УДК 519.21

М. С. Братійчук (Сілез. техн. ун-т, Польща)

ТОЧНІ ФОРМУЛИ ДЛЯ СИСТЕМИ ОБСЛУГОВУВАННЯ ТИПУ $E^{\theta}/G/1/N$

We investigate $E^{\theta}/G/1/N$-type queuing systems with a limited queue. The investigation is based on the potential method proposed by V. S. Korolyuk.

Досліджуються системи обслуговування типу $E^{\theta}/G/1/N$ з обмеженою чергою. Дослідження базується на методі потенціалу, запропонованому В.С. Королюком.

1. Вступ. Розглянемо систему обслуговування типу $E^{\theta}/GI/1/N$, яка описується таким чином [1, с. 148]. Замовлення надходять групами згідно з пуассонівським процесом з параметром λ, розмір n-ї групи θ_n не залежить від моментів надходження і $a_i = \mathrm{P}\{\theta_n = i\}$, $i = 0, 1, \ldots$. Обслуговуючий пристрій приймає замовлення по одному і працює у відповідності з дисципліною „перший прийшов — перший обслужився". Час обслуговування має розподіл $F(x)$, $F(0) = 0$, і не залежить від решти параметрів системи. Обслужене замовлення залишає систему, а прилад негайно розпочинає обслуговування наступного. Необслужені замовлення утворюють чергу, причому черга всередині окремої групи може бути організована довільним чином, і характеристики, які будуть розглядатися в цій статті, не залежать від способу її організації. Одночасно в системі не може бути більше ніж N замовлень. Тому якщо в момент надходження n-ї групи в черзі є ξ замовлень, то лише $\min\{N-1-\xi, \theta_n\}$ замовлень з цієї групи (довільних) приєднується до черги, а решта втрачається. Введемо такі поняття: $\xi(t)$ — кількість замовлень в системі в момент часу t; τ — довжина першого інтервалу зайнятості; $S(t)$ — кількість замовлень, які були обслужені на інтервалі $[0, t]$; $L(t)$ — кількість замовлень, які були втрачені на інтервалі $[0, t]$; $S(\tau)$ і $L(\tau)$ — відповідно кількість замовлень, обслужених і втрачених на інтервалі зайнятості; $T(t)$ — залишковий час обслуговування в момент t; W_k — час, який потрібно чекати k-й групі до початку обслуговування першого замовлення з цієї групи; $W(t)$ — віртуальний час чекання (тобто час чекання на початок обслуговування замовлення, якби воно прийшло в момент t); $\hat{\tau}$ — час до втрати першого замовлення (або групи замовлень).

Нас цікавлять точні формули для розподілів перерахованих вище характеристик. Деякі з них вже досліджувались. Відмітимо лише роботу [2], в якій наведено точні формули (без доведення) для характеристичних функцій періоду зайнятості, часу до втрати першого замовлення та стаціонарного розподілу довжини черги. В роботі [3] отримано точну формулу для характеристичної функції для $\hat{\tau}$, але для системи $GI/E/1/N$, що значно простіше. При цьому автори використали метод потенціалу, ідеями якого ми користуємося і в наших дослідженнях.

Вивчення всіх наведених функціоналів проводиться за єдиною методикою, яка базується на методі потенціалу, запропонованому В.С. Королюком [4–6]. Тому лише для одного з них (довжини черги на періоді зайнятості) доведення подається більш-менш докладно, а для решти обмежимося короткими коментарями.

Для $\operatorname{Re} s > 0$, $|z| \le 1$ позначимо

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dF(x), \qquad \theta(z) = \sum_{l=0}^{\infty} z^l a_l, \qquad \overline{a}_n = \sum_{i=n}^{\infty} a_i .$$

Символи E_n, P_n означають відповідно умовне математичне сподівання та умов-

$$\varphi(n) = \varphi(N-1), \quad n \geq N-1. \tag{5}$$

Перетворення $\tilde{\varphi}(n) \overset{\text{def}}{=} \varphi(N-1-n) - \varphi(N-1)$ зводить (4), (5) до

$$\begin{gathered} \nu \sum_{i=-1}^{\infty} \tilde{\varphi}(n-i) p_i - \tilde{\varphi}(n) = \Psi_n(N), \quad 0 \leq n \leq N-2, \\ \tilde{\varphi}(n) = 0, \quad n \leq 0, \end{gathered} \tag{6}$$

