УДК 519.21

И. И. Ежов, В. Ф. Каданков (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЧИСЛА ТРЕБОВАНИЙ В СИСТЕМЕ ОБСЛУЖИВАНИЯ $D_\eta|D_\xi^\kappa|1$

For the $D_\eta|D_\xi^\kappa|1$ queuing system, we find the distribution of number of demands in transient and stationary operating conditions of the system.

Для системи обслуговування $D_\eta|D_\xi^\kappa|1$ знайдено розподіл числа вимог в перехідному та стаціонарному режимах функціонування системи обслуговування.

Пусть $\eta, \xi, \kappa \in N_+ = \{1, 2, \ldots\}$ — независимые случайные величины с конечными средними значениями. Рассмотрим однородную цепь Маркова $\{Y_n; n \ge 0\}$ с фазовым пространством состояний $N \cup N^3$, $N = \{0, 1, \ldots\}$, и такими переходными вероятностями за один шаг:

$$\begin{gathered}
\mathrm{P}[(k,i,j) \to (k, i+1, j+1)] = \mathrm{P}[\eta > i+1, \xi > j+1/\eta > i, \xi > j],\\
\mathrm{P}[(k,i,j) \to (k+1, 0, j+1)] = \mathrm{P}[\eta = i+1, \xi > j+1/\eta > i, \xi > j],\\
\mathrm{P}[(k,i,j) \to (k-r, i+1, 0)] =\\
= \mathrm{P}[\eta > i+1, \xi = j+1, \kappa = r/\eta > i, \xi > j], \quad r = \overline{1,k},\\
\mathrm{P}[(k,i,j) \to (i+1)] = \mathrm{P}[\eta > i+1, \xi = j+1, \kappa > k/\eta > i, \xi > j], \qquad (1)\\
\mathrm{P}[(k,i,j) \to (k-r+1, 0, 0)] =\\
= \mathrm{P}[\eta = i+1; \xi = j+1, \kappa = r/\eta > i, \xi > j], \quad r = \overline{1,k+1},\\
\mathrm{P}[(k,i,j) \to (0)] = \mathrm{P}[\eta = i+1; \xi = j+1, \kappa > k+1/\eta > i, \xi > j],\\
\mathrm{P}[(i) \to (i+1)] = \mathrm{P}[\eta > i+1/\eta > i], \quad \mathrm{P}[(i) \to (0,0,0)] =\\
= \mathrm{P}[\eta = i+1/\eta > i], \quad k, i, j \in N.
\end{gathered}$$

Так введенная случайная последовательность $\{Y_n; n \ge 0\}$ описывает эволюцию одноканальной системы обслуживания с такими свойствами:

1. Требования на обслуживающий прибор поступают по одному, через независимые, распределенные одинаково с η промежутки времени.

2. Требования обслуживаются группами. Пусть n_0 и n_1 — два последовательных момента времени, в которых заканчивается обслуживание очередных групп требований. Если в момент n_1 в системе было k требований и ρ_* — число требований, обслуженных в этот момент, то
$$(n_1 - n_0, \rho_*) \doteq (\xi, \min\{k, \kappa\}),$$
где символ $\doteq$ означает совпадение распределений соответствующих случайных величин.

3. Длина очереди неограничена. Под числом требований, находящихся в системе обслуживания, будем понимать общее количество требований, находящихся в очереди и на обслуживающем приборе.

Событие $\{Y_n = (k, i, j)\}$, $k, i, j \in N$, эквивалентно следующему состоянию системы: в момент времени n в системе находится $k+1$ требование; последнее поступление требования произошло в момент $n-i$; последнее обслуживание группы требований произошло в момент $n-j$.

Событие $\{Y_n=(i)\}$, $i\in N$, равносильно такому состоянию системы: в момент времени n система свободна от требований; с момента последнего поступления требования прошло i единиц времени.

Так введенную систему обслуживания будем обозначать символом $D_\eta|D_\xi^\kappa|1$.

В этой работе найдено распределение числа требований, находящихся в системе обслуживания, в переходном и стационарном режимах. В процессе решения данной задачи использованы факторизационные методы. Как известно, идея использования факторизации при решении граничных задач для широкого класса случайных процессов принадлежит В. С. Королюку. В случае $\kappa=1$ система обслуживания $D_\eta|D_\xi|1$ исследована в работе [1]. Отметим также, что случай $\kappa=1$, $\eta,\xi\in[0,\infty)$, с использованием теории полумарковских процессов, рассматривался в работе [2].

