УДК 519.21

А. А. Дороговцев (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ ПО СОГЛАСОВАННЫМ СЛУЧАЙНЫМ МЕРАМ

We consider integrals of random maps with respect to adapted random measures in $C([0;1])$.

Розглядаються інтеграли від випадкових відображень відносно узгоджених випадкових мір у $C([0;1])$.

Введение. Данная работа посвящена исследованию интегралов вида

$$\int_C F(u)\,\mu(du)\,, \tag{1}$$

где $C = C([0;1])$ — пространство непрерывных функций на $[0;1]$, μ — случайная мера на этом пространстве, F — случайное отображение пространства C в себя. Рассматриваемые случайные отображения содержат интегралы по винеровскому процессу и, как следствие, не имеют непрерывных на C модификаций. Поэтому интеграл (1) прежде всего нуждается в определении. Для того чтобы полученный интеграл имел хорошие свойства с точки зрения теории стохастических дифференциальных уравнений, случайная мера μ предполагается согласованной с потоком σ-алгебр, порожденным винеровским процессом. Для таких мер (1) удается корректно определить для широкого класса случайных отображений путем конечномерной аппроксимации. В силу согласованности случайной меры для согласованных случайных отображений при дополнительных условиях справедлива теорема Фубини

$$\int_0^1 \left(\int_C F(u,t)\,\mu(du) \right) dw(t) = \int_C \left(\int_0^1 F(u,t)\,dw(t) \right) \mu(du)$$

о перестановочности интегралов по μ и по винеровскому процессу w. Заметим, что в несколько иной ситуации теорема Фубини для стохастического интеграла Стратоновича доказана в [1].

Статья состоит из трех пунктов. В первом приведено описание случайных мер, использующихся в дальнейшем. Во втором интеграл (1) определен для конечномерных случайных мер. П. 3 посвящен общему случаю.

1. Случайные меры на пространстве $C([0;1])$. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство, $C = C([0;1])$ — пространство непрерывных функций с равномерной нормой $\|\cdot\|$. Обозначим через $\mathfrak{A}$ σ-алгебру борелевских подмножеств C.

В данной работе используется следующее определение случайной меры на C.

Определение 1. $\mu = \{\mu(\omega, \Delta);\ \omega \in \Omega,\ \Delta \in \mathfrak{A}\}$ — *случайная мера на* C, *если*:

1) *для любого* $\omega \in \Omega$ $\mu(\omega, \cdot)$ — *вероятностная мера на* $\mathfrak{A}$;

2) *для любого* $\Delta \in \mathfrak{A}$ $\mu(\cdot, \Delta)$ — *случайная величина.*

Далее, если это не будет вызывать разночтений, символ ω при записи значения случайной меры μ будем иногда опускать или писать в индексе ($\mu_\omega(\Delta)$ вместо $\mu(\omega, \Delta)$).

Следующая лемма необходима для дальнейшего изложения.

Лемма 1. *Пусть B — вещественное сепарабельное банахово пространст-*

во с нормой $|\cdot|$. *Функция* $f\colon \Omega\times C\to B$ *является* $(\mathcal{F}\times\mathfrak{A},\ \mathcal{B})$*-измеримой* ($\mathcal{B}$ — *борелевская* σ*-алгебра в* B) *и такова, что*

$$\forall\,\omega\in\Omega\colon\ \int\limits_C |f(\omega,u)|\,\mu_\omega(du) < +\infty. \tag{2}$$

Тогда интеграл Бохнера

$$\int\limits_C f(\omega,u)\,\mu_\omega(du), \qquad \omega\in\Omega,$$

является случайным элементом в B.

Доказательство. Пусть Δ — измеримое множество в $\Omega\times C$. Тогда для любого $\omega\in\Omega$ сечение

$$\Delta_\omega := \{u\colon (\omega,u)\in\Delta\}$$

является борелевским подмножеством C. Рассмотрим

$$\xi_\Delta(\omega) := \mu_\omega(\Delta_\omega), \qquad \omega\in\Omega.$$

Множество тех Δ, для которых ξ_Δ — случайная величина, образует монотонный класс и содержит все множества вида

$$\bigcup_{i=1}^n A_i\times B_i,$$

где $A_i\in\mathcal{F}$, $B_i\in\mathfrak{A}$, $i=1,\ldots,n$, $n\geq 1$. Следовательно, ξ_Δ — случайная величина для любого $\Delta\in\mathcal{F}\times\mathfrak{A}$. Из-за условия (2) и сепарабельности B достаточно проверить утверждение леммы для функции f, принимающей конечное число значений. В этом случае

$$f = \sum_{k=1}^n b_k \mathbf{1}_{\Delta_k},$$

где $\Delta_k\in\mathcal{F}\times\mathfrak{A}$, $k=1,\ldots,n$, и, следовательно, интеграл

$$\int\limits_C f(\omega,u)\,\mu_\omega(du) = \sum_{k=1}^n b_k\,\xi_{\Delta_k}(\omega)$$

является случайной величиной. Лемма доказана.

