди Колмогорова та Смірнова спочатку були побудовані без урахування впливу примежового шару [4–7]. Згодом, коли з'явились результати китайського математика Чжан Лі-цяня, який, користуючись точними формулами для розподілів Колмогорова та Смірнова, побудував перші три члени асимптотичного розкладу, я зрозумів, що треба шукати додаткові члени асимптотики, пов'язані з впливом ефекту перестрибу через границі.

Важко тепер пояснити, чому саме роботи М. І. Вішика, Л. А. Люстерника привернули мою увагу, адже в цих роботах виродження граничних умов означало лише втрату додаткових значень старших похідних. Проте основна ідея необхідності побудови примежових шарів була незаперечною. Основна проблема полягала в тому, як побудувати розщеплення вихідного оператора P на функціях в околі границі області. Тут в пригоді стали результати М. Г. Крейна з теорії інтегральних рівнянь типу згортки на півосі. Факторизація символу різницевого оператора P у вигляді $P(\lambda) = \lambda^{\hat{-}} P_+(\lambda) P_-(\lambda)$, де символи $P_\pm(\lambda)$ визначають різницеві оператори на півосі, дала можливість побудувати рівняння типу згортки на півосі для примежових шарів з додатковими умовами на від'ємній півосі (див. [3]). При цьому мені довелось уточнити схему розв'язку інтегральних рівнянь на півосі з урахуванням наявності нулів символу оператора. Так було створено метод послідовного вичерпування нев'язок в асимптотичному аналізі граничних задач для випадкових блукань спочатку в схемі Бернуллі [8], а потім і для процесів з незалежними приростами [15, 16].

2. Метод потенціалу в граничних задачах для складного пуассонівського процесу був створений при побудові математичної моделі електронної активності нейронів головного мозку. Відомий фізіолог П. Г. Костюк разом зі своїми учнями звернувся до мене з пропозицією: створити математичну модель, яка б пояснювала особливості частотної активності нейронів у різних фізичних станах.

В результаті спільних обговорень було запропоновано більш-менш очевидну модель, згідно з якою електронна активність нейронів описується складним пуассонівським процесом з додатними стрибками (імпульсами заряду) та негативним лінійним зсувом (поступовим розрядом). Істотною особливістю моделі були граничні умови: нейрон випромінює імпульс, коли його заряд досягає певного значення T, та додаткова очевидна умова — заряд нейрона не може бути від'ємним.

Так виникла математична задача знаходження розподілу ймовірності моменту досягнення додатного рівня T складним пуассонівським процесом з негативним зсувом при наявності затримуючого екрана на нульовому рівні.

Перші спроби розв'язання такої задачі були невдалими. Шуканий розподіл визначався ітераційно, що було недоцільно для якісного та й кількісного аналізу. Спроби асимптотичного аналізу також були невдалими.

Тепер важко пояснити, чому я вирішив використати факторизацію символу відповідного оператора (8) для побудови точного розв'язку рівняння (7). Мабуть попередній досвід в асимптотичному аналізі випадкових блукань підказував можливість ефективного розв'язку і більш складної задачі (9), (10).

Успіх був вражаючим. Потенціал визначається перетворенням Лапласа

$$\tilde{R}(s) = K^{-1}(s), \quad \operatorname{Re} s > 0,$$

аналітичним продовженням символу на додатну півплощину.

І досі мені не зрозуміло, чому $K^{-1}(s)$, $\operatorname{Re} s = 0$, є символом оберненого оператора L^{-1} на всій осі, а $K^{-1}(s)$, $\operatorname{Re} s > 0$, є символом оберненого оператора L_+^{-1} на додатній півосі?

Відповідь на це питання міститься в напівлокальності оператора L. А може існує більш чітке пояснення?

Так чи інакше, та побудова потенціалу і резольвенти породжуючого оператора напівнеперервних процесів з незалежними просторами виявилась ефективним методом побудови точних зображень для граничних функціоналів [25, 27–29].

