УДК 517.5

Н. Л. Пачулиа (Абхаз. ун-т, Сухуми)

О СИЛЬНОЙ СУММИРУЕМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ СУММИРУЕМОЙ ФУНКЦИИ

In the metric L, we obtain estimates of generalized means for deviations of partial Fourier sums from arbitrary summable function in terms of the corresponding means of its best approximants by trigonometric polynomials.

У метриці L одержано оцінки узагальнених середніх для відхилень часткових сум Фур'є від довільної сумовної функції через відповідні середні її найкращих наближень тригонометричними поліномами.

Пусть функция f 2π-периодическая и суммируемая на $\Delta = [-\pi, \pi]$, $f \in L$, $S_k(f; x)$ — частная сумма порядка k ее ряда Фурье $S[f]$, а $\rho_k(f; x) = f(x) - S_k(f; x)$.

В качестве величины, характеризующей сильное суммирование ряда Фурье, рассмотрим выражение

$$\mathfrak{N}(f; x, \mu) = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k |\rho_k(f; x)|^{\mu} \right\}^{1/\mu}, \tag{1}$$

где $\mu > 0$, λ_k — некоторая неотрицательная последовательность чисел.

Пусть $X = C$ или L_p, $p \geq 1$, T_n — множество тригонометрических полиномов t_n порядка, не превышающего n, и

$$E_n(f)_X = \inf_{t_n \in T_n} \|f - t_n\|_X.$$

В работе [1] доказано, что если функция $f \in C$, $(\lambda_k)_{k \in N_0}$ — неотрицательная убывающая последовательность чисел, то для любого числа $\mu > 0$ и $X = C$ справедливо неравенство

$$\|\mathfrak{N}(f; x, \mu)\|_X \leq A_{\mu} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k E_k^{\mu}(f)_X \right\}^{1/\mu} = A_{\mu} \mathfrak{N}_{\mu}(f). \tag{2}$$

Здесь и в дальнейшем A_{μ} — постоянная величина, возможно неодинаковая в различных местах, зависящая только от указанных параметров.

Справедливость неравенства (2) для $f \in X = L_{\mu}$ при $\mu > 1$ очевидна, так как

$$\|\rho_k(f; x)\|_{L_{\mu}} \leq A E_k(f)_{L_{\mu}}.$$

Доказательство соотношения (2) для функции $f \in X = L$ оказалось трудным и, насколько известно автору, до сих пор не получено.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть функция $f \in L$, $(\lambda_k)_{k \in N_0}$ — неотрицательная убывающая последовательность чисел. Тогда справедливо неравенство*

$$\|\mathfrak{N}(f; x; 1)\|_L \leq A_1 \mathfrak{N}_1(f). \tag{3}$$

Из неравенства (3) следует, что если ряд $\mathfrak{N}_1(f)$ сходится, то ряд $\mathfrak{N}(f; x, 1)$ сходится почти всюду. Таким образом, решена задача, поставленная Л. Д. Гоголадзе в работе [1].

Сначала докажем вспомогательные утверждения.

Пусть $\Delta_k^n = \left[\frac{\pi k}{n}, \frac{\pi(k+1)}{n}\right]$, $k = \overline{-n, n-1}$. Тогда $\Delta = \bigcup_{k=-n}^{n-1} \Delta_k^n$. Далее, пусть $\chi_{\Delta_k^n}$ — характеристическая функция множества Δ_k^n и

$$F_x^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} |S_k(f;x)|\, \chi_{\Delta_k^n}(t),$$

$$G_x^{(n)}(t) = |F_x^{(n)}(t)|^{\mu-1} \|F_x^{(n)}(t)\|_{L_\mu}^{1-\mu}, \tag{4}$$

$$\alpha_k(x) = \int_\Delta G_x^{(n)}(t)\, \chi_{\Delta_k^n}(t)\, dt.$$

В работе [2] доказано, что если $p \in (1, 2]$ и $q = \frac{p}{p-1}$, то для каждого x выполняется неравенство

$$\left\{\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k^p(x)\right\}^{1/p} \le \left(\frac{\pi}{n}\right)^{1/q}. \tag{5}$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть* $f \in L$, $\nu > 0$ *и*

$$H_n(f;x,\nu) = \left\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} |S_k(f;x)|^\nu\right\}^{1/\nu}.$$

Тогда

$$\| H_n(f;x,\nu)\|_L \le A_\nu \|f\|_L. \tag{6}$$

Доказательство. Поскольку величина $\| H_n(f;x,\nu)\|_L$ не убывает относительно параметра ν, то достаточно провести доказательство неравенства (6) для $\nu = q \ge 2$.