Введем следующие, независимые друг от друга, случайные величины:

1) $\hat\eta$, $\hat\xi\in N$ — целочисленные неотрицательные случайные величины с распределениями

$$\mathrm{P}[\hat\eta=i]=\mathrm{P}[\eta>i](\mathrm{M}(\eta))^{-1},\quad \mathrm{P}[\hat\xi=j]=\mathrm{P}[\xi>j](\mathrm{M}(\xi))^{-1},\qquad i,j\in N;$$

2) $\{\eta_n;n\ge0\}$, $\{\xi_n;n\ge0\}$, $\{\kappa_n;n\ge0\}$ — случайные последовательности, такие, что

$$\eta_0=\xi_0=\kappa_0=0;$$

$$\eta_n=\eta_1'+\ldots+\eta_n',\qquad \eta_i'\doteq\eta;\qquad \xi_n=\xi_1'+\ldots+\xi_n',\qquad \xi_i'\doteq\xi;$$

$$\kappa_n=\kappa_1'+\ldots+\kappa_n',\qquad \kappa_i'\doteq\kappa;\qquad i\in N_+;$$

3) $\zeta_t\in N$ — целочисленная неотрицательная величина с производящей функцией

$$\mathrm{M}[v^{\zeta_t}]=\exp\left\{\sum_{n>0}\frac{1}{n}\mathrm{M}\Big[\Big(v^{\xi_n-\eta_{\kappa_n}}-1\Big)t^{\eta_{\kappa_n}};\ \xi_n>\eta_{\kappa_n}\Big]\right\},\quad |v|\le1;$$

4) $\zeta\in N$ — целочисленная неотрицательная случайная величина, распределенная одинаково с $\sup\limits_{n\ge0}\{\xi_n-\eta_{\kappa_n}\}$, с производящей функцией

$$\mathrm{M}[v^{\zeta}]=\exp\left\{\sum_{n>0}\frac{1}{n}\mathrm{M}\Big[v^{\xi_n-\eta_{\kappa_n}}-1;\ \xi_n>\eta_{\kappa_n}\Big]\right\},\quad |v|\le1.$$

Отметим, что если $\mathrm{M}[\xi]<\mathrm{M}[\eta]\mathrm{M}[\kappa]$, то случайная величина ζ является собственной, т. е. $\mathrm{P}[\zeta\in N]=1$;

5) $\nu(t)\in N$ — геометрически распределенная случайная величина с параметром t

$$\mathrm{P}[\nu(t)=n]=(1-t)t^n,\qquad n\in N,\quad t\in[0,1).$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть* $Y_0=(0,0,0)$ (*в начальный момент времени требование поступает в свободную систему*) *и* $i\in N$, $(k,i,j)\in N^3$.

Тогда

$$\mathrm{P}[Y_{\nu(t)}=(k,i,j)]=\frac{1-t}{1-\mathrm{M}[t^{\eta}]}\mathrm{P}[\eta>i,\xi>j]\mathrm{M}\Big[t^{i+\eta_k};\ i+\eta_k=j+\zeta_t\Big]c(t),$$

$$P[Y_{\nu(t)} = (i)] = \frac{1-t}{1-M[t^{\eta}]} t^i P[\eta > i]\left\{1 - M[\xi]\sum_{k\geq 0} M\left[t^{\eta_k};\ i+\eta_k = \hat{\xi}+\zeta_t\right]c(t)\right\},$$

где

$$c^{-1}(t) = F^{-1}(1,t) + M[\xi]\sum_{r\geq 0} M\left[t^{\eta_r};\ 1+\hat{\xi}+\zeta_t = \eta_r\right],$$

$$F(1,t) = \exp\left\{\sum_{n>0}\frac{1}{n}M\left[t^{\eta_{\kappa_n}};\ \xi_n \geq \eta_{\kappa_n}\right]\right\}.$$

Для $n \in N$ положим

$$S_n = \begin{cases} 0, & \text{если } Y_n \in N; \\ k+1, & \text{если } Y_n = (k,i,j), \quad (k,i,j) \in N^3. \end{cases}$$

Случайная последовательность $\{S_n;\ n \geq 0\}$ описывает эволюцию числа требований, находящихся в системе обслуживания.