де

$$\Psi_n(N) = \varphi(N-1)\left(1 - q_{N-n-1} - \nu \sum_{i=-1}^{n-1} p_i\right) - g_{N-n-1}.$$

Згідно з [5, с. 197], загальний розв'язок рівняння в (6) має вигляд

$$\tilde{\varphi}(n) = C\tilde{R}_{n+1}(\mu) - \nu^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{R}_{n-k}(\mu) \Psi_k(N), \quad \mu = \nu^{-1} - 1, \tag{7}$$

де послідовність $\tilde{R}_k(\mu)$, $k = 1, 2, \ldots$, така, що

$$\sum_{k=1}^{\infty} z^k \tilde{R}_k(\mu) = (k(z) - 1 - \mu)^{-1} \tag{8}$$

для достатньо малих z. Для $\mu = \nu^{-1} - 1$ можемо перепозначити $\tilde{R}_l\left(\nu^{-1} - 1\right) \overset{\text{def}}{=}$ $\overset{\text{def}}{=} R_l(\nu)$ і тоді (8) набере вигляду (3). Тому в (7) замість $\tilde{R}_l(\mu)$ будемо писати $R_l(\nu)$, яке визначається з (3). Тепер загальний розв'язок рівняння в (6) має вигляд

$$\tilde{\varphi}(n) = CR_{n+1}(\nu) - \nu^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} R_{n-k}(\nu) \Psi_k(N).$$

З умови $\tilde{\varphi}(0) = 0$ отримуємо $C = 0$ і тому

$$\tilde{\varphi}(n) = \nu^{-1} \varphi(N-1) \sum_{k=0}^{n-1} R_{n-k}(\nu) b_{N-k-1}(\nu) - \nu^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} R_{n-k}(\nu) g_{N-1-k},$$

звідки легко випливає (2).

3. Довжина черги і період зайнятості. Введемо спочатку необхідні позначення. Нехай послідовності $p_i(s)$, $q_i(s)$, $\operatorname{Re} s \geq 0$, задаються співвідношеннями

$$\begin{gathered} \sum_{i=-1}^{\infty} z^i p_i(s) = \frac{f(s + \lambda(1 - \theta(z)))}{sf(s)}, \\ \sum_{i=0}^{\infty} z^i q_i(s) = \frac{1 - f(s + \lambda(1 - \theta(z)))}{f(s)(s + \lambda(1 - \theta(z)))}. \end{gathered} \tag{9}$$

Неважко зрозуміти, що $p_i(s)$ з $s \geq 0$ можна інтерпретувати як розподіл стрибків деякого неперервного знизу випадкового блукання і нехай $R_k(s)$, $k = 1, 2, \ldots$, — резольвента цього блукання, тобто

$$\sum_{k=1}^{\infty} z^k R_k(s) = z f(s)(f(s+\lambda(1-\theta(z)))-z)^{-1} \tag{10}$$

для достатньо малих z.

Для $N > 1$ позначимо

$$g_n(s,k) \overset{\text{def}}{=} I\{n \le k < N\} q_{k-n}(s) + I\{k=N\} \sum_{i=N-n}^{\infty} q_i(s),$$

$$Q_n(N,s) = \frac{f(s)+(1-f(s))\sum_{l=1}^{N-1-n} R_l(s)}{f(s)+(1-f(s))\sum_{l=1}^{N-1} R_l(s)},$$

де $I\{\cdot\}$ позначає індикаторну функцію, а оператор $Q(\mu,\nu,f)$ для послідовності f_l, $l=0, 1, \ldots,$ означимо так:

$$Q(\mu,\nu,f) = \sum_{l=1}^{N-1} R_l(\mu) f_l - \nu \sum_{l=0}^{N-1} a_i \sum_{l=i+1}^{N-1} R_{l-i}(\mu) f_l. \tag{11}$$

Покладемо

$$V(n,k,s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \mathrm{P}_n\{\xi(t)=k, \tau > t\}\, dt,$$

$$\hat{V}(n,k,s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \mathrm{P}_n\{\xi(t)=k\}\, dt.$$