Особливо мені подобається гранична теорема 2 [25] (§3.8), в якій поведінка часу досягнення віддаленого рівня $T \to \infty$ повністю описується в трьох можливих випадках. Мені здається, що результат цієї теореми можна трактувати як біологічний закон поведінки нейронів. При інтенсивному заряді (позитивна течія) нейрон випромінює імпульс з відповідною частотою, що означає передачу певної інформації. При незначних зарядах (негативна течія) нейрон випромінює імпульс з показниковим розподілом інтервалів, що означає „я — живий". Нарешті, існує ще перехідний режим (нульова течія), в якому нейрон випромінює заряди в *хаотичному* режимі, що відповідає поведінці вінерового процесу із затримуючим екраном.

Якщо хочете, це можна узагальнити інтерпретацією цієї теореми до філософського рівня:„Від порядку до непередбачeності через хаос і vice versa".

3. Подальше розвинення методу потенціалу привело до вивчення граничних задач для напівмарковських блукань. На жаль, в цій більш загальній схемі можливості методу побудови розв'язків рівняння (17) досить обмежені. Проте виявляється, що метод фазового укрупнення застосовний в асимптотичному аналізі для напівмарковських блукань. Залишається поки що загадковим найбільш цікавий випадок — „від'ємної течії", коли граничний розподіл моменту досягнення віддаленого рівня буде показниковим. Але ж з яким параметром інтенсивності? На це питання відповіді немає.

4. Наукова співдружність з Ю. В. Боровських, учнем Ю. В. Линніка, займає особливе місце в моїй творчій біографії. Результат 20-річної співдружності — 8 монографій з математичної статистики, з яких 3 видані англійською мовою. Тільки одна з них — „Теорія U-статистик" — була перевидана англійською, інші дві фактично заново написані англійською. Найбільш цікавою є історія з появою монографії „Случайные перманенты" (Київ: Ін-т математики НАН України, 1993).

По дорозі в Швецію у 1991 р., мою першу особисту подорож у капіталістичну державу, я зустрівся в Ленінграді з Юрієм Васильовичем, і ми обговорили перспективи принципово нового підходу в аналізі U-статистик, як спеціального типу симетричних статистик, які в загальній формі описуються у вигляді перманентів матриць з випадковими елементами. Процес підготовки монографії ускладнювався тим, що Юрій Васильович намагався втиснути якомога більше результатів, а я відстоював найпростішу схему з мінімальними ускладненнями. В результаті монографія має лише 135 сторінок замість трьохсот. Англійський варіант книги значно розширений.

Мені здається, що увага до цієї книги ще недостатня. В ній закладені аналітичні основи аналізу симетричних статистик, які ще знайдуть нові застосування. Я можу послатись на нашу останню спільну монографію „Martingale approximation" (VSP, 1997), в якій розглядається пуассонівська апроксимація випадкових перманентів, що має цікаві застосування в задачах фінансової математики.

Інтуїція мені підказує, що узагальнення випадкових перманентів з елементами, що набувають значень у функціональному просторі з імовірнісною мірою, може бути ефективним інструментом наближення стохастичних функціоналів, що є об'єктами вивчення у сучасній статистичній фізиці. Проте від евристичних тверджень до строгих висновків — дистанція часом довга і складна.

5. Теорія випадкових еволюцій та її застосування, що розвивалась у відділі теорії ймовірностей Інституту математики НАН України останні 20 років, потребує окремого аналізу, який я планую викласти в своїй науковій біографії. Ця тематика невичерпна. Зараз я працюю над проблемою пуассонівської апроксимації марковських адитивних семімартингалів з напівмарковськими перемиканнями, що може бути застосовано в сучасних проблемах фінансової та актуарної математики.

Попередні результати надихають мене на оптимістичний лад. На жаль, я не маю зараз молодих учнів в Україні. Та, як кажуть в народі: „І буде день, і буде сонце, і буде хліб на столі".

Одержано 17.04.2000