В приведенном утверждении структура пространства C не играет никакой роли. Однако возникающие в приложениях случайные функции на бесконечномерных пространствах, как правило, задаются как наборы случайных величин (элементов), зависящие от бесконечномерного параметра, т. е. вместо измеримой по совокупности аргументов функции $f\colon\Omega\times C\to B$ из предыдущей леммы имеется набор случайных элементов $\{F(u);\ u\in C\}$, связанных между собой каким-либо вероятностным условием непрерывности (например, непрерывностью по вероятности или в среднем относительно u). В такой ситуации измеримая модификация может быть выбрана различными способами, что может сказаться на значении интеграла по случайной мере. В том, что интеграл по случайной мере зависит от выбора модификации интегранты, легко убедиться, рассмотрев следующий тривиальный пример.

***Пример* 1.** Пусть $(\Omega,\mathcal{F},P)$ — отрезок $[0;1]$ с борелевской σ-алгеброй и мерой Лебега, а случайная мера μ на отрезке $[0;1]$ задана так:

$$\forall\, \omega \in [0;1]:\ \mu(\omega,\cdot) = \delta_\omega(\cdot).$$

Случайная функция $f(t) = 0,\ t \in [0;1]$, имеет, например, такие модификации:

$$f_1(\omega,t) = 0, \quad f_2(\omega,t) = 0, \quad \omega \neq t,$$

$$f_2(\omega,t) = 1, \quad \omega = t, \quad (\omega,t) \in [0;1]^2.$$

Тогда

$$\int_0^1 f_1(\omega,t)\,\mu(\omega,dt) = 0 \neq 1 = \int_0^1 f_2(\omega,t)\,\mu(\omega,dt).$$

Однако если ограничиться рассмотрением лишь непрерывных с вероятностью 1 модификаций, то подобная ситуация не возникает. Этим обстоятельством обусловлены следующие определения.

Определение 2. *Случайное отображение $F: C \to B$ — это непрерывное по вероятности соответствие, при котором каждому элементу $u \in C$ сопоставляется случайный элемент $F(u)$ в B.*

Определение 3. *Пусть L — подпространство в C такое, что*

$$\mu_\omega(L) = 1 \ (\mathrm{mod}\, \mathrm{P}).$$

Пусть случайное отображение $F: C \to B$ имеет измеримую модификацию f такую, что:

1) $\forall\, \omega \in \Omega:\ f(\omega,\cdot) \in C(L,B)$;

2) $\forall\, \omega \in \Omega:\ \int_L |f(\omega,u)|\,\mu_\omega(du) < +\infty.$

Тогда по определению

$$\int_C F(u)\,\mu_\omega(du) := \int_L f(\omega,u)\,\mu_\omega(du).$$

Случайные отображения, которые рассматриваются в данной работе, содержат стохастические интегралы по винеровскому процессу. Поэтому они могут не иметь непрерывной на C модификации, но для произвольного конечномерного подпространства существует модификация, на нем непрерывная.

***Пример* 2.** Пусть $\{w(t);\ t \in [0;1]\}$ — винеровский процесс. Случайное отображение F имеет вид

$$F(u) = \int_0^1 u(s)\,dw(s), \quad u \in C.$$

Тогда для любого конечномерного подпространства L существует модификация f_L отображения F, непрерывная на L с вероятностью 1. Однако F не имеет модификации, непрерывной на C с вероятностью 1.

В силу изложенного выше целью настоящей статьи является определение класса случайных отображений F и мер μ, для которых интеграл

$$\int_C F(u)\,\mu(du) \tag{3}$$

может быть определен как предел

$$\lim_{m\to\infty} \int_{L_m} F(u)\,\mu_m(du),$$

где μ_m — образ меры μ при отображении пространства C в себя с помощью конечномерного линейного оператора π_m, $L_m = \pi_m(C)$, а последовательность $\{\pi_m;\ m \geq 1\}$ выбрана специальным образом.

2. Согласованные случайные меры. Теорема Фубини для конечномерных согласованных случайных мер. Пусть $\{w(t);\ t \in [0;1]\}$ — винеровский процесс, $\{\mathcal{F}_t;\ t \in [0;1]\}$ — соответствующий поток σ-алгебр; считаем, что $\mathcal{F}_0$ пополнена относительно меры P. Обозначим через $\{\mathfrak{A}_t;\ t \in [0;1]\}$ естественный поток σ-алгебр в C, т. е. при $t \in [0;1]$ σ-алгебра $\mathfrak{A}_t$ порождена координатными функционалами $\{\delta_s;\ s \in [0;t]\}$. В частности, $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}$.