Теорема 2. *Справедливі зображення*

$$V(n,k,s) = Q_n(N,s) \sum_{l=1}^{N-1} R_l(s) g_l(s,k) - \sum_{l=n+1}^{N-1} R_{l-n}(s) g_l(s,k) \tag{12}$$

для $1 \le n \le N-1$ *і*

$$V(N,k,s) = \frac{f^2(s)\sum_{l=1}^{N-1} R_l(s) g_l(s,k)}{f(s)+(1-f(s))\sum_{l=1}^{N-1} R_l(s)} + I\{k=N\}\frac{1-f(s)}{s}. \tag{13}$$

Для довжини черги в довільний момент часу маємо

$$\hat{V}(n,k,s) = \frac{(\lambda+s)Q(s,\theta,g)+\lambda I\{k=N\}\overline{a}_N(1-f(s))s^{-1}+I\{k=0\}}{(1-f(s))\left((\lambda+s)Q\left(s,\theta,\overline{1}\right)+\lambda f(s)\overline{a}_N\right)+sf(s)} \times$$
$$\left(f(s)+(1-f(s))\sum_{l=1}^{N-n-1} R_l(s)\right) - \sum_{l=n+1}^{N-1} R_{l-n}(s) g_l(s,k), \tag{14}$$

де $\theta = \lambda(\lambda+s)^{-1}$ *і* $\overline{1}$ *означає послідовність, тотожно рівну* 1.

Наслідок 1 [2]. *Для періоду зайнятості справедливі зображення*

$$\mathrm{E}_n e^{-s\tau} = \frac{f(s)+(1-f(s))\sum_{l=1}^{N-n-1} R_l(s)}{f(s)+(1-f(s))\sum_{l=1}^{N-1} R_l(s)}$$

для $1 \le n \le N-1$ *і*

$$E_N e^{-s\tau} = \frac{f^2(s)}{f(s) + (1 - f(s))\sum_{l=1}^{N-1} R_l(s)}.$$

Доведення. Для функції

$$v(n,k,t) = P_n\{\xi(t) = k, \tau > t\}, \qquad t \ge 0, \quad 1 \le n \le N-1,$$

з формули повної ймовірності випливає

$$v(n,k,t) = \sum_{l=0}^{N-n-1} \int_0^t P\{\eta(u) = l\} v(n + l - 1, k, t - u)\, dF(u) +$$

$$+ \sum_{l=N-n}^{\infty} \int_0^t P\{\eta(u) = l\} v(N-1, k, t-u)\, dF(u) +$$

$$+ I\{n \le k < N\} P\{\eta(t) = k - n\}(1 - F(t)) +$$

$$+ I\{k = N\} P\{\eta(t) \ge N - n\}(1 - F(t)), \tag{15}$$

і, очевидно,

$$v(0,k,t) = 0, \quad t \ge 0. \tag{16}$$

З (15) для функції $V(n) \equiv V(n,k,s)$ отримуємо

$$V(n) = \sum_{l=0}^{N-n-1} V(n + l - 1) \int_0^\infty e^{-st} P\{\eta(t) = l\}\, dF(t) +$$

$$+ \sum_{l=N-n}^{\infty} V(N-1) \int_0^\infty e^{-st} P\{\eta(t) = l\}\, dF(t) +$$

$$+ I\{n \le k \le N\} \int_0^\infty e^{-st} P\{\eta(t) = k - n\}(1 - F(t))\, dt +$$

$$+ I\{k = N\} \int_0^\infty e^{-st} P\{\eta(t) \ge N - n\}(1 - F(t))\, dt, \tag{17}$$

а з (16) випливає

$$V(0) = 0. \tag{18}$$

З (17) одержуємо

$$V(n) - f(s) \sum_{i=-1}^{N-n-2} V(n+i) p_i(s) - f(s) \overline{p}_{N-n-1}(s) V(N-1) = f(s) g_n(s,k) \tag{19}$$