Пусть $\Delta^+ = [0, \pi]$. Тогда, используя свойства функции $\chi_{\Delta_k^n}$, получаем

$$\left\{\int_{\Delta^+} |F_x^{(n)}(t)|^q\, dt\right\}^{1/q} = \left\{\sum_{i=0}^{n-1} \int_{\Delta_i^n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} |S_k(f;x)\chi_{\Delta_k^n}(t)|\right)^q dt\right\}^{1/q} =$$

$$= \left\{\sum_{i=0}^{n-1} \int_{\Delta_i^n} |S_i(f;x)\chi_{\Delta_i^n}(t)|^q\, dt\right\}^{1/q} = \pi^{1/q} H_n(f;x,q).$$

Отсюда в силу (4) следует

$$H_n(f;x,q) = \pi^{-1/q} \int_{\Delta^+} F_x^{(n)}(t)\, G_x^{(n)}(t)\, dt = \pi^{-1/q} \sum_{k=0}^{N-1} |S_k(f;x)|\, \alpha_k(x).$$

Полагая $\beta_k(x) = \operatorname{sign} S_k(f;x)$ и $\delta_1 = \left[-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}\right]$, $\delta_2 = \Delta \setminus \delta_1$, имеем

$$\| H_n(f;x,q)\|_L = \pi^{-1/q} \sum_{k=0}^{n-1} \int_\Delta \beta_k(x)\, \alpha_k(x)\, S_k(f;x)\, dx =$$

$$= \pi^{-1/q-1} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\Delta} \beta_k(x)\,\alpha_k(x) \left(\int_{\delta_1} + \int_{\delta_2} \right) f(x+u)\, D_k(u)\, du\, dx =$$

$$= \pi^{-1/q-1}(u_1 + u_2), \qquad D_k(u) = \frac{\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}.$$

Оценим сначала величину u_1. Поскольку $|D_k(u)| \le k+1$ для любого u, то

$$|u_1| \le \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \int_{\Delta} \alpha_k(x) \int_{\delta_1} |f(x+u)|\, du\, dx \le$$

$$\le (n+1) \int_{\delta_1} \int_{\Delta} |f(x+u)| \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(x)\, dx\, du.$$

Используя неравенство Гельдера и неравенство (5), получаем

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(x) \le \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k^p(x) \right\}^{1/p} n^{1/q} \le \pi. \tag{7}$$

Следовательно,

$$|u_1| \le \pi(n+1) \int_{\delta_1} \left(\int_{\Delta} |f(x+u)|\, dx \right) du = 2\pi^2 \frac{n+1}{n} \|f\|_L = 4\pi^2 \|f\|_L. \tag{8}$$

Оценим теперь величину u_2. Ясно, что

$$u_2 = \int_{\delta_2} \frac{1}{2} \operatorname{ctg}\frac{u}{2} \int_{\Delta} T_n^{(1)}(x,u)\, f(x+u)\, dx\, du +$$

$$+ \int_{\delta_2} \int_{\Delta} T_n^{(2)}(x,u)\, f(x+u)\, dx\, du = u_2^{(1)} + u_2^{(2)},$$

где

$$T_n^{(1)}(x,u) = \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k(x)\,\alpha_k(x) \sin ku,$$

$$T_n^{(2)}(x,u) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k(x)\,\alpha_k(x) \cos ku.$$

В силу соотношения (7) получаем

$$|T_n^{(2)}(x,u)| \le \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(x) \le \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно,

$$|u_2^{(2)}| \le \frac{\pi}{2} \int_{\delta_2} \int_{\Delta} |f(x+u)|\, dx\, du \le \pi^2 \|f\|_L.$$

Ясно, что

$$u_2^{(1)} = \frac{1}{2} \int_{\delta_2} \Phi_n(u) \operatorname{ctg}\frac{u}{2}\, du,$$