Следствие 1. *Пусть* $Y_0 = (0,0,0)$, $k \in N$. *Тогда*

$$P[S_{\nu(t)} = k+1] = \frac{1-t}{1-M[t^{\eta}]} M[\xi]M[\eta]M\left[t^{\hat{\eta}+\eta_k};\ \hat{\eta}+\eta_k = \hat{\xi}+\zeta_t\right]c(t),$$

$$P[S_{\nu(t)} = 0] = \frac{1-t}{1-M[t^{\eta}]} M[\eta]\left\{M\left[t^{\hat{\eta}}\right] - M[\xi]\sum_{k\geq 0} M\left[t^{\hat{\eta}+\eta_k};\ \hat{\eta}+\eta_k = \hat{\xi}+\zeta_t\right]c(t)\right\}.$$

Следствие 2. *Пусть* $\rho = \dfrac{M[\xi]}{M[\eta]\,M[\kappa]} < 1$ *и*

$$\Pi_k^{ij} = \lim_{n\to\infty} P[Y_n = (k,i,j)], \qquad \Pi^i = \lim_{n\to\infty} P[Y_n = (i)]$$

— *стационарное распределение цепи Маркова* $\{Y_n;\ n \geq 0\}$. *Тогда*

$$\Pi_k^{ij} = P\left[\hat{\eta}=i, \hat{\xi}=j\right]M[\xi]P[i+\eta_k = j+\zeta]c,$$

$$\Pi^i = P\left[\hat{\eta}=i\right]\left\{1 - M[\xi]\sum_{k\geq 0} P\left[i+\eta_k = \hat{\xi}+\zeta\right]c\right\},$$

где

$$c^{-1} = c^{-1}(1) = \exp\left\{-\sum_{n>0}\frac{1}{n}P\left[\xi_n \geq \eta_{\kappa_n}\right]\right\} + M[\xi]\sum_{r\geq 1} P\left[1+\hat{\xi}+\zeta = \eta_r\right].$$

Следствие 3. *Пусть* $\rho < 1$ *и*

$$\Pi_k = \lim_{n\to\infty} P[S_n = k], \qquad k \in N,$$

— *стационарное распределение числа требований, находящихся в системе обслуживания. Тогда*

$$\Pi_0 = 1 - M[\xi]\sum_{k\geq 0} P\left[\hat{\eta}+\eta_k = \hat{\xi}+\zeta\right]c, \quad \Pi_{k+1} = M[\xi]P\left[\hat{\eta}+\eta_k = \hat{\xi}+\zeta\right]c, \quad k \in N.$$

Доказательство теоремы. Зафиксируем (k,i,j) из N^3 и положим

$$\mathrm{P}_{k_0}^{i_0, j_0}(n) = \mathrm{P}[Y_n = (k, i, j) / Y_0 = (k_0, i_0, j_0)]\, \mathrm{P}[\eta > i_0, \xi > j_0],$$
$$\mathrm{P}^{i_0}(n) = \mathrm{P}[Y_n = (k, i, j) / Y_0 = (i_0)]\, \mathrm{P}[\eta > i_0], \qquad (k_0, i_0, j_0) \in N. \tag{2}$$

Введем производящие функции

$$P_\theta^t(u, v) = \sum_{n \ge 0} t^n \sum_{k_0, i_0, j_0 \ge 0} \theta^{k_0} u^{i_0} v^{j_0} \mathrm{P}_{k_0}^{i_0, j_0}(n), \qquad P^t(u) = \sum_{n, i_0 \ge 0} t^n u^{i_0}\, \mathrm{P}^{i_0}(n),$$
$$|\theta|, |u|, |v| \le 1, \quad t \in [0, 1). \tag{3}$$

Используя (1), выписываем обратные уравнения Колмогорова для переходных вероятностей (2). Переходя в полученных уравнениях к производящим функциям, получаем следующую систему уравнений для функций (3):