для $1 \le n \le N-1$ з граничною умовою (18) і

$$V(N) = f(s) V(N-1) + I\{k = N\} \frac{1 - f(s)}{s}. \tag{20}$$

Згідно з (2) маємо таке зображення для розв'язку рівняння (19):

$$V(n) = \left(1 + \left(f^{-1}(s) - 1\right) \sum_{l=1}^{N-n-1} R_l(s)\right) V(N-1) - \sum_{l=n+1}^{N-1} R_{l-n}(s) g_l(s,k). \tag{21}$$

Використовуючи граничну умову (18), отримуємо

$$V(N-1) = \frac{\sum_{l=1}^{N-1} R_l(s) g_l(s,k)}{1+\left(f^{-1}(s)-1\right)\sum_{l=1}^{N-1} R_l(s)},$$

звідки з урахуванням (21) одержуємо (12). Формула (13) випливає з (20).

Щоб отримати зображення для характеристичної функції періоду зайнятості, потрібно знайти $\sum_{k=1}^{N}$ в обох частинах формули (12) (чи (13)), а потім скористатися рівністю

$$\mathrm{E}_n e^{-s\tau} = 1 - s\int_0^{\infty} e^{-st}\mathrm{P}_n\{\tau > t\}\,dt.$$

Знайдемо тепер розподіл довжини черги в довільний момент часу. Як і вище, для функції $\hat{V}(n) \equiv \hat{V}(n,k,s)$ отримуємо рівняння

$$\hat{V}(n) - f(s)\sum_{i=-1}^{N-n-2} \hat{V}(n+i)p_i(s) - f(s)\overline{p}_{N-n-1}(s)\hat{V}(N-1) = f(s)g_n(s,k) \qquad (22)$$

для $1 \le n \le N-1$ з такими самими значеннями для $p_i(s)$, $g_n(s,k)$. Гранична умова (20) буде такою самою з заміною V на $\hat{V}$, а замість (18) будемо мати

$$\hat{V}(0) = \frac{\lambda}{\lambda+s}\sum_{i=0}^{N-1} a_i \hat{V}(i,k,s) + \frac{\lambda \overline{a}_N f(s)\hat{V}(N-1)}{\lambda+s} + \frac{I\{k=0\}}{\lambda+s} +$$

$$+ \frac{\lambda I\{k=N\}\overline{a}_N(1-f(s))}{s(\lambda+s)}. \qquad (23)$$

Згідно з (2) зображення для загального розв'язку рівняння (22) знову задається формулою (21). Враховуючи граничну умову (23), маємо

$$\hat{V}(N-1) = \frac{(\lambda+s)Q(s,\theta,g) + \lambda I\{k=N\}\overline{a}_N(1-f(s))s^{-1} + I\{k=0\}}{\left(f^{-1}(s)-1\right)(\lambda+s)Q\left(s,\theta,\overline{1}\right) + s + \lambda\overline{a}_N(1-f(s))},$$

де $\theta = \lambda(\lambda+s)^{-1}$, що з урахуванням (21) приводить до (14).

4. Час чекання. Нехай тепер $R_k(\mu)$, $k = 1, 2, \ldots$, задається рівністю

$$\sum_{l=1}^{\infty} z^l R_l(\mu) = z f(\lambda(1-\mu))(f(\lambda(1-\mu\theta(z))) - z)^{-1}$$

для достатньо малих z. Розглянемо спочатку випадкову величину W_k. Позначимо

$$G_n(k,s) = \frac{I\{k \ge 2\}\lambda^2}{\lambda - s}\sum_{j=0}^{N-n-1} f^{n+j-1}(s)a_j^{k*} \times$$

$$\times \int_0^{\infty}(1-F(u))\int_0^{u}\frac{(\lambda v)^{k-2}}{(k-2)!}e^{-\lambda v}\left(\lambda e^{-\lambda(u-v)} - s e^{-s(u-v)}\right)dv\,du +$$

$$+ \frac{I\{k=1\}\lambda}{\lambda - s} f^{n-1}(s)\int_0^{\infty}(1-F(u))\left(\lambda e^{-\lambda u} - s e^{-su}\right)du,$$

$$\hat{G}_n(\mu,s) = \sum_{k=1}^{\infty}\mu^k G_n(k,s), \qquad f(\lambda,\mu) = f^{-1}(\lambda(1-\mu)).$$