где

$$\Phi_n(u) = \int\limits_{\Delta} T_n^{(1)}(x, u)\, f(x+u)\, dx\,.$$

Функция $\Phi_n(u)$ непрерывная. Действительно, полагая $\mu_k(x) = \beta_k(x)\alpha_k(x)$, имеем

$$\Phi_n(u) - \Phi_n(u_0) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\left[\sin ku \int\limits_{\Delta} f(x+u)\,\mu_k(x)\,dx - \sin ku_0 \int\limits_{\Delta} f(x+u_0)\,\mu_k(x)\,dx\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}[\sin ku - \sin ku_0]\int\limits_{\Delta} f(x+u)\,\mu_k(x)\,dx\, +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1}\sin ku_0 \int\limits_{\Delta}[f(x+u) - f(x+u_0)]\,\mu_k(x)\,dx = \Phi_n^{(1)}(u) + \Phi_n^{(2)}(u). \qquad (9)$$

В силу того, что $|\mu_k(x)| \le \pi$ для любого k, имеем

$$|\Phi_n^{(1)}(u)| \le \pi\|f\|_L \sum_{k=0}^{n-1}|\sin ku - \sin ku_0|.$$

Отсюда следует

$$\lim_{u\to u_0}\Phi_n^{(1)}(u) = 0. \qquad (10)$$

Очевидно, что

$$|\Phi_n^{(2)}(u)| \le \pi n\int\limits_{\Delta}|f(x+u) - f(x+u_0)|\,dx \le \pi\, n\, \omega_1(f; |u-u_0|),$$

где $\omega_1(f;\delta)$ — интегральный модуль непрерывности функции f. Следовательно,

$$\lim_{u\to u_0}\Phi_n^{(2)}(u) = 0. \qquad (11)$$

Из соотношений (9) – (11) следует

$$\lim_{u\to u_0}\Phi_n(u) = \Phi_n(u_0).$$

Используя непрерывность функции $|\Phi_n(u)|$, получаем

$$|?u_2^{(1)}| \le \int\limits_{\delta_2}\left|\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{u}{2}\,\Phi_n(u)\right|du = \sum_k{}' \int\limits_{\Delta_k^n}\left|\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{u}{2}\,\Phi_n(u)\right|du \le$$

$$\le \sum_k{}' \frac{1}{k}\max_{u\in\Delta_k^n}|\Phi_n(u)| = \sum_k{}' \frac{\Phi_n(u_k)}{k},$$

где $\Phi_n(u_k) = \max\limits_{u\in\Delta_k^n}|\Phi_n(u)|$, а $\sum{}'$ означает, что k пробегает значения $\overline{-n, n-1}$, кроме $k = -1, 0$.

Далее,

$$|u_2^{(1)}| \le \frac{n}{\pi} \int\limits_{\delta_2} {\sum_k}' \frac{\Phi_n(u_k)}{k} \chi_{\Delta_k^n}(u)\, du \le$$

$$\le \frac{n}{\pi} \int\limits_{\delta_2} {\sum_k}' |\Phi_n(u_k)| \chi_{\Delta_k^n}(u) {\sum_k}' \frac{\chi_{\Delta_k^n}(u)}{k}\, du \le$$

$$\le \frac{n}{\pi} \left\{ \int\limits_{\delta_2} \left({\sum_k}' |\Phi_n(u_k)| \chi_{\Delta_k^n}(u) \right)^q du \right\}^{1/q} \left\{ \int\limits_{\delta_2} \left({\sum_k}' \frac{\chi_{\Delta_k^n}(u)}{k} \right)^p du \right\}^{1/p} = \frac{n}{\pi} J_1 J_2 .$$

В силу свойств функции $\chi_{\Delta_k^n}$ имеем

$$J_2 = \left\{ {\sum_i}' \int\limits_{\Delta_i^n} \left({\sum_k}' \frac{\chi_{\Delta_k^n}(u)}{k} \right)^p du \right\}^{1/p} =$$

$$= \left\{ {\sum_i}' \int\limits_{\Delta_i^n} \left(\frac{\chi_{\Delta_i^n}(u)}{i} \right)^p du \right\}^{1/p} \le \pi q n^{-1/p}.$$