$$(u - t) P^t(u) = -t P^t(0) + t \mathrm{M}\left[u^\eta\right] P_0^t(0, 0),$$
$$(uv - t) P_\theta^t(u, v) = \theta^k u^{i+1} v^{j+1} \mathrm{P}[\eta > i, \xi > j] - t P_\theta^t(u, 0)\left(1 - \mathrm{M}\left[v^\xi \theta^\kappa\right]\right) -$$
$$- t P_\theta^t(0, v)\left(1 - \frac{1}{\theta}\mathrm{M}\left[u^\eta\right]\right) + t P_\theta^t(0, 0)\left(1 - \mathrm{M}\left[v^\xi \theta^\kappa\right]\right)\left(1 - \frac{1}{\theta}\mathrm{M}\left[u^\eta\right]\right) -$$
$$- \frac{t}{\theta}\mathrm{M}\left[u^\eta\right] \hat{P}_\theta^t(0, v) + t \frac{\mathrm{M}\left[v^\xi\left(1 - \theta^\kappa\right)\right]}{1 - \theta} P^t(u) - t \frac{\mathrm{M}\left[v^\xi\left(1 - \theta^\kappa\right)\right]}{1 - \theta} P^t(0) +$$
$$+ t \mathrm{M}\left[u^\eta\right] \frac{\mathrm{M}\left[v^\xi\left(1 - \theta^{\kappa - 1}\right)\right]}{1 - \theta} P^t(0), \quad |\theta|, |u|, |v| \le 1, \quad t \in [0, 1), \tag{4}$$

где $\hat{P}_\theta^t(0, v) = P_0^t(0, v) - P_0^t(0, 0)$.

Полагая в первом уравнении этой системы $u = t$, последовательно находим

$$P^t(0) = \mathrm{M}\left[t^\eta\right] P_0^t(0, 0), \qquad P^t(u) = \frac{t}{u - t} P_0^t(0, 0)\left(\mathrm{M}\left[u^\eta\right] - \mathrm{M}\left[t^\eta\right]\right). \tag{5}$$

Далее будем предполагать, что переменные u, v связаны равенством

$$uv = t, \quad |u|, |v| \in [t, 1], \quad t \in [0, 1). \tag{6}$$

Полагая во втором уравнении системы (4) $\theta = \mathrm{M}[u^\eta]$ и используя равенство (5), имеем

$$\mathrm{P}[\eta > i, \xi > j] u^i v^j \mathrm{M}\left[u^{\eta_k}\right] = P_{\eta(u)}^t(u, 0)\left(1 - \mathrm{M}\left[v^\xi u^{\eta_\kappa}\right]\right) + \hat{P}_0^t(0, v) -$$
$$- \frac{t}{u - t}\left[\left(1 - \mathrm{M}\left[v^\xi u^{\eta_\kappa}\right]\right) - \left(1 - \mathrm{M}\left[v^\xi\right]\right)\right] \frac{\mathrm{M}\left[u^\eta\right] - \mathrm{M}\left[t^\eta\right]}{1 - \mathrm{M}\left[u^\eta\right]} P_0^t(0,0) + \mathrm{M}\left[v^\xi\right]\mathrm{M}\left[t^\eta\right] P_0^t(0,0),$$

где

$$\eta(u) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{M}\left[u^\eta\right].$$

Справедливо (в силу равенства (6)) факторизационное разложение

$$\left(1 - \mathrm{M}\left[v^\xi u^{\eta_\kappa}\right]\right)^{-1} =$$
$$= \exp\left\{\sum_{n > 0} \frac{1}{n} \mathrm{M}\left[v^{\xi_n} u^{\eta_{\kappa_n}}\right]\right\} = .\exp\left\{\sum_{n > 0} \frac{1}{n} \mathrm{M}\left[u^{\eta_{\kappa_n} - \xi_n} t^{\xi_n};\ \eta_{\kappa_n} > \xi_n\right]\right\} \times$$

$$\times \exp\left\{\sum_{n>0}\frac{1}{n}\mathrm{M}\left[v^{\xi_n-\eta_{\kappa_n}}t^{\eta_{\kappa_n}};\xi_n>\eta_{\kappa_n}\right]\right\} = E(u,t)F(v,t), \tag{7}$$

$$|u|,|v| \in [t,1), \quad t\in[0,1).$$

С учетом этого разложения из предыдущего равенства получаем

$$F(1,t)\mathrm{P}[\eta>i,\xi>j]\mathrm{M}\left[v^{\zeta_t}\right]\mathrm{M}\left[u^{\eta_k}\right]u^iv^j =$$

$$= P^t_{\eta(u)}(u,0)E^{-1}(u,t)+F(v,t)\hat{P}^t_0(0,v)-\frac{t}{u-t}E^{-1}(u,t)\frac{\mathrm{M}\left[u^{\eta}\right]-\mathrm{M}\left[t^{\eta}\right]}{1-\mathrm{M}\left[u^{\eta}\right]}P^t_0(0,0)+$$

$$+v\frac{1-\mathrm{M}\left[v^{\xi}\right]}{1-v}F(v,t)\frac{\mathrm{M}\left[u^{\eta}\right]-\mathrm{M}\left[t^{\eta}\right]}{1-\mathrm{M}\left[u^{\eta}\right]}P^t_0(0,0)+$$

$$+\mathrm{M}\left[v^{\xi}\right]\mathrm{M}\left[t^{\eta}\right]F(v,t)P^t_0(0,0), \quad |u|,|v|\in[t,1], \quad t\in[0,1). \tag{8}$$