Теорема 3. *Для* $1 \le n \le N-1$, $\operatorname{Re} s > 0$, $|\mu| \le 1$ *маємо*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \mathrm{E}_n e^{-sW_k} = \frac{\left(f(\lambda,\mu) Q\left(\mu,\mu,\hat{G}(\mu,s)\right) + \mu\right)\left(1 + (f(\lambda,\mu)-1)\sum\limits_{l=1}^{N-n-1} R_l(\mu)\right)}{(f(\lambda,\mu)-1)\left(Q(\mu,\mu,\overline{1}) + \mu \overline{a}_N\right) + 1 - \mu} -$$

$$- f(\lambda,\mu) \sum_{l=n+1}^{N-1} R_{l-n}(\mu) \hat{G}_l(\mu,s), \tag{24}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \mathrm{E}_N e^{-sW_k} = \frac{Q\left(\mu,\mu,\hat{G}(\mu,s)\right) + \mu f^{-1}(\lambda,\mu)}{(f(\lambda,\mu)-1)\left(Q(\mu,\mu,\overline{1}) + \mu \overline{a}_N\right) + 1 - \mu}.$$

Доведення. Для функції

$$\hat{\varphi}(\mu,n) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \mathrm{E}_n e^{-sW_k}, \qquad |\mu| < 1,$$

маємо рівняння

$$\hat{\varphi}(\mu,n) - f(\lambda(1-\mu)) \sum_{i=-1}^{N-n-2} p_i(\mu) \hat{\varphi}(\mu, n+j) -$$

$$- f(\lambda(1-\mu)) \overline{p}_{N-n-1}(\mu) \hat{\varphi}(\mu, N-1) = \hat{G}_n(\mu,s)$$

на відрізку $1 \le n \le N-1$ з граничними умовами

$$\hat{\varphi}(\mu,N) = f(\lambda(1-\mu)) \hat{\varphi}(\mu,N-1),$$

$$\hat{\varphi}(\mu,0) = \mu\left(\sum_{i=0}^{N-1} a_i \hat{\varphi}(\mu,i) + f(\lambda(1-\mu)) \hat{\varphi}(\mu,N-1) \overline{a}_N + 1\right).$$

Потрібний результат тепер випливає з теореми 1.

Випадкова величина $W(t)$ розглядається аналогічно.

Теорема 4. *Для* $1 \le n \le N-1$

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \mathrm{E}_n e^{-\mu W(t)} dt = \frac{\left((\lambda+s) Q\left(s,\theta,\hat{D}(\mu,s)\right) + f(s)\right)\left(1 + \left(f^{-1}(s)-1\right)\sum_{l=1}^{N-n-1} R_l(s)\right)}{(1-f(s))\left((\lambda+s) Q\left(s,\theta,\overline{1}\right) + \lambda \overline{a}_N f(s)\right) + s f(s)}$$

$$- f^{-1}(s) \sum_{l=n+1}^{N-1} R_{l-n}(s) \hat{D}_l(\mu,s), \tag{25}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \mathrm{E}_N e^{-\mu W(t)} dt = \frac{(\lambda+s) Q\left(s,\theta,\hat{D}(\mu,s)\right) + f(s)}{\left(f^{-1}(s)-1\right)\left((\lambda+s) Q\left(s,\theta,\overline{1}\right) + \lambda \overline{a}_N f(s)\right) + s},$$

де

$$\theta = \lambda(\lambda+s)^{-1}, \qquad \hat{D}_n(\mu,s) = \int_0^{\infty} e^{-st} D_n(\mu,t)\, dt,$$

$$D_n(\mu,t) = \sum_{j=0}^{N-n-1} f^{n+j-1}(\mu) \mathrm{P}\{\eta(t) = j\} \int_t^{\infty} e^{-\mu(u-t)} dF(u) +$$

$$+ f^{N-1}(\mu) \mathrm{P}\{\eta(\mathrm{t}) \ge N-n\} \int_t^{\infty} e^{-\mu(u-t)} dF(u).$$