Определение 4. *Случайная мера* μ *называется согласованной, если при каждом* $t \in [0;1]$ *сужение* μ^t *меры* μ *на* $\mathfrak{A}_t$ *удовлетворяет определению* 1 *с заменой* $\mathcal{F}$ *на* $\mathcal{F}_t$.

Приведем следующее эквивалентное определение.

Определение 4′. *Случайная мера* μ *называется согласованной, если для любых* $s_1, \ldots, s_n \in [0;s]$ *и произвольной непрерывной ограниченной функции* $\varphi:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\int_C \varphi(u(s_1), u(s_2), \ldots, u(s_n))\, \mu(du)$$

является $\mathcal{F}_s$*-измеримой случайной величиной.*

Рассмотрим несколько примеров согласованных случайных мер, возникающих естественным образом.

***Пример* 3.** Пусть $\{\eta_k;\ k = 1, \ldots, N\}$ — согласованные случайные процессы на $[0;1]$ с непрерывными траекториями, $a_1, \ldots, a_N$ — положительные числа, в сумме равные 1. Тогда случайная мера

$$\mu = \sum_{k=1}^{N} b_k\, \delta_{\eta_k}$$

будет согласованной. Действительно, для произвольного $s \in [0;1]$ и любой непрерывной ограниченной функции $\varphi:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\int_C \varphi(u(s))\, \mu(du) = \sum_{k=1}^{N} a_k\, \varphi(\eta_k(s)).$$

***Пример* 4.** Пусть $a, b:\ \Omega \times [0;1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — функции, измеримые по совокупности переменных и такие, что:

1) $\forall\, \omega \in \Omega:\ a, b:\ C([0;1] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$;

2) $\forall\, t \in [0;1]:\ \ \forall\, r \in \mathbb{R}:\ \ a(t,r),\ b(t,r)$ — $\mathcal{F}_t$-измеримые случайные величины;

3) $\exists\, K > 0:\ \forall\, \omega \in \Omega:\ \ \forall\, t \in [0;1]:\ \forall\, r_1, r_2 \in \mathbb{R}:$

$$|a(\omega,t,r_1) - a(\omega,t,r_2)| + |b(\omega,t,r_1) - b(\omega,t,r_2)| \leq$$
$$\leq K\,|r_1 - r_2|.$$

Пусть при фиксированном $\omega \in \Omega$ μ_ω — распределение в C диффузионного процесса x_ω с начальным условием $x_\omega(0) = 0$, сносом a_ω и диффузией b_ω^2.

Тогда μ — согласованная случайная мера.

Класс согласованных случайных мер выделен по той причине, что интегрирование по ним перестановочно с интегрированием по винеровскому процессу.

Определение 5. *Случайное отображение* $F: C \to C$ *называется согласованным, если для любых* $t \in [0; 1]$ *и* $u \in C$ *выполнены условия*:

1) $F(u, t)$ — $\mathcal{F}_t$*-измеримая случайная величина*;

2) $F(u, t) = F(u_t, t) \ (\mathrm{mod}\, \mathrm{P})$, *где* $u_t(s) = u(s \wedge t)$, $s \in [0; 1]$.

Теорема 1 (теорема Фубини для согласованных конечномерных случайных мер). *Пусть* F — *согласованное случайное отображение из* C *в* C *и случайная согласованная мера* μ *на* C *таковы, что*:

1) *существуют функции* $h: [1; +\infty) \to [0; +\infty)$, *для которой* $\lim\limits_{p \to +\infty} h(p) = +\infty$, *и* $K: [1; +\infty) \to [0; +\infty)$, $h(p) \le p$:

$$\forall\, p \ge 1: \ \forall\, u, v \in C: \ \mathrm{M} \| F(u) - F(v) \|^p \le K(p) \| u - v \|^{h(p)};$$

2) *для любого* $p \ge 1$

$$\mathrm{M} \| F(0) \|^p < +\infty;$$

3) $\mathrm{M} \int\limits_C \|u\|^4 \mu(du) < +\infty$;

4) *существует конечномерное подпространство* L *в* C, *для которого*

$$\mathrm{P}\{\mu_\omega(L) = 1\} = 1 .$$

Тогда:

1) *существует модификация* F, *непрерывная на* L *с вероятностью* 1, *для которой определен интеграл*

$$\int\limits_C F(u)\, \mu(du),$$

являющийся согласованным и непрерывным случайным процессом;