Далее,

$$J_1 = \left\{ \int\limits_{\delta_2} \left({\sum_k}' \chi_{\Delta_k^n}(u) \left| \int\limits_{\Delta} f(x+u_k)\, T_n^{(1)}(x, u_k)\, dx \right| \right)^q du \right\}^{1/q} \le$$

$$\le \left\{ \int\limits_{\delta_2} \left({\sum_k}' \chi_{\Delta_k^n}(u) \left| \int\limits_{\Delta} f(x+u_k)\, T_n^{(1)}(x, u)\, dx \right| \right)^q du \right\}^{1/q} +$$

$$+ \left\{ \int\limits_{\delta_2} \left({\sum_k}' \chi_{\Delta_k^n}(u) \left| \int\limits_{\Delta} f(x+u_k) \left[T_n^{(1)}(x, u) - T_n^{(1)}(x, u_k) \right] dx \right| \right)^q du \right\}^{1/q} =$$

$$= h_1 + h_2 .$$

Очевидно, что

$$h_1 \le \left\{ {\sum_i}' \int\limits_{\Delta_i^n} \left({\sum_k}' \chi_{\Delta_k^n}(u) \int\limits_{\Delta} |f(x+u_k)\, T_n^{(1)}(x, u)|\, dx \right)^q du \right\}^{1/q} =$$

$$= \left\{ {\sum_i}' \int\limits_{\Delta_i^n} \left(\chi_{\Delta_i^n}(u) \int\limits_{\Delta} |f(x+u_i)\, T_n^{(1)}(x, u)|\, dx \right)^q du \right\}^{1/q} .$$

Используя неравенство Минковского [3]

$$\left\{ \int\limits_{E_1} \left(\int\limits_{E_2} |f(x, y)|\, dx \right)^p dy \right\}^{1/p} \le \int\limits_{E_2} \left(\int\limits_{E_1} |f(x, y)|^p\, dy \right)^{1/p} dx , \qquad p > 1, \qquad (12)$$

и тот факт, что $T_n^{(1)}(x, u)$ ограничена, получаем

$$h_1 \le \left\{ \sum_i{}' \left[\int_\Delta |f(x+u_i)| \left(\int_{\Delta_i^n} |T_n^{(1)}(x,u)|^q \, du \right)^{1/q} dx \right]^q \right\}^{1/q} \le$$

$$\le \left\{ \sum_i{}' \left[\sup_x \left(\int_{\Delta_i^n} |T_n^{(1)}(x,u)|^q \, du \right)^{1/q} \right]^q \left(\int_\Delta |f(x+u_i)| \, dx \right)^q \right\}^{1/q}.$$

Пусть E_k, $k = \overline{1,n}$, и E — ограниченные сверху множества неотрицательных чисел и

$$\sum_{k=1}^n E_k = \left\{ \sum_{k=1}^n x_k, \; x_k \in E_k, \; k = \overline{1,n} \right\},$$

$$E^n = \{x^n, \; x \in E\}.$$

Тогда [4]

$$\sup \sum_{k=1}^n E_k = \sum_{k=1}^n \sup E_k,$$

$$\{\sup E^n\}^{1/n} = \sup E. \tag{13}$$

Используя соотношения (13), имеем

$$h_1 \le \sup_x \left\{ \sum_i{}' \int_{\Delta_i^n} |T_n^{(1)}(x,u)|^q \, du \right\}^{1/q} \|f\|_L = \|f\|_L \sup_x \|T_n^{(1)}(x,u)\|_{L_q(\Delta)}.$$

Записывая сначала ряд Тейлора по переменной u для функции $T_n^{(1)}(x,u)$

$$T_n^{(1)}(x,u) - T_n^{(1)}(x,u_k) = \sum_{i=1}^\infty \frac{(u-u_k)^i}{i!} \frac{\partial^i T_n^{(1)}(x,u)}{\partial u^i},$$