Это равенство — суть равенство рядов Лорана по переменной u (по переменной v). Обозначим через $[f(u)]_0$ свободный член ряда Лорана $f(u)$. Непосредственными вычислениями проверяем, что

$$\left[\mathrm{M}\left[v^{\zeta_t}\right]\mathrm{M}\left[u^{\eta_k}\right]u^iv^j\right]_0 = \mathrm{M}\left[t^{i+\eta_k};i+\eta_k=j+\zeta_t\right],$$

$$\left[P^t_{\eta(u)}(u,0)E^{-1}(u,t)\right]_0 = P^t_0(0,0), \qquad \left[F(v,t)\hat{P}^t_0(0,v)\right]_0 = \left[\mathrm{M}\left[v^{\xi}\right]F(v,t)\right]_0 = 0,$$

$$\left[\frac{t}{u-t}E^{-1}(u,t)\frac{\mathrm{M}\left[u^{\eta}\right]-\mathrm{M}\left[t^{\eta}\right]}{1-\mathrm{M}\left[u^{\eta}\right]}\right]_0 = \mathrm{M}\left[t^{\eta}\right],$$

$$\left[v\frac{1-\mathrm{M}\left[v^{\xi}\right]}{1-v}\;\frac{\mathrm{M}\left[u^{\eta}\right]-\mathrm{M}\left[t^{\eta}\right]}{1-\mathrm{M}\left[u^{\eta}\right]}F(v,t)\right]_0 =$$

$$= F(1,t)\mathrm{M}[\xi]\left(1-\mathrm{M}\left[t^{\eta}\right]\right)\sum_{r\geq1}\mathrm{M}\left[t^{\eta_r};1+\hat{\xi}+\zeta_t=\eta_r\right].$$

Сравнивая теперь свободные члены в левой и правой частях уравнения (8), получаем

$$\mathrm{M}\left[t^{i+\eta_k};i+\eta_k=j+\zeta_t\right]F(1,t)\mathrm{P}[\eta>i,\xi>j] = \left(1-\mathrm{M}\left[t^{\eta}\right]\right)P^t_0(0,0)+$$

$$+F(1,t)\mathrm{M}[\xi]\left(1-\mathrm{M}\left[t^{\eta}\right]\right)\sum_{r\geq1}\mathrm{M}\left[t^{\eta_r};1+\hat{\xi}+\zeta_t+\eta_r\right]P^t_0(0,0).$$

Отсюда находим

$$P^t_0(0,0) = \frac{c(t)}{\left(1-\mathrm{M}\left[t^{\eta}\right]\right)}\mathrm{M}\left[t^{i+\eta_k};i+\eta_k=j+\zeta_t\right]\mathrm{P}[\eta>i,\xi>j],$$

где

$$c^{-1}(t) = F^{-1}(1,t)+\mathrm{M}[\xi]\sum_{r\geq1}\mathrm{M}\left[t^{\eta_r};1+\hat{\xi}+\zeta_t=\eta_r\right].$$

Поскольку

$$P^t_0(0,0) = \sum_{n\geq0}t^n\,\mathrm{P}[Y_n=(k,i,j)/Y_0=(0,0,0)],$$

то

$$P\left[Y_{\nu(t)}=(k,i,j)/Y_0=(0,0,0)\right] = \frac{1-t}{1-M\left[t^{\eta}\right]}P[\eta>i,\xi>j]M\left[t^{i+\eta_k};i+\eta_k=j+\zeta_t\right]c(t),$$

и мы получили первую формулу в утверждении теоремы.