5. Число обслужених та втрачених замовлень та залишковий час обслуговування. Нехай $p_i(s)$ задаються співвідношеннями (9) і для $\operatorname{Re} s > 0$, $|\nu|,\ |z| \le 1$ позначимо

$$\hat{B}_n(s,\nu) = \int_0^{\infty} e^{-st} B_n(t,\nu)\,dt,$$

$$B_n(t,\nu) = \sum_{j=0}^{N-n-1} \mathrm{P}\{\eta(t)=j\} \int_t^{\infty} e^{-\mu(u-t)} dF(u) +$$

$$+ \sum_{j=N-n}^{\infty} \nu^{j+n-N} \mathrm{P}\{\eta(t)=j\} \int_t^{\infty} e^{-\mu(u-t)} dF(u),$$

$$d_k(s,\nu) = 1 - zf(s) \sum_{j=-1}^{k-1} p_j(s) - zf(s) \sum_{j=k}^{\infty} \nu^{j-k} p_j(s).$$

Теорема 5. *Мають місце наступні зображення:*

$$\mathrm{E}_n\left(e^{-s\tau} z^{S(\tau)} \nu^{L(\tau)}\right) = \frac{zf(s) + \sum_{l=n+1}^{N-1} R_{l-n}(zf(s))\, d_l(s,\nu)}{zf(s) + \sum_{l=1}^{N-1} R_l(zf(s))\, d_l(s,\nu)}, \qquad 1 \le n \le N-1,$$

$$\mathrm{E}_N\left(e^{-s\tau} z^{S(\tau)} \nu^{L(\tau)}\right) = \frac{zf(s+\lambda(1-\theta(\nu)))}{zf(s) + \sum_{l=1}^{N-1} R_l(zf(s))\, d_l(s,\nu)}.$$

Тепер послідовність $R_k(z(f(s)))$ така, що

$$\sum_{k=0}^{\infty} t^k R_k(zf(s)) = \frac{zf(s)t}{zf(s+\lambda(1-\theta(t))) - t}$$

для достатньо малих t.

Зображення відповідних характеристичних функцій для $T(t)$, $S(t)$ та $L(t)$ є досить громіздкими і тому ми їх не наводимо. Обмежимося випадком системи $E/G/1/N$, тобто коли замовлення надходять по одному. Нехай, як і раніше, $\theta = \lambda(\lambda+s)^{-1}$.

Теорема 6. *Для* $1 \le n \le N-1$

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \mathrm{E}_n\left\{e^{-\mu T(t)} z^{S(t)} \nu^{L(t)}\right\} dt = -z^{-1} f^{-1}(s) \sum_{l=n+1}^{N-1} R_{l-n}(s) \hat{B}_l(s,\nu) +$$

$$+ \frac{\left((\lambda+s) Q\left(s,\theta,\hat{B}(s,\nu)\right) + zf(s)\right)\left(1 + z^{-1} f^{-1}(s) \sum_{l=n+1}^{N-1} R_{l-n}(s) d_l(s)\right)}{(\lambda+s) Q\left(s,\theta,\hat{d}(s,\nu)\right) + zsf(s)},$$

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \mathrm{E}_N\left\{e^{-\mu T(t)} z^{S(t)} \nu^{L(t)}\right\} dt = \frac{f(s+\lambda(1-\nu)) - f(\mu)}{\mu - s - \lambda(1-\nu)} +$$

$$+ \frac{zf(s+\lambda(1-\nu))\left((\lambda+s) Q\left(s,\theta,\hat{B}(s,\nu)\right) + zf(s)\right)}{(\lambda+s) Q\left(s,\theta,\hat{d}(s,\nu)\right) + zsf(s)}.$$

***Наслідок* 2.** *Для залишкового часу обслуговування в момент* t *маємо*

$$\int_0^\infty e^{-st}\mathrm{E}_n e^{-\mu T(t)}dt = \frac{(\mu-s)^{-1}(f(s)-f(\mu))(\lambda+s)Q\left(s,\theta,\overline{1}\right)+f(s)}{(1-f(s))(\lambda+s)Q\left(s,\theta,\overline{1}\right)+f(s)} \times$$

$$\times \left(1+f^{-1}(s)-1\right)\sum_{l=1}^{N-n-1}R_l(s)-\frac{f(s)-f(\mu)}{f(s)(\mu-s)}\sum_{l=1}^{N-n-1}R_l(s), \qquad 1\le n\le N-1. \tag{26}$$

В цьому наслідку і в теоремі 6 функція $R_k(s)$ означена формулою (10), де замість $\theta(z)$ потрібно записати z.