а затем учитывая, что $u \in \Delta_\mu^n$, $u_k \in \Delta^n$, получаем

$$h_2 \le \left\{ \sum_\mu{}' \int_{\Delta_\mu^n} \left(\sum_k{}' \chi_{\Delta_k^n}(u) \int_\Delta |f(x+u_k)| \sum_{i=1}^\infty \frac{|u-u_k|^i}{i!} \left| \frac{\partial^i T_n^{(1)}(x,u)}{\partial u^i} \right| dx \right)^q du \right\}^{1/q} \le$$

$$\le \left\{ \sum_\mu{}' \int_{\Delta_\mu^n} \left(\int_\Delta |f(x+u_\mu)| \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{i!} \left(\frac{\pi}{n}\right)^i \left| \frac{\partial^i T_n^{(1)}(x,u)}{\partial u^i} \right| \chi_{\Delta_k^n}(u) \, dx \right)^q du \right\}^{1/q}.$$

На основании неравенства (12) имеем

$$h_2 \le \left\{ \sum_\mu{}' \left[\int_\Delta |f(x+u_\mu)| \left(\int_{\Delta_\mu^n} \left(\sum_{i=1}^\infty \frac{1}{i!} \left(\frac{\pi}{n}\right)^i \left| \frac{\partial^i T_n^{(1)}(x,u)}{\partial u^i} \right| \right)^q du \right)^{1/q} dx \right]^q \right\}^{1/q} \le$$

$$\leq \|f\|_L \left\{ \sum_{\mu}{}' \left[\sup_x \left(\int_{\Delta_\mu^n} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} \left(\frac{\pi}{n}\right)^i \left| \frac{\partial^i T_n^{(1)}(x,u)}{\partial u^i} \right| \right)^q du \right)^{1/q} \right]^q \right\}^{1/q}.$$

Далее, из соотношения (13) находим

$$h_2 \leq \|f\|_L \sup_x \left\{ \sum_{\mu}{}' \int_{\Delta_\mu^n} \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} \left(\frac{\pi}{n}\right)^i \left| \frac{\partial^i T_n^{(1)}(x,u)}{\partial u^i} \right| \right]^q du \right\}^{1/q} \leq$$

$$\leq \|f\|_L \sup_x \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} \left(\frac{\pi}{n}\right)^i \left\| \frac{\partial^i T_n^{(1)}(x,u)}{\partial u^i} \right\|_{L_q}. \tag{14}$$

На основании неравенств С. Н. Бернштейна

$$\left\| \frac{\partial^i T_n^{(1)}(x,u)}{\partial u^i} \right\|_{L_q} \leq (n+1)^i \|T_n^{(1)}(x,u)\|_{L_q}$$

и (14) получаем

$$h_2 \leq \|f\|_L \sup_x \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(n+1)^i}{i!} \left(\frac{\pi}{n}\right)^i \|T_n^{(1)}(x,u)\|_{L_q} \leq$$

$$\leq e^{2\pi} \|f\|_L \sup_x \|T_n^{(1)}(x,u)\|_{L_q}.$$

Следовательно,

$$|u_2^{(1)}| \leq \pi^{1/q} \pi q (e^{2\pi}+1) \|f\|_L \sup_x \|T_n^{(1)}(x,u)\|_{L_q}. \tag{15}$$

Используя вторую часть неравенства Хаусдорфа – Юнга

$$\| g \|_{L_q} \leq \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} |a_k(g)|^p + |b_k(g)|^p \right\}^{1/p},$$

где $a_k(g)$, $b_k(g)$ — коэффициенты Фурье функции $g \in L_q$, и неравенство (5), имеем

$$\|T_n^{(1)}(x,u)\|_{L_q} \leq \left\{ \sum_k \alpha_k^p(x) \right\}^{1/p} (2\pi)^{1/q} \leq \left(\frac{2\pi^2}{n} \right)^{1/q}.$$

Таким образом,

$$|u_2^{(1)}| \leq A_q \|f\|_L. \tag{16}$$

Из неравенств (15), (16) следует

$$|u_2| \leq A_q \|f\|_L. \tag{17}$$

Отсюда, учитывая соотношение (8), получаем

$$\| H_n(f; x, q)\|_L \leq A_q \|f\|_L.$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть функция* $f \in L$, $\nu > 0$ *и*

$$\mathfrak{M}_n(f; x, \nu) = \left\{\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n} |\rho_k(f; x|^{\nu}\right\}^{1/\nu}.$$