2) *существует модификация случайного отображения*

$$C \ni u \mapsto \int\limits_0^1 F(u, t)\, dw(t) \in \mathbb{R},$$

непрерывная на L *с вероятностью* 1, *для которой определен интеграл*

$$\int\limits_C \left(\int\limits_0^1 F(u, t)\, dw(t) \right) \mu(du);$$

3) *справедливо равенство*

$$\int\limits_C \left(\int\limits_0^1 F(u, t)\, dw(t) \right) \mu(du) = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_C F(u, t)\, \mu(du) \right) dw(t) \ \ (\mathrm{mod}\, \mathrm{P}).$$

Доказательство. Пусть d — размерность подпространства L. Для $u \in L$ обозначим через $(u_1, \ldots, u_d)$ вектор координат u в каком-нибудь фиксированном базисе L. Тогда существуют константы $c_1, c_2 > 0$ такие, что

$$\forall\, u \in L: \quad c_1 \| u \| \le \sum_{i=1}^{d} |u_i| \le c_2 \| u \|.$$

Поэтому в силу условия 1 теоремы

$$\forall\, p \ge 1: \ \forall\, u, v \in L:$$

$$\mathrm{M} \| F(u) - F(v) \|^p \le K(p) \frac{1}{c_1^{h(p)}} \left(\sum_{i=1}^{d} |u_i - v_i| \right)^{h(p)}.$$

Для достаточно больших p таких, что $h(p) \ge 1$,

$$\forall\, u, v \in L: \ \mathrm{M} \| F(u) - F(v) \|^p \le$$

$$\le K(p) \frac{1}{c_1^{h(p)}} d^{h(p)-1} \sum_{i=1}^{d} |u_i - v_i|^{h(p)} = R(p) \sum_{i=1}^{d} |u_i - v_i|^{h(p)}. \tag{4}$$

Поскольку $h(p) \to +\infty$, $p \to +\infty$, то p можно выбрать так, чтобы $\dfrac{d}{h(p)} < 1$. Тогда из (4) согласно [2] следует существование модификации F, непрерывной на L с вероятностью 1. Проверим интегрируемость относительно меры μ. Для этого рассмотрим в L на единичном шаре с центром в 0 новое случайное поле F, заданное таким образом:

$$\tilde{F}(u) = \|u\|^{\beta} \left(F\left(\frac{u}{\|u\|^2} \right) - F(0) \right), \quad u \ne 0,$$

$$\tilde{F}(0) = 0.$$

Можно проверить, что при условии

$$\beta > 1 + \frac{h(p)}{p}$$

$\tilde{F}$ удовлетворяет соотношению

$$\forall\, u, v \in L: \ \|u\|, \|v\| \le 1:$$

$$\mathrm{M} \| \tilde{F}(u) - \tilde{F}(v) \|^p \le \tilde{K}(p, \beta) \| u - v \|^{h(p)},$$

где постоянная $\tilde{K}(p, \beta)$ зависит только от p и β. Следовательно, $\tilde{F}$ имеет непрерывную с вероятностью 1 модификацию. Полагая $\beta = 3$ (это не наилучший выбор, но достаточный для наших целей), заключаем, что исходное случайное отображение F имеет модификацию, которая непрерывна на L и удовлетворяет соотношению

$$\lim_{\|u\| \to +\infty} \frac{F(u)}{\|u\|^3} = 0 \quad (\mathrm{mod}\, \mathrm{P}).$$

В силу условия 3 теоремы с вероятностью 1

$$\int_L \|F\| \mu(du) < +\infty.$$

Следовательно, с вероятностью 1 определен интеграл Бохнера

$$\zeta = \int_L F(u) \mu(du),$$

являющийся непрерывным случайным процессом на $[0;1]$. Докажем согласованность ζ. По свойству перестановочности интеграла Бохнера и действия линейных непрерывных функционалов

$$\forall\, t \in [0;1]: \quad \zeta(t) = \delta_t\left(\int\limits_L F(u)\,\mu(du)\right) =$$

$$= \int\limits_L F(u,t)\,\mu(du) = \int\limits_C F(u,t)\,\mu(du).$$

Согласно условию теоремы можно считать, что модификация $F(u,t)$, $u \in C$, сейчас измерима относительно $\mathcal{F}_t \times \mathfrak{A}_t$. Поэтому из леммы 1 следует $\mathcal{F}_t$-измеримость $\zeta(t)$.