Доведення. Позначимо

$$\hat{\omega}(n) = \int_0^\infty e^{-st}\mathrm{E}_n\left\{e^{-\mu T(t)}z^{S(t)}\nu^{L(t)}\right\}dt,$$

і для $1\le n\le N$ маємо

$$\hat{\omega}(n) - zf(s)\sum_{j=-1}^{N-n-2}p_i(s)\hat{\omega}(n+i) -$$

$$- zf(s)\sum_{j=N-n-1}^{\infty}\nu^{j+n-N+1}p_j(s)\hat{\omega}(N-1) = \hat{B}_n(s).$$

Крім того,

$$(\lambda+s)\hat{\omega}(0,s) = \lambda\hat{\omega}(1,s)+1. \tag{27}$$

Використовуючи теорему 1 та граничну умову (27), отримуємо потрібний результат.

6. Час до втрати першого замовлення. Нехай $\hat{\tau}$ — час до втрати першого замовлення, тобто $\hat{\tau}=\inf\{t:\xi(t)>N\}$.

Теорема 7. *Для* $1\le n\le N-1$

$$\mathrm{E}_n e^{-s\hat{\tau}} = \frac{f^{-1}(s)Q(s,\theta,g(s))+\lambda\left(a_N g_N(s)+\overline{a}_{N+1}\right)}{s-\lambda\overline{a}_N+f^{-1}(s)(\lambda+s)Q(s,\theta,g(s))-\lambda a_N f(s)p_{-1}(s)} \times$$

$$\times\left(1+f^{-1}(s)\sum_{n+1}^{N-1}R_{k-n}(s)q_k(s)\right)-f^{-1}(s)\sum_{n+1}^{N-1}R_{k-n}(s)g_k(s),$$

$$\mathrm{E}_N e^{-s\hat{\tau}} = \frac{\left(f^{-1}(s)Q(s,\theta,g(s))+\lambda\left(a_N g_N(s)+\overline{a}_{N+1}\right)\right)f(s)p_{-1}(s)}{s-\lambda\hat{a}_N+f^{-1}(s)(\lambda+s)Q(s,\theta,g(s))-\lambda a_N f(s)p_{-1}(s)} + g_N(s),$$

де $q_k(s)=1-f(s)\sum_{j=-1}^{N-k-1}p_j(s)$, *величини* $p_i(s)$, $R_k(s)$ *задаються формулами* (9), (10), *а*

$$g_n(s) = \lambda\sum_{j=0}^{N-n}\overline{a}_{N-j-n-1}\int_0^\infty e^{-su}\mathrm{P}\{\nu(u)\ge 1,\eta(u)=j\}(1-F(u))\,du.$$

Доведення. Для $\psi(n)=\mathrm{E}_n\exp(-s\hat{\tau})$ маємо рівняння

$$\psi(n) - f(s)\sum_{j=-1}^{N-n-1}p_j(s)\psi(n+j) = g_n(s), \qquad 1\le n\le N-1,$$

і

$$\psi(0) = \frac{\lambda}{\lambda+s}\left(\sum_{j=0}^{N-1} a_j\psi(j) + a_N f(s)p_{-1}(s)\psi(N-1) + a_N g_N(s) + \overline{a}_{N+1}\right).$$

Далі використовуємо теорему 1.

7. Стаціонарні характеристики. Знайдемо зображення для деяких характеристик системи, коли вона знаходиться в стаціонарному режимі. Існування стаціонарних розподілів (можливо невласних) легко виникає з того факту, що моменти надходження замовлень в порожню систему є марковськими, а блукання $\xi(t)$ відбувається на скінченному інтервалі $[0, N]$. Для знаходження потрібних нам зображень будемо використовувати наведені вище формули та теореми Таубера і Абеля.