Тогда

$$\| \mathfrak{M}_n(f; x, \nu)\|_L \leq A_\nu E_n(f)_L.$$

Доказательство. На основании неравенства (6) имеем

$$\left\|\left\{\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n} |S_k(f; x|^{\nu}\right\}^{1/\nu}\right\|_L \leq A_\nu \|f\|_L. \tag{18}$$

Пусть t_n — тригонометрический полином наилучшего приближения порядка n функции f в метрике L. Тогда при $k \geq n$

$$S_k(f; x) - f(x) = S_k(f - t_n; x) + t_n(x) - f(x). \tag{19}$$

Допустим сначала, что $\nu > 1$. Используя неравенство Минковского и соотношения (18) и (19), имеем

$$\| \mathfrak{M}_n(f; x, \nu)\|_L \leq \left\|\left\{\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n} |S_k(f - t_n; x)|^{\nu}\right\}^{1/\nu}\right\|_L +$$

$$+ \| t_n(x) - f(x)\|_L \leq A_\nu E_n(f)_L.$$

Поскольку

$$\| \mathfrak{M}_n(f; x, \nu)\|_L \leq \| \mathfrak{M}_n(f; x, 2)\|_L \quad \text{при} \quad \nu \in (0, 2],$$

то лемма 2 доказана.

В частности, при $\nu = 1$ из леммы 2 следует

$$\| \mathfrak{M}_n(f; x, 1)\|_L \leq A\, E_n(f)_L. \tag{20}$$

***Доказательство теоремы* 1.** На основании неравенства (20) получаем

$$\| \mathfrak{N}(f; x, 1)\|_L = \lambda_0 \|\rho_0(f; x)\|_L + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \lambda_k \|\rho_k(f; x)\|_L \leq$$

$$\leq A\left(\lambda_0 E_0(f)_L + \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \lambda_{2^n} E_{2^n}(f)_L\right) \leq$$

$$\leq A\left(\sum_{k=0}^{1} \lambda_0 E_k(f)_L + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} \lambda_k E_k(f)_L\right) = A\,\mathfrak{N}(f).$$

Теорема доказана.

Из доказательства теоремы 1 вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 2. *Пусть функция $f \in L$ и (λ_k^n) — неотрицательная матрица, определяющая регулярный метод суммирования рядов, причем последовательность чисел $(\lambda_k^n)_{k \in N_0}$ не убывающая при любом фиксированном n.*

Тогда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^n \|\rho_k(f;x)\|_L \le A \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^n E_k(f)_L. \tag{21}$$

Условия, наложенные на элементы матрицы (λ_k^n) в теореме 2, выполняются для многих матриц, определяющих регулярные методы суммирования (например, метод Абеля, логарифмический метод, метод средних арифметических и др.).

Для среднего арифметического метода суммирования неравенство (21) запишем следующим образом.

Пусть $\lambda_k^n = n^{-1}$ при $0 \le k \le n-1$ и $\lambda_k^n = 0$ при $k \ge n$. Тогда

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \|\rho_k(f;x)\|_L \le \frac{A}{n}\sum_{k=0}^{n-1} E_k(f)_L. \tag{22}$$

Из неравенства (22) следует

$$\left\| f(x) - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f;x) \right\|_L \le \frac{A}{n}\sum_{k=0}^{n-1} E_k(f)_L. \tag{23}$$

Неравенство (23) представляет аналог неравенства С. Б. Стечкина [5] в пространстве L.

1. *Гоголадзе Л. Д.* О сильном суммировании простых и кратных тригонометрических рядов Фурье // Некоторые вопросы теории функций / Сб. тр. – 1981. – **2**. – С. 5–28.
2. *Габисония О. Д.* О точках сильной суммируемости рядов Фурье // Успехи мат. наук. – 1992. – **44**, № 8. – С. 1020–1031.
3. *Харди Г. Г., Литтлвуд Д. Е., Полиа Г.* Неравенства. – М.: Изд-во иностр. лит., 1948. – 456 с.
4. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. – М.: Наука, 1969. – 528 с.
5. *Стечкин С. Б.* О приближении периодических функций суммами Фейера // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1961. – **12**. – С. 48–60.

Получено 11.05.98