Таким образом, ζ — непрерывный с вероятностью 1 и согласованный случайный процесс. Следовательно, определен интеграл Ито

$$\int\limits_0^1 \zeta(t)\,dw(t) = \int\limits_0^1 \left\{\int\limits_C F(u,t)\,\mu(du)\right\} dw(t).$$

Пусть последовательность разбиений отрезка $[0;1]$ $0 = t_0^n < t_1^n < \ldots$ $\ldots < t_n^n = 1$, $n \geq 1$, такова, что

$$\max_{k=0,\ldots,n-1}(t_{k+1}^n - t_k^n) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Обозначим

$$S_n(u) = \sum_{k=0}^{n-1} F(u,t_k^n)(w(t_{k+1}^n) - w(t_k^n)), \quad n \geq 1,$$

$$S(u) = \int\limits_0^1 F(u,t)\,dw(t).$$

Согласно неравенству Бургхольдера [2] для $p \geq 1$

$\forall\, n \geq 1: \ \forall\, u, v \in C:$

$$\mathrm{M}\,|S_n(u) - S_n(v)|^p \leq K_1(p)\,\|u-v\|^{h(p)},$$

$$\mathrm{M}\,|S(u) - S(v)|^p \leq K_1(p)\,\|u-v\|^{h(p)},$$

где постоянная $K_1(p)$ зависит только от p. Кроме того, для $p \geq 1$

$\forall\, n \geq 1: \ \forall\, u \in C:$

$$\mathrm{M}\,|S_n(u)|^p \leq Q(p)\,\mathrm{M}\,\|F(u)\|^p,$$

$$\mathrm{M}\,|S(u)|^p \leq Q(p)\,\mathrm{M}\,\|F(u)\|^p,$$

где постоянная $Q(p)$ зависит только от p. Отсюда следует [2], что соответствующие непрерывные на L модификации случайных полей $\{S_n;\ n \geq 1\}$ слабо компактны в любом пространстве $C(B)$, где B — компактное подмножество L. Кроме того, построенные аналогично $\tilde{F}$ случайные поля $\{\tilde{S}_n;\ n \geq 1\}$ слабо компактны в пространстве $C(\overline{B}(0;1))$. Здесь

$$\overline{B}(0;1) = \{u:\ u \in L,\ \|u\| \leq 1\}.$$

Докажем, что из $\{S_n;\ n \geq 1\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{S_{n_k};\ k \geq \geq 1\}$ такую, что с вероятностью 1

$$S_{n_k}(u)\frac{1}{1+\|u\|^3} \underset{u\in L}{\Rightarrow} S(u)\frac{1}{1+\|u\|^3}, \qquad k\to\infty.$$

Выберем плотное в L счетное множество $\mathfrak{M}$. Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Выберем в $C(\overline{B}(0;1))$ компакт K такой, что

$$\forall\, n \geq 1: \quad \mathrm{P}\{\tilde{S}_n \in K\} > 1-\varepsilon,$$

$$\mathrm{P}\{\tilde{S} \in K\} > 1-\varepsilon.$$

Поскольку K — компакт, то

$$\omega_\delta := \sup_{\substack{\|u_1-u_2\|<\delta\\ u_1,u_2\in\overline{B}(0;1)}} \max_{\psi\in K} |\psi(u_1)-\psi(u_2)| \to 0, \qquad \delta\to 0.$$

Выберем δ_0 так, чтобы $\omega_{\delta_0} < \frac{\varepsilon}{3}$. Пусть $\{u_1,\ldots,u_N\}$ — δ_0-сеть для $\overline{B}(0;1)$, состоящая из элементов множества $\mathfrak{M}$. Выберем номер n_0 так, чтобы

$$\mathrm{P}\left(\max_{j=1,\ldots,N}|\tilde{S}_{n_0}(u_j)-\tilde{S}(u_j)| > \frac{\varepsilon}{3}\right) < \varepsilon.$$

Тогда

$$\mathrm{P}\left(\max_{\overline{B}(0;1)}|\tilde{S}_{n_0}(u)-\tilde{S}(u)| > \varepsilon\right) < 3\varepsilon.$$

Следовательно, из последовательности $\{S_n;\ n\geq 1\}$ можно выбрать подпоследовательность так, чтобы

$$\max_{\overline{B}(0;1)}|\tilde{S}_{n_k^1}(u)-\tilde{S}(u)| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \pmod{\mathrm{P}},$$

т. е.

$$\max_{u\notin B(0;1)}|\tilde{S}_{n_k^1}(u)-\tilde{S}(u)|\frac{1}{1+\|u\|^3} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \pmod{\mathrm{P}}.$$

Здесь $B(0;1) = \{u:\ u\in L,\ \|u\| < 1\}$. Используя аналогичные рассуждения, из последовательности $\{S_{n_k^1};\ k\geq 1\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{S_{n_k};\ k\geq 1\}$, с вероятностью 1 равномерно сходящуюся к S на $\overline{B}(0;1)$. Тогда

$$\max_L |S_{n_k}(u)-S(u)|\frac{1}{1+\|u\|^3} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \pmod{\mathrm{P}}.$$