В цьому пункті послідовність R_k, $k = 1, 2, \ldots$ (потенціал згідно з роботою [4]) задається рівністю

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k R_k = \frac{z}{f(\lambda(1-\theta(z))) - z}$$

для достатньо малих z, а оператор $Q(f)$ для послідовності $f_l, \cdot\, l = 1, 2, \ldots$, визначається формулою

$$Q(f) = \sum_{l=1}^{N-1} R_l f(l) - \sum_{l=0}^{N-1} a_i \sum_{l=i+1}^{N-1} R_{l-i} f_l.$$

Нехай $m = \int_0^{\infty} x\, dF(x)$. Із співвідношення (14) випливає наступний результат.

Теорема 8. *Для* $0 \le k \le N$ *і* $0 \le n \le N$

$$\rho_k = \lim_{t\to\infty} \mathrm{P}\{\xi(t) = k \,/\, \xi(0) = n\} = \frac{\lambda Q(g(k)) + \lambda I\{k=N\} m\overline{a}_N + I\{k=0\}}{\lambda m\left(Q(\overline{1}) + \overline{a}_N\right) + 1},$$

де $g_n(k) = g_n(k, 0)$.

В частинному випадку ймовірність знайти систему вільною в стаціонарному режимі така:

$$\rho_0 = \frac{1}{\lambda m\left(Q(\overline{1}) + \overline{a}_N\right) + 1},$$

а

$$\rho_N = \frac{\lambda Q(\overline{g}) + \lambda m\overline{a}_N}{\lambda m\left(Q(\overline{1}) + \overline{a}_N\right) + 1},$$

де

$$\overline{g}_n = \sum_{i=N-n}^{\infty} q_i$$

— стаціонарна ймовірність втрати замовлення.

Для стаціонарного часу чекання з формули (24) отримуємо

$$\mathrm{E}_n e^{-sW_\infty} = \frac{Q(t(s)) + 1}{\lambda m\left(Q(\overline{1}) + \overline{a}_N\right) + 1},$$

де

$$t_n(s) = \frac{\lambda^2}{\lambda - s} \sum_{j=0}^{N-n-1} f^{n+j-1}(s) a_j^{(k-1)*} \int_0^\infty (1 - F(u)) \int_0^\infty \frac{(\lambda v)^{k-2}}{(k-2)!} e^{-\lambda v} \times$$

$$\times \left(\lambda e^{-\lambda(u-v)} - s e^{-s(u-v)}\right) dv du +$$

$$+ \frac{\lambda f^{n-1}(s)}{\lambda - s} \int_0^\infty (1 - F(u)) \left(\lambda e^{-\lambda u} - s e^{-su}\right) du.$$

З формули (25) маємо

$$\mathrm{E}_n e^{-\mu W(\infty)} = \lambda \frac{Q\left(\hat{D}(\mu)\right) + 1}{\lambda m\left(Q(\overline{1}) + \overline{a}_N\right) + 1},$$

де

$$\hat{D}_n(\mu) = \int_0^\infty D_n(\mu, t)\, dt.$$

Для стаціонарного залишкового часу обслуговування з формули (26) випливає

$$\mathrm{P}_n\{T(\infty) < x\} = \frac{\lambda Q(\overline{1}) \int_0^x (1 - F(y))\, dy + I\{x > 0\}}{\lambda m Q(\overline{1}) + 1}.$$

1. *Прабху Н.* Стохастические процессы теории запасов. – М.: Мир, 1984. – 184 с.
2. *Каданков В. Ф.* Некоторые характеристики одноканальной системы с потерями // Аналитические методы в теории надежности. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1985. – С. 66–70.
3. *Бутко Т., Королюк В. С.* Метод потенциала в исследовании системы $GI/E/1/\infty$ // Аналитические методы в задачах теории вероятностей. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1984. – С. 16–27.
4. *Королюк В. С.* Граничные задачи для сложного пуассоновского процесса. – Киев: Наук. думка, 1975. – 138 с.
5. *Королюк В. С., Братийчук Н. С., Пирджанов Б.* Граничные задачи для случайных блужданий. – Ашхабад: Ылым, 1987. – 256 с.
6. *Гусак Д. В.* Граничні задачі для процесів з незалежними приростами на скінченних ланцюгах Маркова та для напівмарковських процесів. – Київ, 1998. – 320 с.

Одержано 24.02.99