Зафиксируем теперь $i\in N$ и положим

$$R^{i_0,j_0}_{k_0}(n) = P[Y_n=(i)/Y_0=(k_0,i_0,j_0)]P[\eta>i_0,\xi>j_0],$$

$$R^{i_0}(n) = P[Y_n=(i)/Y_0=(i_0)]P[\eta>i_0], \qquad k_0,i_0,j_0\in N.$$

Введем производящие функции

$$R^t(u) = \sum_{n,i_0\ge 0}t^n u^{i_0}R^{i_0}(n), \qquad R^t_\theta(u,v) = \sum_{n\ge 0}t^n\sum_{k_0,i_0,j_0\ge 0}\theta^{k_0}u^{i_0}v^{j_0}R^{i_0,j_0}_{k_0}(n),$$

$$|\theta|,|u|,|v| \le 1, \qquad t\in[0,1).$$

Для этих функций, используя переходные вероятности (1), нетрудно получить систему уравнений

$$(uv-t)R^t_\theta(u,v) = -tR^t_\theta(u,0)\left(1-M\left[v^{\xi}\theta^{\kappa}\right]\right)-tR^t_\theta(0,v)\left(1-\frac{1}{\theta}M\left[u^{\eta}\right]\right)+$$

$$+tR^t_\theta(0,0)\left(1-M\left[v^{\xi}\theta^{\kappa}\right]\right)\left(1-\frac{1}{\theta}M\left[u^{\eta}\right]\right)-\frac{t}{\theta}M\left[u^{\eta}\right]\hat R^t_0(0,v)+t\frac{M\left[v^{\xi}\left(1-\theta^{\kappa}\right)\right]}{1-\theta}R^t(u)-$$

$$-t\frac{M\left[v^{\xi}\left(1-\theta^{\kappa}\right)\right]}{1-\theta}R^t(0)+tM\left[u^{\eta}\right]\frac{M\left[v^{\xi}\left(1-\theta^{\kappa-1}\right)\right]}{1-\theta}R^t(0), \tag{9}$$

$$R^t(u) = \frac{u^{i+1}-t^{i+1}}{u-t}P[\eta>i]+t\frac{M\left[u^{\eta}\right]-M\left[t^{\eta}\right]}{u-t}R^t_0(0,0),$$

$$|\theta|,|u|,|v| \le 1, \qquad t\in[0,1),$$

где

$$\hat R^t_0(0,v) = R^t_0(0,v)-R^t_0(0,0).$$

Из системы уравнений (9) (при $uv=t$, $\theta \doteq M\left[u^{\eta}\right] \overset{\text{def}}{=} \eta(u)$) и факторизационного разложения (7) следует

$$R^t_{\eta(u)}(u,0)E^{-1}(u,t)+F(v,t)\hat R^t_0(0,v) = E^{-1}(u,t)\frac{P[\eta>i]}{1-M\left[u^{\eta}\right]}\,\frac{u^{i+1}-t^{i+1}}{u-t}+$$

$$+\frac{t}{u-t}E^{-1}(u,t)\frac{M\left[u^{\eta}\right]-M\left[t^{\eta}\right]}{1-M\left[u^{\eta}\right]}R^t_0(0,0)-\frac{u^{i+1}-t^{i+1}}{1-M\left[u^{\eta}\right]}P[\eta>i]\frac{1-M\left[v^{\xi}\right]}{u-t}F(v,t)-$$

$$-t\frac{M\left[u^{\eta}\right]-M\left[t^{\eta}\right]}{1-M\left[u^{\eta}\right]}F(v,t)\frac{1-M\left[v^{\xi}\right]}{u-t}R^t_0(0,0)-F(v,t)M\left[v^{\xi}\right]R^t(0), \tag{10}$$

$$|u|,|v|\in[t,1], \qquad t\in[0,1).$$

Непосредственными вычислениями проверяем, что

$$\left[R^t_{\eta(u)}(u,0)E^{-1}(u,t)\right]_0 = R^t_0(0,0), \qquad \left[F(v,t)\hat R^t_0(0,v)\right]_0 = \left[F(v,t)M\left[v^{\xi}\right]\right]_0 = 0,$$

$$\left[\frac{E^{-1}(u,t)}{1-\mathrm{M}\left[u^{\eta}\right]}\,\frac{u^{i+1}-t^{i+1}}{u-t}\right]_0 = t^i, \quad \left[\frac{t}{u-t}E^{-1}(u,t)\frac{\mathrm{M}\left[u^{\eta}\right]-\mathrm{M}\left[t^{\eta}\right]}{1-\mathrm{M}\left[u^{\eta}\right]}\right]_0 = \mathrm{M}\left[t^{\eta}\right],$$