В силу условия 3 на меру μ имеет место сходимость

$$\int_L S_{n_k}(u)\,\mu(du) \xrightarrow[k\to\infty]{} \int_L S(u)\,\mu(du) \pmod{\mathrm{P}}.$$

Для завершения доказательства теоремы осталось отметить, что

$$\int_L S_{n_k}(u)\,\mu(du) = \sum_{j=0}^{n_k-1}\int_L F(u,t_j^{n_k})\,\mu(du)\bigl(w(t_{j+1}^{n_k})-w(t_j^{n_k})\bigr) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n_k-1}\zeta(t_j^{n_k})\bigl(w(t_{j+1}^{n_k})-w(t_j^{n_k})\bigr),$$

а также использовать тот факт, что

$$\sum_{j=0}^{n-1} \zeta(t_j^n)(w(t_{j+1}^n) - w(t_j^n)) \xrightarrow{\ \mathrm{P}\ } \int_0^1 \zeta(t)\,dw(t), \qquad n \to \infty.$$

Теорема доказана.

Следующее утверждение позволит распространить интегрирование на случай существенно бесконечномерных мер.

Теорема 2 (об интегрировании стохастической экспоненты). *Пусть согласованное случайное отображение* F *удовлетворяет условиям* 1, 2 *теоремы* 1, *случайная согласованная мера* μ *удовлетворяет условию* 4 *теоремы* 1 *и*

$$\sup_{u,t} \operatorname{ess\,sup} |F(u,t)| < +\infty.$$

Тогда

$$\mathrm{M} \int_C \exp\left\{ \int_0^1 F(u,t)\,dw(t) - \frac{1}{2}\int_0^1 F(u,t)^2\,dt \right\} \mu(du) = 1.$$

Доказательство. Обозначим

$$g(u,t) = \exp\left\{ \int_0^t F(u,s)\,dw(s) - \frac{1}{2}\int_0^t F(u,s)^2\,ds \right\},$$

$$g_n(u,t) = \exp\left\{ \int_0^t F_n(u,s)\,dw(s) - \frac{1}{2}\int_0^t F_n(u,s)^2\,ds \right\},$$

$$F_n(u,s) = \sum_{k=0}^{n-1} F(u,t_k^n)\,\mathbf{1}_{[t_k^n;\,t_{k+1}^n]}(s),$$

$$0 = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_n^n = 1, \qquad n \ge 1.$$

Поскольку $\{g_n;\ n \ge 1\}$ и g удовлетворяют стохастическим дифференциальным уравнениям

$$dg_n(u,t) = g_n(u,t)F_n(u,t)\,dw(t),$$

$$dg(u,t) = g(u,t)F(u,t)\,dw(t),$$

$$g_n(u,0) = g(u,0) = 1, \quad n \ge 1,$$

то, используя условия теоремы на функцию F и лемму Гронуолла – Беллмана, можно показать, что $\{g_n;\ n \ge 1\}$ и g удовлетворяют условиям 1 и 2 теоремы 1 с константами, не зависящими от n. Следовательно, аналогично доказательству теоремы 1 можно выделить подпоследовательность последовательности $\{g_n;\ n \ge 1\}$ такую, что с вероятностью 1

$$\forall R > 0: \qquad \max_{u \in L,\ \|u\| \le R} \|g_n(u) - g(u)\| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Поэтому в силу леммы Фату

$$\mathrm{M} \int_C g(u,1)\,\mu(du) \le \varliminf_{n\to\infty} \mathrm{M} \int_C g_n(u,1)\,\mu(du).$$

Рассмотрим при фиксированном n

$$g_n(u,t) = \exp\left\{\int_0^t F_n(u,s)\,dw(s) - \frac{1}{2}\int_0^t F_n(u,s)^2\,ds\right\} =$$

$$= \exp\left\{\int_0^t \sum_{k=0}^{n-1} F(u,t_k^n)\mathbf{1}_{[t_k^n;t_{k+1}^n]}(s)\,dw(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \sum_{k=0}^{n-1} F(u,t_k^n)^2\mathbf{1}_{[t_k^n;t_{k+1}^n]}(s)\,ds\right\}.$$

Из условий теоремы на функцию F следует, что

$$\mathrm{M}\int_C \|g_n(u)\|^4\,\mu(du) < +\infty.$$

Поэтому

$$\mathrm{M}\int_0^1 \left\{\int_C g_n(u,t)\,F_n(u,t)\,\mu(du)\right\} dw(t) = 0.$$