$$\left[\frac{u^{i+1}}{1-\mathrm{M}\left[u^{\eta}\right]}F(v,t)\,\frac{1-\mathrm{M}\left[v^{\xi}\right]}{u-t}\right]_0 = F(1,t)\mathrm{M}[\xi]\sum_{r\geq 0}\mathrm{M}\left[t^{i+\eta_k};\, i+\eta_k=\hat{\xi}+\zeta_t\right],$$

$$\left[\frac{t}{1-\mathrm{M}\left[u^{\eta}\right]}F(v,t)\,\frac{1-\mathrm{M}\left[v^{\xi}\right]}{u-t}\right]_0 = F(1,t)\mathrm{M}[\xi]\sum_{r\geq 1}\mathrm{M}\left[t^{\eta_r};\, 1+\hat{\xi}+\zeta_t=\eta_r\right],$$

$$\left[\frac{\mathrm{M}\left[u^{\eta}\right]-\mathrm{M}\left[t^{\eta}\right]}{1-\mathrm{M}\left[u^{\eta}\right]}\,t\,F(v,t)\,\frac{1-\mathrm{M}\left[v^{\xi}\right]}{u-t}\right]_0 =$$

$$= F(1,t)\mathrm{M}[\xi]\left(1-\mathrm{M}\left[t^{\eta}\right]\right)\sum_{r\geq 1}\mathrm{M}\left[t^{\eta_r};\, 1+\hat{\xi}+\zeta_t=\eta_r\right].$$

Приравнивая свободные члены в левой и правой частях уравнения (10), получаем

$$R_0^t(0,0) = t^i\,\mathrm{P}[\eta>i]+\mathrm{M}\left[t^{\eta}\right]R_0^t(0,0) -$$

$$- F(1,t)\mathrm{M}[\xi]\mathrm{P}[\eta>i]\sum_{r\geq 0}\mathrm{M}\left[t^{i+\eta_k};\,\hat{\xi}+\zeta_t=i+\eta_r\right]+$$

$$+ t^i\,\mathrm{P}[\eta>i]F(1,t)\mathrm{M}[\xi]\sum_{r\geq 1}\mathrm{M}\left[t^{\eta_r};\,1+\hat{\xi}+\zeta_t=\eta_r\right]-$$

$$-\left(1-\mathrm{M}\left[t^{\eta}\right]\right)\mathrm{M}[\xi]F(1,t)\sum_{r\geq 1}\mathrm{M}\left[t^{\eta_r};\,1+\hat{\xi}+\zeta_t=\eta_r\right]R_0^t(0,0),$$

или

$$R_0^t(0,0) = \frac{t^i\,\mathrm{P}[\eta>i]}{1-\mathrm{M}\left[t^{\eta}\right]}-\frac{\mathrm{M}[\xi]\,\mathrm{P}[\eta>i]}{1-\mathrm{M}\left[t^{\eta}\right]}\sum_{k\geq 0}\mathrm{M}\left[t^{i+\eta_k};\,i+\eta_k=\hat{\xi}+\zeta_t\right]c(t).$$

Поскольку

$$R_0^t(0,0) = \sum_{n\geq 0}t^n\,\mathrm{P}[Y_n=(i)/Y_0=(0,0,0)],$$

то

$$\mathrm{P}\left[Y_{\nu(t)}=(i)/Y_0=(0,0,0)\right] =$$

$$= \mathrm{P}[\eta>i]\,\frac{t^i(1-t)}{1-\mathrm{M}\left[t^{\eta}\right]}\left\{1-\mathrm{M}[\xi]\sum_{k\geq 0}\mathrm{M}\left[t^{\eta_k};\,i+\eta_k=\hat{\xi}+\zeta_t\right]c(t)\right\},$$

и мы получили вторую формулу теоремы. Доказательство теоремы завершено. Приведенные следствия очевидным образом вытекают из утверждения теоремы.

1. *Ежов И. И.* О распределении длины очереди в классической системе $G|G|1$ с дискретным временем // Докл. АН России. – 1993. – **332**, № 4. – С. 408–410.
2. *Корлат А. Н., Кузнецов В. Н., Новиков М. М., Турбин А. Ф.* Полумарковские модели восстанавливаемых систем и систем массового обслуживания. – Кишинев: Штиинца, 1991. – С. 258–263.

Получено 13.04.99