Следовательно, согласно теореме 1

$$\mathrm{M}\int_C g_n(u,1)\,\mu(du) = \mathrm{M}\int_C \left\{1 + \int_0^1 g_n(u,t)\,F_n(u,t)\,dw(t)\right\}\mu(du) =$$

$$= 1 + \mathrm{M}\int_0^1\int_C g_n(u,t)\,F_n(u,t)\,\mu(du)\,dw(t) = 1.$$

Таким образом,

$$\mathrm{M}\int_C g(u,1)\,\mu(du) \le 1.$$

Отсюда, используя условие теоремы, получаем

$$\forall\,\beta \in \mathbb{R}:\quad \mathrm{M}\int_C \exp\beta\int_0^1 F(u,t)\,dw(t)\,\mu(du) < +\infty.$$

Поэтому с помощью неравенства Гельдера можно проверить, что

$$\mathrm{M}\int_0^1\int_C g(u,t)^4\,\mu(du)\,dt < +\infty,$$

откуда аналогично ранее проделанным выкладкам

$$\mathrm{M}\int_C g(u,1)\,\mu(du) = 1.$$

Теорема доказана.

Следствие. *При выполнении условий теоремы*

$$\forall\,p \in \mathbb{N}:\quad \mathrm{M}\int_C \left(\int_0^1 F(u,t)\,dw(t)\right)^{2p} \mu(du) < +\infty.$$

Лемма 2. *Пусть случайная согласованная мера* μ *и случайное неупреждающее отображение* $F: C \to C$ *удовлетворяют условиям теоремы* 1 *и для некоторого* $p \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{M}\int_C\int_0^1 F(u,t)^{2p}\,dt\,\mu(du) \;<\; +\infty.$$

Тогда

$$\mathrm{M}\int_C\left(\int_0^1 F(u,t)\,dw(t)\right)^{2p}\mu(du) \;\le\; [p(2p-1)]^p\,\mathrm{M}\int_C\int_0^1 F(u,t)^{2p}\,dt\,\mu(du).$$

Доказательство. Рассмотрим для каждого $n \ge 1$ новое случайное отображение

$$F_n(u,t) = Q_n(F(u,\cdot))(t), \qquad t\in[0;1].$$

Здесь Q_n — детерминированное отображение C в C:

$$Q_n(f)(t) = \begin{cases} f(t), & t \le \tau(f,n); \\ n, & t \ge \tau(f;n),\;\; f(\tau(f,n)) \ge n; \\ -n, & t \ge \tau(f;n),\;\; f(\tau(f,n)) \le -n, \end{cases}$$

$\tau(f,n) = \inf\{t\colon\; |f(t)| \ge n\}$, если $\{t\colon\; |f(t)| = n\} \ne \varnothing$, а если $\{t\colon\; |f(t)| \ge n\} = \varnothing$, то считаем $Q_n(f) = f$. Заметим, что F_n — согласованное случайное отображение, удовлетворяющее условиям теоремы 2. Поэтому для F_n справедливо заключение следствия и соответствующая оценка получается с помощью формулы Ито аналогично [3]. Далее, оценка для F получается с использованием теоремы Лебега об ограниченной сходимости и леммы Фату. Лемма доказана.

3. Интегрирование диффузионных процессов по согласованным случайным мерам. В этом пункте для специального класса случайных отображений определяется интеграл по согласованной случайной мере, не обязательно являющейся конечномерной. Нам понадобятся дополнительные определения.

Пусть $a, b\colon C\times\mathbb{R}\times[0;1]\to\mathbb{R}$ — измеримые по совокупности переменных функции такие, что:

1) a, b — непрерывны по совокупности переменных;

2) a, b удовлетворяют условию Липшица по первым двум переменным равномерно относительно $t \in [0;1]$;

3) для любого $t \in [0;1]$, $u \in C$:

$$a(u,\cdot,t) = a(u_t,\cdot,t), \qquad b(u,\cdot,t) = b(u_t,\cdot,t).$$

Пусть функция $\varphi\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ удовлетворяет условию Липшица.

Определение 6. *Решение стохастического дифференциального уравнения*

$$dx(u,t) = a(u,x(u,t),t)\,dt + b(u,x(u,t),t)\,dw(t),$$

$$x(u,0) = \varphi(u(0)),$$

называется диффузионным случайным отображением.

Заметим, что диффузионные случайные отображения являются согласованными и удовлетворяют условиям теоремы 1. Пусть теперь μ — согласованная случайная мера на C, x — диффузионное случайное отображение. Определим интеграл

$$\int_C x(u,t)\,\mu(du)$$

следующим образом. Пусть $\{\pi_n;\ n \geq 1\}$ — последовательность конечномерных линейных операторов в C, сильно сходящаяся к единичному при n, сходящемся к бесконечности, и такая, что

$$\forall\, n \geq 1:\ \ \forall\, t \in [0;1]:\ \forall\, u \in C:\ \ \pi_n(u)(t) = \pi_n(u_t)(t).$$

Для каждого $n \geq 1$ определен

$$\int\limits_C x(\pi_n u, t)\,\mu(du) = \int\limits_C x(v, t)\,\mu\pi_n^{-1}(dv),$$

как интеграл по конечной мере.

Теорема 3. *Для любого* $p \geq 1$ *существует*

$$L_p - \lim_{n\to\infty} \int\limits_C x(\pi_n u, t)\,\mu(du), \tag{5}$$

который не зависит от выбора последовательности $\{\pi_n;\ n \geq 1\}$.

Доказательство. Рассмотрим для $p \in \mathcal{N}$ и $u_1, u_2 \in C$ разность

$$(x(u_1, t) - x(u_2, t))^{2p} \leq C_1 \|u_1 - u_2\|^{2p} + C_1 \int\limits_0^t (x(u_1, s) - x(u_2, s))^{2p}\,ds +$$

$$+ C_1 \left(\int\limits_0^t [b(u_1, x(u_1, s), s) - b(u_2, x(u_2, s), s)]\,dw(s) \right)^{2p}.$$

Согласно лемме 2 для произвольной согласованной случайной меры γ и произвольных $n, m \geq 1$

$$\mathrm{M} \int\limits_C (x(\pi_n u, t) - x(\pi_m u, t))^{2p}\,\gamma(du) \leq C_1 \int\limits_C \|\pi_n u - \pi_m u\|^{2p}\,\gamma(du) +$$

$$+ C_1 \int\limits_0^t \mathrm{M} \int\limits_C (x(\pi_n u, s) - x(\pi_m u, s))^{2p}\,\gamma(du)\,ds +$$

$$+ C_2 \int\limits_0^t \mathrm{M} \int\limits_C (b(\pi_n u, x(\pi_n u, s), s) - b(\pi_m u, x(\pi_m u, s), s))^{2p}\,\gamma(du)\,ds \leq$$

$$\leq C_3 \int\limits_C \|\pi_n u - \pi_m u\|^{2p}\,\gamma(du) +$$

$$+ C_4 \int\limits_0^t \mathrm{M} \int\limits_C (x(\pi_n u, s) - x(\pi_m u, s))^{2p}\,\gamma(du)\,ds.$$

Следовательно, согласно лемме Гронуолла – Беллмана

$$\mathrm{M} \int\limits_C (x(\pi_n u, t) - x(\pi_m u, t))^{2p}\,\gamma(du) \leq$$

$$\leq C_5 \int\limits_C \|\pi_n u - \pi_m u\|^{2p}\,\gamma(du).$$

Здесь, как и раньше, постоянная C_5 не зависит от n, m и меры γ. Поэтому в силу теоремы Лебега об ограниченной сходимости последовательность

$$\left\{ \int_C x(\pi_n u, t)\,\mu(du);\ \ n \geq 1 \right\}$$

фундаментальна в любом пространстве L_p и, следовательно, существует случайная величина ζ такая, что

$$L_p - \lim_{n \to \infty} \int_C x(\pi_n u, t)\,\mu(du) \ = \ \zeta.$$

Составляя из двух различных последовательностей $\{\pi_n;\ n \geq 1\}$, $\{\pi_n';\ n \geq 1\}$, удовлетворяющих условию теоремы, одну по принципу $\{\pi_1, \pi_1', \pi_2, \pi_2', \ldots\}$, убеждаемся, что ζ не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности операторов. Теорема доказана.

Определение 7. *Интегралом от* $x(u, t)$ *по мере* μ *называется предел в* (5).

***Замечание* 3.** Используя утверждения п. 2 и аппроксимацию интеграла (5), можно проверить справедливость теорем 1, 2 и следствия из леммы 2 для интегралов от диффузионных случайных отображений.

4. Рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 3, позволяют определить интеграл по мере μ от случайных отображений вида

$$u \ \to \ g(u, x(u, t)),$$

где $g\colon C \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — удовлетворяющая условию Липшица детерминированная функция.

5. При выполнении условий теоремы 2 на меру μ для произвольного случайного диффузионного отображения x интеграл

$$\int_C x(u, t)\,\mu(du), \qquad t \in [0; 1],$$

является процессом Ито.

1. *Arnold L., Imkeller P.* Stratonovich calculus with spatial parameters and anticipative problems in multiplicative ergodic theory // Stochast. Proces. and Appl. – 1966. – **62**. – P. 19–54.
2. *Hiroschi Kunita.* Stochastic flows and stoshastic differential equations. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990. – 346 p.
3. *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Статистика случайных процессов. – М.: Наука, 1974. – 696 с.

Получено 15.02.99